This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

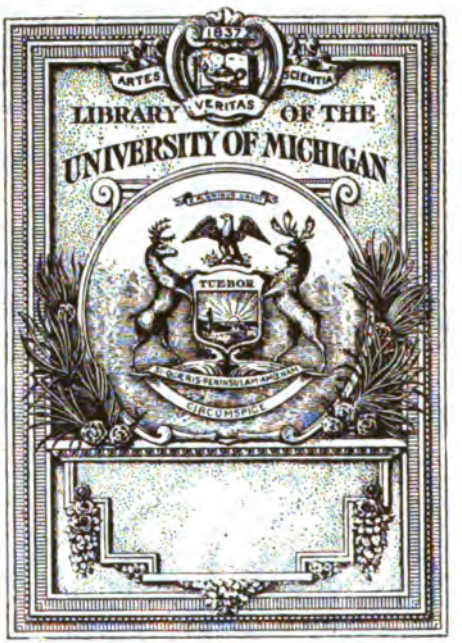
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

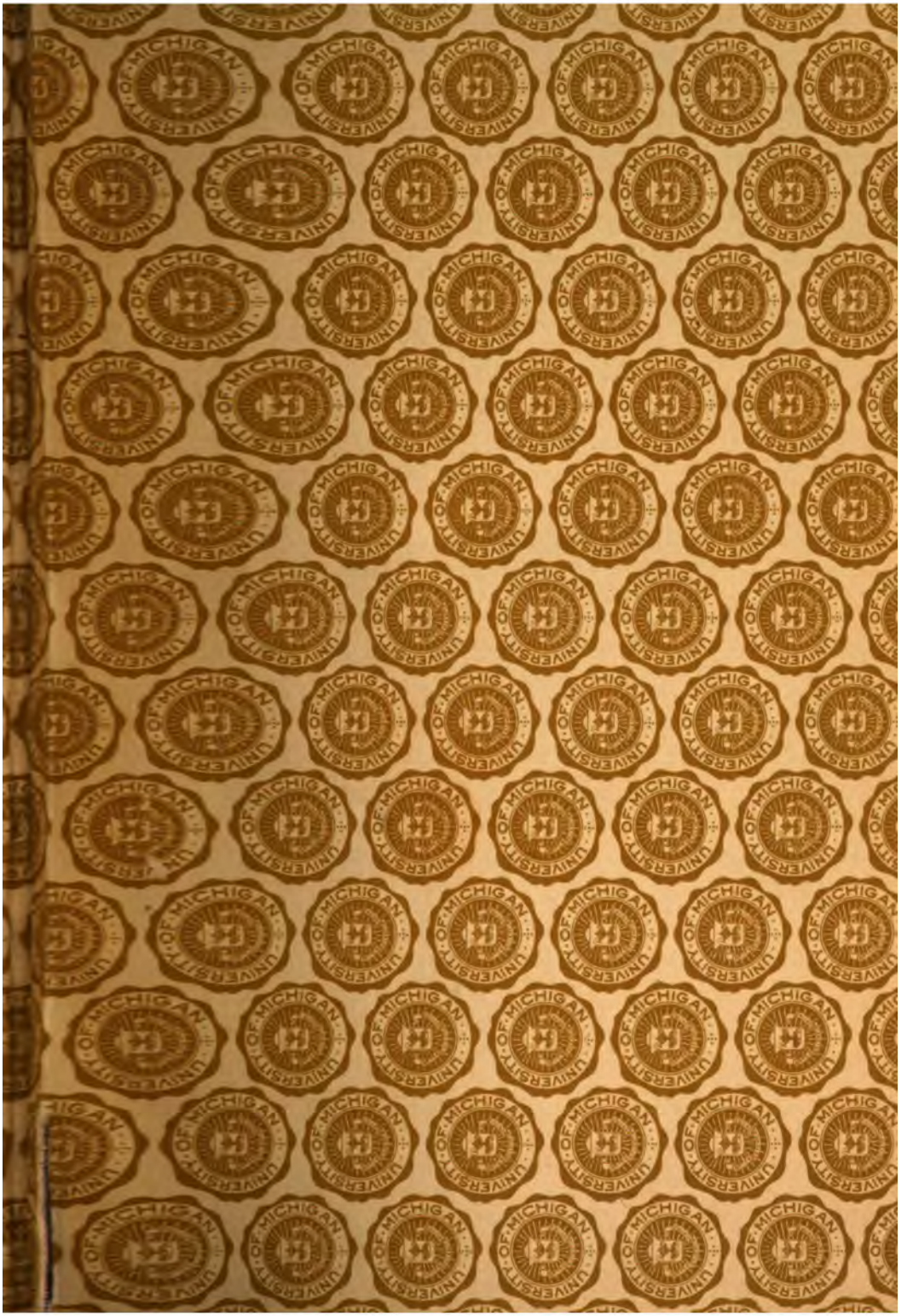
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET


UNIVERSITY OF MICHIGAN

QA
459
.H67

Meier

Meier Hirsch's

1765-1

Sammlung

geometrischer Aufgaben.

Dritter Theil,

von

Ludwig Immanuel Magnus.

Mit vier Kupfertafeln.

Berlin, 1833.

Bei Duncker und Humblot.

Alexander Ziwet 2.8

Sammlung

von

Aufgaben und Lehrsätzen

aus der

analytischen Geometrie,

von

Ludwig Immanuel Magnus.

Mit vier Kupfertafeln.

Berlin, 1833.

Bei Duncker und Humblot.

Prof. Alex Ziwet
Lgt.

Vorrede.

Die vorliegende Sammlung ist bestimmt, Anfängern, welchen das Verfahren der analytischen Geometrie nicht mehr ganz fremd ist, Gelegenheit zu geben, sich die nöthige Gewandtheit in der Behandlung geometrischer Aufgaben, und zugleich Fertigkeit im analytischen Calcul zu erwerben. Es war besonders die Rücksicht auf den zuletzt genannten Zweck, welche mich bestimmt hat, das gegenwärtige Werk in drei Abschnitte zu theilen, von welchen der erste bloß die Kenntniß der endlichen Analysis, der zweite auch diejenige der Differentialrechnung und der dritte die Bekanntschaft mit der Integralrechnung voraussetzt.

In die erste Abtheilung habe ich die Lehre von der Collineation und Reciprocität (théorie des polaires réciproques) ebener Figuren aufgenommen, weil es mir rathsam scheint, den gehörig vorbereiteten Anfänger vorzüglich an Allgemeinheit der Betrachtungsweise zu gewöhnen; doch habe ich mich dabei mit Absicht nur des gewöhnlichen Coordinatensystems bedient. Bei der Darstellung der Reciprocität drängte sich mir die Betrachtung auf, daß sich die Lehre von den conjugirten Durchmessern unabhängig von den Linien zweiten Grades durchführen lasse; um mich aber von dem herkömmlichen Wege nicht zu sehr zu entfernen, habe ich diesen Gegenstand mehr angedeutet als ausgeführt (§. 19. u. 20.). Herr Möbius, der die Collineationsverwandtschaft in ihrer Allgemeinheit zuerst aufgestellt, hat die collinearen Figuren größten-

C3332

theils unabhängig von ihrer Lage betrachtet; ich fand mich veranlaßt, diese gegenseitige Lage collinearer Figuren einer besonderen Betrachtung zu unterwerfen, wodurch ich in den Stand gesetzt wurde, mehrere Sätze, welche Herr Poncelet vermittelst einer Construction im Raume zuerst hergeleitet hat, auf rein analytischem Wege ohne Hülfsconstruction aus allgemeinen Gesetzen abzuleiten. Daß ich dabei einige neue Benennungen gebraucht, und z. B. der geraden Linie, welche schon von Herren Poncelet und Plücker, in Beziehung auf zwei Kegelschnitte, secante commune und Chordale genannt worden, den Namen Collineationsachse gegeben habe, wird man, in Rücksicht auf die ihr zu Grunde liegende allgemeinere Ansicht des Gegenstandes, nicht mißbilligen.

Da die Collineationsverwandtschaft durch zwei Gleichungen ausgedrückt wird (§. 11. G. 1.), in welchen die darin vorkommenden Nenner einander gleich sind, und das Wesen dieser Verwandtschaft, analytisch betrachtet, eben in der Gleichheit dieser Nenner besteht, so lag mir, bei der anhaltenden Beschäftigung mit diesem Gegenstande, der Gedanke sehr nahe, diese Gleichheit der Nenner aufzuheben und zu untersuchen, welche Art der Verwandtschaft durch die auf diese Weise verallgemeinerten Gleichungen ausgedrückt werde, eine Untersuchung, die keine Schwierigkeit hatte, und deren Einzelnheiten für mich um so leichter waren, als ich mir die schon vorher beendigte Untersuchung der Collineation dabei im Allgemeinen zur Norm dienen lassen konnte. Diese neue Art der Verwandtschaft, wiewohl ihr eine neue Idee ganz und gar nicht zu Grunde liegt, und dieselbe vielmehr nur als eine Verallgemeinerung der Collineation zu betrachten ist, auf die Herr Möbius in seinem vortrefflichen Barycentrischen Calcul an mehr als einer Stelle hingewiesen hat, schien mir dennoch der Beachtung der Geometer nicht ganz unwerth, und ich machte sie deshalb in einem französisch geschriebenen Aufsatze im Jahre 1831, bald nachdem ich sie gefunden hatte, bekannt. In diesem Aufsatze sowohl, als in der in diesem Werke enthaltenen Darstellung dieser Verwandtschaft, habe ich mich darauf beschränkt, sie nur so weit zu betrachten, als sie die Lage der einander entsprechenden Punkte betrifft, und dabei diejenigen anderen Verwandtschaften, welche sich aus ihr vermittelst der Reciprocität unmittelbar ergeben, nicht weiter für sich in Erwägung gezogen, sondern nur die Anwendungen, welche sich von diesen anderen Verwandtschaften machen lassen, an Beispielen gezeigt. Eine

vollständige Behandlung des in Rede stehenden Gegenstandes würde nicht sowohl auf eine Ausführung dieser anderen Verwandtschaften, sondern vielmehr auf die Bestimmung der Constanten und auf die metrischen Relationen zu richten seyn, und es würden besonders diejenigen nicht durch die Reciprocität herzuleitenden Verwandtschaften in eine solche Behandlung eingeschlossen werden können, nach welchen z. B. einer geraden Linie im Allgemeinen eine Linie vierten Grades entspricht, welche drei bestimmte Doppelpunkte hat und durch drei andere ebenfalls bestimmte Punkte geht u. s. f. Was übrigens die Ausdehnung der mehr erwähnten Verwandtschaft auf den Raum betrifft (die ich mir noch vorbehalten muß), so entspricht nach derselben einer Ebene im Allgemeinen keinesweges eine Fläche zweiten Grades, wie eine oberflächliche Analogie vielleicht anzunehmen geneigt machen könnte; die Flächen zweiten Grades erscheinen nebst anderen einzelnen Fällen hier nur durch bestimmte Particularisationen *).

---

*) In einer zu Ende des vorigen Jahres erschienenen Schrift unter dem Titel: Systematische Darstellung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten ꝛc. von Jacob Steiner, die mir erst im Anfange des gegenwärtigen Jahres, als die erste Abtheilung der vorliegenden Sammlung größtentheils schon die Presse verlassen hatte, zu Gesicht gekommen, ist die oben erwähnte Verwandtschaft ebenfalls behandelt. Hr. Steiner sagt in seiner Vorrede, daß er die Resultate schon im Jahre 1828 gefunden habe, ohne sie bekannt zu machen, und fügt dann die Bemerkung hinzu: es sey leicht erklärlich, daß dieser Gegenstand in's Publicum gekommen sey, da er kein Geheimniß daraus gemacht habe. — Da nun dieser Gegenstand nur durch mich in's Publicum gekommen, so muß ich annehmen, Hr. St. will durch diese Bemerkung zu verstehen geben, ich habe diese Sache durch sein angebliches Nichtgeheimhalten erfahren. Nachdem ich oben den Hergang der Auffindung jener Verwandtschaft, welche, wie gesagt, durch Verallgemeinerung der Collineation hervortritt, und welcher keinesweges, wie Hr. St. zu glauben scheint, eine neue Idee zu Grunde liegt, erzählt habe, kann ich mich jeder Gegenbemerkung über jene ungegründete Aeußerung enthalten. Uebrigens spricht Hr. St. in derselben Vorrede zwar noch von einer vollständigen Mittheilung des genannten Gegenstandes; dessen ungeachtet finden sich in dem darauf bezüglichen Paragraphen seiner Schrift nur diejenigen Resultate, die ich bereits gefunden und bekannt gemacht hatte, und außerdem einige unbedeutende Einzelnheiten, wogegen denn wieder andere von mir gegebene Details weggelassen sind. Und was die von Hrn. St. versuchte Ausdehnung auf den Raum betrifft, so ist diese, selbst wenn man seine Darstellung nur als eine Andeutung einer ausführlicheren Behandlung ansehen wollte, gänzlich mißlungen zu nennen, indem er nur particuläre Fälle der allgemeinen Verwandtschaft (zum Theil sogar ohne die unumgänglich nöthigen Bestimmungen) aufführt, den Hauptfall aber nicht einmal erwähnt.

In der zweiten Abtheilung bin ich, was die Anwendung der Differentialrechnung betrifft, in der Hauptsache der Lagrange'schen Vorstellungsweise gefolgt, weil diese, meiner Meinung nach, für Anfänger eine größere Evidenz hat, als die sonst bekannten Vorstellungsarten; die Differentialcoefficienten habe ich aber auf die gewöhnliche Weise bezeichnet, es jedoch überall vermieden, den Zähler und Nenner dieser Bezeichnung von einander zu trennen.

In der dritten Abtheilung sind die Integrale der expliciten Functionen aus den Integraltafeln von Meier Hirsch genommen worden. Der Anfänger wird nicht unterlassen, zu seiner Uebung diese Integrale selbst herzuleiten, und sich deshalb der genannten Tafeln nicht bedienen. Die Integration der Differentialgleichungen ist, bis sie auf eine sogenannte Quadratur reducirt ist, vollständig gegeben worden, weil es Anfängern Schwierigkeit machen könnte, die geeignete Integrationsmethode aufzufinden. Diejenigen Lehren der Integralrechnung, mit welchen dieser Zweig der Analysis in der neuesten Zeit bereichert worden, die aber bis jetzt noch nicht in die Lehrbücher übergegangen, sind bei der Auflösung der Aufgaben nicht in Anwendung gebracht worden, weil sie den Anfängern noch nicht bekannt seyn können.

Ueberall sind in den Lösungen der Aufgaben und in den Beweisen der Lehrsätze nur die Hauptmomente, und zwar so gedrängt angegeben worden, als es ohne Mißverständnisse zu veranlassen möglich war. Dem Leser habe ich es überlassen, die leicht einzuschaltenden Mittelglieder hinzuzufügen, damit seine Selbstthätigkeit in Anspruch genommen bleibe, und der Umfang des Buches, der ohnehin eine größere Ausdehnung erhalten hat, als ich ihm zu geben anfänglich beabsichtigte, nicht noch mehr vergrößert werde.

Unter den Uebelständen, die sich mir bei der Ausarbeitung dieser Sammlung entgegenstellten, trat die besonders heraus, daß mir kein Werk bekannt war, welches alle diejenigen Lehren der analytischen Geometrie enthält, die bei der Auflösung der Aufgaben in Anspruch genommen wurden, von welchem ferner auch hätte angenommen werden können, daß es sich, wie Euclids Elemente, in den Händen eines jeden Mathematikbeflissenen befinde, und auf das ich mich demnach hätte berufen können. Ich war daher genöthigt, die einzelnen Lehren der analytischen Geometrie den Aufgaben, deren Lösung auf ihnen beruht, in gedrängter Kürze vorangehen zu las-

sen, wobei ich mich denn aber bemühte, diese Lehren selbst, so weit es ohne besondere Weitläufigkeit geschehen konnte, in die Form von Aufgaben zu bringen. Dadurch ist das vorliegende Werk, seiner Form und zum Theil auch seinem Inhalte nach, einem Lehrbuche der analytischen Geometrie näher getreten; dennoch habe ich ihm diese Benennung nicht geben können, weil ein Lehrbuch Anforderungen zu genügen hat, die eine zur Uebung bestimmte Aufgaben-Sammlung nicht erfüllen kann.

Ueber den Gebrauch der vorliegenden Sammlung habe ich im Allgemeinen nur Folgendes zu bemerken: Der Anfänger muß das Buch genau der Reihe nach durchgehen, und die Lösung einer jeden Aufgabe auf analytischem Wege selbst zu finden suchen, ohne daß er auf die dieser Aufgabe unmittelbar folgende Lösung hinüber sieht. Wenn ihm dies gelungen ist, muß er seine Lösung mit der eben genannten vergleichen. Sind aber seine Bemühungen um eine selbstständige Auffindung der Lösung vergeblich, so mag er den Anfang der im Buche befindlichen so weit aufmerksam durchgehen, bis er den Weg allein weiter verfolgen zu können glaubt. Bei vielen Aufgaben wird ihm die Umsicht zu Statten kommen, die er sich bei Gelegenheit der Lösung früherer Aufgaben auf diese Weise schon erworben hat; denn es ist so viel als möglich Sorge getragen worden, einer Aufgabe, deren Lösung sich durch eine eigenthümliche Behandlungsweise auszeichnet, verwandte Aufgaben, die nach derselben oder auf ähnliche Weise behandelt werden können, folgen zu lassen. So z. B. wird es gewiß den meisten Lesern gelingen, die Aufgabe (36.) zu lösen, nachdem sie die Lösung der Aufgabe (33.) wohl erfaßt haben.

Die verschiedenen älteren und neueren Werke aufzuführen, die ich bei der Ausarbeitung des vorliegenden benutzen mußte, halte ich für unnöthig; ich nenne nur, als die am meisten in Anspruch genommenen, die Annales de mathématiques, die Analytisch-geometrischen Entwickelungen des Herrn Plücker und den Barycentrischen Calcul des Herrn Möbius. Von den Werken in fremden Sprachen, mit welchen das gegenwärtige fast denselben Zweck hat, sind mir nur zwei bekannt geworden, nämlich erstens: L. Puissant, Recueil de diverses propositions de géométrie, résolues ou démontrées par l'analyse algébrique, und zweitens: George Peacook, A collection of examples of the

Seite

Dritte Abtheilung.

Die Quadratur der Curven. 491
Die Rectification der Curven. 528
Aufgaben, welche auf Differentialgleichungen erster Ordnung führen. 546
Aufgaben, welche auf Differentialgleichungen höherer Ordnungen führen. . . . 628

Erste Abtheilung.

§. 1.

Der Anfangspunkt A und die Lage einer geraden Linie AX sey gegeben. Jeder Punkt N dieser Linie wird nun ebenfalls als gegeben angesehn werden können, wenn die Größe a des Stückes AN bekannt ist. Ist auch für einen andern Punkt N' der Linie AX die Größe a' von AN' bekannt, so ist die Entfernung h der beiden Punkte N und N' Fig. 1.

$$h = a - a'. \qquad (1)$$

Liegt aber der Punkt N' nicht auf der Linie AN selbst, sondern auf ihrer Verlängerung über A hinaus, und ist AN'=a'', so hat man für die Entfernung h der beiden Punkte N und N' Fig. 2.

$$h = a + a''. \qquad (2)$$

Beide Formeln (1 und 2) lassen sich indessen in eine

$$h = a - x \qquad (3)$$

zusammen fassen, indem man AN=x setzt, und den Werth von x positiv nimmt, wenn N auf der einen Seite von A, negativ hingegen wenn dieser Punkt auf der entgegengesetzten Seite liegt.

Es seyen nun AX und AY zwei der Lage nach gegebene im Punkte A sich schneidende unbegrenzte gerade Linien, und P irgend ein Punkt ihrer Ebene. Zieht man von P aus die Gerade PN parallel mit AY bis sie die Linie AX oder deren Verlängerung trifft, so werden AN und NP als gegeben angesehen werden können, wenn der Punkt P gegeben ist, und umgekehrt wird die Lage des Punktes P gegeben seyn, wenn die Größen von AN und NP gegeben sind. Fig. 3.

Die Linien AX und AY heißen Coordinatenachsen, AN und AP die Coordinaten des Punktes P. Der Punkt A heißt der Anfangspunkt der Coordinaten; AX wird die Abscissenachse und AY die

§. 1.

Der Anfangspunkt A und die Lage einer geraden Linie AX sey gegeben. Jeder Punkt N dieser Linie wird nun ebenfalls als gegeben angesehn werden können, wenn die Größe a des Stückes AN bekannt ist. Ist auch für einen andern Punkt N′ der Linie AX die Größe a′ von AN′ bekannt, so ist die Entfernung h der beiden Punkte N und N′ Fig. 1.

$$h = a - a'. \qquad (1)$$

Liegt aber der Punkt N′ nicht auf der Linie AN selbst, sondern auf ihrer Verlängerung über A hinaus, und ist AN′=a″, so hat man für die Entfernung h der beiden Punkte N und N′ Fig. 2.

$$h = a + a''. \qquad (2)$$

Beide Formeln (1 und 2) lassen sich indessen in eine

$$h = a - x \qquad (3)$$

zusammen fassen, indem man AN=x setzt, und den Werth von x positiv nimmt, wenn N auf der einen Seite von A, negativ hingegen wenn dieser Punkt auf der entgegengesetzten Seite liegt.

Es seyen nun AX und AY zwei der Lage nach gegebene im Punkte A sich schneidende unbegrenzte gerade Linien, und P irgend ein Punkt ihrer Ebene. Zieht man von P aus die Gerade PN parallel mit AY bis sie die Linie AX oder deren Verlängerung trifft, so werden AN und NP als gegeben angesehen werden können, wenn der Punkt P gegeben ist, und umgekehrt wird die Lage des Punktes P gegeben seyn, wenn die Größen von AN und NP gegeben sind. Fig. 3.

Die Linien AX und AY heißen Coordinatenachsen, AN und AP die Coordinaten des Punktes P. Der Punkt A heißt der Anfangspunkt der Coordinaten; AX wird die Abscissenachse und AY die

§. 1. Ordinatenachse genannt; ferner heißt AN die Abscisse und NP die Ordinate des Punktes P. Den Winkel XAY nennt man Coordinatenwinkel, und die Coordinaten heißen rechtwinklige oder schiefwinklige, je nachdem dieser Winkel ein rechter oder ein schiefer ist.

Sind P, P', P'' und P''' vier in den Winkeln XAY, X'AY, X'AY' und XAY' gelegene Punkte, deren Abscissen x eine gleiche Größe a und deren Ordinaten y ebenfalls eine gleiche Größe b haben, so ist, nach dem was oben gesagt worden ist:

$$\begin{aligned} &\text{für P} \ldots x = +a \text{ und } y = +b \\ &\text{für P'} \ldots x = -a \text{ und } y = +b \\ &\text{für P''} \ldots x = -a \text{ und } y = -b \\ &\text{für P'''} \ldots x = +a \text{ und } y = -b. \end{aligned}$$

Eine andere Art einen Punkt in einer gegebenen Ebene zu bestimmen ist folgende.

Fig. 4. Es sey A der Anfangspunkt einer der Lage nach gegebenen Geraden AQ dieser Ebene und P irgend ein Punkt der letztern. Zieht man AP, so ist die Größe von AP und die des Winkels PAQ als gegeben anzusehen, wenn der Punkt P gegeben ist, und umgekehrt ist die Lage des Punktes P als gegeben zu betrachten, wenn die Größen von AP und von dem Winkel PAQ gegeben sind.

Die Linie AP und der Winkel PAQ heißen Polar-Coordinaten des Punktes P. Der feste Punkt A heißt der Anfangspunkt oder Pol, AQ heißt die Achse und die Gerade AP wird der Radius vector (Leitstrahl) genannt. Macht eine Gerade AP mit der Achse AQ den Winkel α, und liegt ein Punkt P auf der erstgenannten Linie selbst in einer Entfernung AP = a, ein anderer P' aber in derselben Entfernung von A auf ihrer Verlängerung über A hinaus, so sind die Polar-Coordinaten u und t, in Folge der zu Anfang gemachten Bemerkung,

$$\begin{aligned} &\text{für P} \ldots t = \alpha \ (\text{oder} = \alpha \pm 2n\pi) \text{ und } u = +a \\ &\text{für P'} \ldots t = \alpha \ (\text{oder} = \alpha \pm 2n\pi) \text{ und } u = -a. \end{aligned}$$

Man kann aber auch, wie leicht einzusehen ist,

$$\begin{aligned} &\text{für P} \ldots t = \alpha + (1 \pm 2n)\pi \text{ und } u = -a \\ &\text{für P'} \ldots t = \alpha + (1 \pm 2n)\pi \text{ und } u = +a \end{aligned}$$

setzen, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

§. 2.

§. 2.

Aufgabe [1]. Die Coordinaten zweier Punkte P_1, P_2 sind gegeben; es soll ihre Entfernung P_1P_2 durch diese Coordinaten ausgedrückt werden.

I. Es seyen $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ die schiefwinkligen Coordinaten der Punkte P_1 und P_2 und α der Coordinatenwinkel. Man ziehe P_1M der Abscissenachse parallel; dann ist Fig. 5.

$P_1M = AN_2 - AN_1 = x_2 - x_1$; $P_2M = P_2N_2 - P_1N_1 = y_2 - y_1$;

$\angle P_1MP_2 = \pi - \alpha$; $\cos P_1MP_2 = -\cos\alpha$, und daher, nach einem bekannten Satze der Trigonometrie,

$$P_1P_2 = \pm\sqrt{(y_2-y_1)^2 + 2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\alpha + (x_2-x_1)^2} \quad . \quad (4)$$

Diese Formel ist allgemein gültig, wenn auch wie in Fig. 6, $\angle P_1MP_2 = \alpha$ ist. Denn alsdann ist zwar nicht $\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1M}^2 + 2\overline{P_1M}.\overline{P_2M}\cos\alpha + \overline{PM}^2$, sondern $P_1P_2^2 = \overline{P_1M}^2 - 2\overline{P_1M}.\overline{P_2M}.\cos\alpha + \overline{P_2M}^2$; aber es ist dann auch $y_2 - y_1$ negativ, und man überzeugt sich leicht, daß in allen Fällen, in welchen $P_1MP_2 = \alpha$ ist, $y_2 - y_1$ und $x_2 - x_1$ entgegengesetzte Zeichen haben müssen. Fig. 6.

II. Ist der Coordinatenwinkel ein rechter, so ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\cos\alpha = 0$, daher

$$P_1P_2 = \pm\sqrt{(y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2} \quad . \quad (5)$$

III. Es seyen t_1 u_1 und t_2 u_2 die Polarcoordinaten der Punkte P_1 und P_2; dann ist, wie leicht einzusehen,

$$P_1P_2 = \pm\sqrt{u_2^2 + u_1^2 - 2u_1u_2\cos(t_2 - t_1)} \quad . \quad (6)$$

Transformation der Coordinaten.

§. 3.

Es seyen AX und AY zwei Coordinatenachsen, auf welche der Punkt P durch seine beiden Coordinaten $AC = x$ und $PC = y$ bezogen ist, und es seyen A'X' , A'Y' zwei andere (neue) Achsen, auf welchen derselbe Punkt P die Coordinaten $A'D = x'$ und $PD = y'$ hat. Es seyen ferner die Coordinaten des neuen Anfangspunktes A', nämlich $AB = a$ und $A'B = b$, und Fig. 7.

§. 3. die Winkel, welche die neuen Achsen mit der alten Abscissenachse oder mit der ihr parallelen Linie A'E bilden, X'A'E=β und Y'A'E=γ, gegeben. Ferner sey YAX=α.

Aufgabe [2]. Man soll die alten Coordinaten durch die neuen ausdrücken.

Fig. 7. Man ziehe Dr mit AY und DM mit AX parallel, so ist

$$\text{im}\Delta A'Dn,\ A'n=\frac{\sin A'Dn}{\sin A'nD}.A'D=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}x';\ Dn=\frac{\sin DAn}{\sin AnD}.A'D=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}x',$$

$$\text{im}\Delta PDm,\ Dm=\frac{\sin DPm}{\sin DmP}.DP=\frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha}y';\ Pm=\frac{\sin PDm}{\sin DmP}.DP=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}y'.$$

Da nun AC=AB+A'n+Dm und PC=A'B+Dn+Pm, so ist

$$\left.\begin{aligned} x &= a+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}x'+\frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha}y' \\ y &= b+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}x'+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}y' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Diese Transformationsformeln (1) sind allgemein gültig, die Winkel α, β, γ mögen eine Größe haben, welche man will.

I. Wenn die neuen Coordinaten den alten parallel sind, also wenn $\beta=0$ und $\gamma=\alpha$, so ist

$$\left.\begin{aligned} x &= a+x' \\ y &= b+y' \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

II. Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten nicht geändert wird, also wenn a=0 und b=0, so ist

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sin(\alpha-\beta)x'+\sin(\alpha-\gamma)y'}{\sin\alpha} \\ y &= \frac{\sin\beta.x'+\sin\gamma.y'}{\sin\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

und wenn unter dieser nämlichen Voraussetzung

a) nur die Ordinatenachse geändert wird, also wenn $\beta=0$,

$$\left.\begin{aligned} x &= x'+\frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha}.y' \\ y &= \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}y' \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

b) wenn nur die Abſciſſenachſe geändert wird, alſo wenn $\gamma = \alpha$, §. 3.

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}x' \\ y &= \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}x' + y' \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

c) wenn der Coordinatenwinkel der neuen Achſen dem der alten gleich iſt, alſo wenn $\gamma - \beta = \alpha$ oder $\gamma = \alpha + \beta$,

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}x' - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}y' \\ y &= \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}x' + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}y' \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

d) wenn der Coordinatenwinkel der alten Achſen ein rechter iſt, alſo wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\beta x' + \cos\gamma y' \\ y &= \sin\beta x' + \sin\gamma x' \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

e) wenn der Coordinatenwinkel der neuen Achſen ein rechter iſt, alſo wenn $\gamma - \beta = \frac{1}{2}\pi$ oder $\gamma = \frac{1}{2}\pi + \beta$,

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}x' - \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}y' \\ y &= \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}x' + \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}y' \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

f) wenn die neuen Achſen ſowohl als die alten rechtwinklig ſind, alſo wenn $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ und $\gamma - \beta = \frac{1}{2}\pi$,

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\beta x' - \sin\beta y' \\ y &= \sin\beta x' + \cos\beta y' \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Aufgabe [3]. Man ſoll die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes durch ſeine Polarcoordinaten, und die letztern durch die erſten ausdrücken, unter der Vorausſetzung, daß der Anfangspunkt der rechtwinkligen der Pol der Polarcoordinaten und die Achſe der letztern die Abſciſſenachſe ſey.

Bezeichnet man die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P durch x, y und die Polarcoordinaten durch t, u; ſo iſt, da im rechtwinkligen Dreiecke ANP; AN = AP . cos PAN und PN = AP . sin PAN

$$x = u.\cos t \quad \text{und} \quad y = u.\sin t \quad (10)$$

§. 3. Hieraus folgt

$$u=\sqrt{x^2+y^2}\ ;\ tang\,t=\frac{y}{x}\ ;\ sin\,t=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\ cos\,t=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (11)$$

Wenn die alten Coordinaten schiefwinklig sind, und ihr Coordinatenwinkel gleich α ist, so hat man zur Transformation in Polarcoordinaten

$$x = u\frac{sin\,(\alpha-t)}{sin\,\alpha}\ ;\ y = u\frac{sin\,t}{sin\,\alpha} \quad (12)$$

Linie ersten Grades.

§. 4.

Fig. 3. Wenn nur die Ordinate y eines Punktes gegeben ist, so ist dieser Punkt nicht gänzlich bestimmt. Es sey also

$$y = b, \quad (1)$$

und auf AY ein Stück AM=b abgeschnitten, ferner durch M der AX die PP' parallel gezogen, so wird für einen jeden Punkt P dieser Geraden die Ordinate PN gleich b seyn, und für jeden Punkt, welcher nicht in dieser Geraden liegt, wird die Ordinate nicht gleich b seyn. Man nennt daher die Gleichung (1) die Gleichung der geraden Linie PP'.

Ist b=0, also

$$y = 0, \quad (2)$$

so drückt diese Gleichung (2) die Abscissenachse aus. Auf ähnliche Weise überzeugt man sich, daß

$$x = a \quad (3)$$

die Gleichung einer Geraden ist, die der Ordinatenachse in der Entfernung a parallel läuft, und daß die Gleichung

$$x = 0 \quad (4)$$

die Ordinatenachse ausdrückt.

Wenn weder die Abscisse noch die Ordinate eines Punktes, sondern nur eine Gleichung zwischen diesen beiden Größen x, y, und zwar vom ersten Grade, nämlich

$$y = ax + b \qquad (5)$$ §. 4.

(auf welche Form jede Gleichung vom ersten Grade gebracht werden kann) gegeben ist, so ist die Lage des Punktes, dessen Coordinaten x und y sind, ebenfalls nicht gänzlich bestimmt. Es stellt sich daher die

Aufgabe [4]. Diejenige Linie zu finden, welche durch die Gleichung (5) ausgedrückt wird.

Es sey α der gegebene Coordinatenwinkel, und β eine noch unbestimmte Größe. Man transformire die Gleichung (5) auf eine neue Abscissenachse, welche mit der alten einen Winkel gleich β bildet, indem man für x und y die Ausdrücke (5) des §. 3. setzt, so kommt:

$$y' + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot x' = \frac{a \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha} \cdot x' + b$$

Bestimmt man nun β so, daß $\sin\beta = a \sin(\alpha - \beta)$, oder, was dasselbe ist, $\tang\beta = a \cdot \sin\alpha - a \cdot \cos\alpha \cdot \tang\beta$, was immer möglich, so verwandelt sich die Gleichung für x', y' in:

$$y' = b,$$

welches die Gleichung (1) einer Geraden ist, die der neuen Abscissenachse parallel läuft und die Ordinatenachse in einer Entfernung $= b$ vom Anfangspunkte der Coordinaten schneidet. Die Gleichung (5) drückt also eine gerade Linie aus, welche mit der Abscissenachse einen Winkel β bildet, der durch die Gleichung $\sin\beta = a \sin(\alpha - \beta)$ bestimmt ist, und welche von der Ordinatenachse ein Stück $= b$ abschneidet.

Jede Gleichung vom ersten Grade zwischen rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten drückt also eine gerade Linie aus, und wenn sie die Form $y = ax + b$ hat, so ist

$$a = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}, \qquad (6)$$

wo α den bekannten Coordinatenwinkel und β denjenigen Winkel bedeutet, welchen diese Gerade mit der Abscissenachse macht. Sind die Coordinaten rechtwinklig, so ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, und folglich

$$a = \tang\beta. \qquad (7)$$

Aus dem bisher Gesagten ist klar, daß jede Gerade in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten durch eine Gleichung vom ersten Grade ausgedrückt werden kann, und es sind nun folgende Aufgaben zu lösen.

§. 4. Aufgabe [5]. Die Coordinaten eines Punktes sind gegeben; man soll die Gleichung der Geraden finden, welche durch diesen Punkt geht und mit der Abscissenachse einen gegebenen Winkel bildet.

Es seyen x', y' die Coordinaten des gegebenen Punktes und β der gegebene Winkel. Bezeichnet α den bekannten Coordinatenwinkel, so ist nach dem vorher Gesagten

$$y = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}x+b,$$

wo b eine noch unbekannte Größe ist. Da nun für $x=x'$, $y=y'$ seyn soll, so hat man

$$y' = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}x'+b,$$

und wenn man, um b zu eliminiren, diese Gleichung von der vorigen abzieht,

$$y-y' = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}(x-x'), \qquad (8)$$

welches die verlangte Gleichung ist.

Wenn der gegebene Punkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so ist $x'=0$ und $y'=0$; alsdann hat man statt der Gleichung (8) die folgende

$$y = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}x. \qquad (9)$$

Die veränderlichen Coordinaten x, y in der Gleichung (8) nennt man, im Gegensatze mit den in derselben Gleichung vorkommenden Coordinaten x', y', die laufenden Coordinaten der durch diese Gleichung ausgedrückten Linie.

Aufgabe [6]. Die Coordinaten zweier Punkte sind gegeben; man soll die Gleichung der Geraden finden, welche durch diese beiden Punkte geht.

Es seyen x', y' und x'', y'' die Coordinaten der gegebenen Punkte. Wenn nun

$$y = ax+b \qquad (5)$$

die gesuchte Gleichung seyn soll, so müssen, da für $x=x'$, $y=y'$ und für $x=x''$, $y=y''$ ist, a und b so beschaffen seyn, daß zu gleicher Zeit

$$y' = ax' + b\,,$$ §. 4.
$$y'' = ax'' + b\,.$$

Diese Gleichungen reichen hin, a und b zu bestimmen; da es aber nur darauf ankommt, diese Größen zu eliminiren, so ziehen wir die beiden Gleichungen nach einander von der Gleichung (5) ab, und erhalten dadurch

$$y - y' = a(x - x') \text{ und } y - y'' = a(x - x''),$$

woraus sich, wenn man a fortschafft,

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')\,, \qquad (10)$$

oder auch

$$(x' - x'')y - (y' - y'')x + x''y' - x'y'' = 0 \qquad (11)$$

ergiebt.

Wenn einer der gegebenen Punkte, z. B. $x'y'$, der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so hat man, da alsdann $x' = 0$ und $y' = 0$ ist, statt der Gleichungen (10 oder 11)

$$y = \frac{y''}{x''}x \quad \text{oder} \quad x''y - y''x = 0\,. \qquad (12)$$

Liegt einer der gegebenen Punkte in der Abscissenachse, und der andere in der Ordinatenachse, ist also $y' = 0$ und $x'' = 0$, so geht die gefundene Gleichung (11) in

$$x'y + y''x - x'y'' = 0 \qquad (13)$$

über, welcher letztern Gleichung man auch die symmetrische Form

$$\frac{y}{y''} + \frac{x}{x'} = 1 \qquad (14)$$

geben kann.

§. 5.

Liegen drei Punkte in gerader Linie, so müssen ihre Coordinaten eine gewisse Bedingungsgleichung befriedigen, die auf folgende Weise gefunden werden kann. Heißen nämlich die Coordinaten dieser drei Punkte $x'y'$, $x'y'$ und $x'''y'''$, so ist die Gleichung der Geraden, welche durch den ersten und zweiten Punkt geht (§. 4. G. 10.),

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

§. 5 Da nun der dritte Punkt in dieser Geraden liegen soll, so müssen seine Coordinaten diese Gleichung befriedigen. Man hat daher

$$y'''-y' = \frac{y'-y''}{x'-x''}(x'''-x'),$$

welches die in Rede stehende Bedingungsgleichung ist, die sich auch auf die Formen

$$\frac{y'-y'''}{x'-x'''}-\frac{y'-y''}{x'-x''}=0\,;\,(x''y'-x'y'')+(x'''y''-x''y''')+(x'y'''-x'''y')=0 \quad (1)$$

bringen läßt.

Aufgabe [7]. Die Coordinaten zweier Punkte sind gegeben, man soll die Coordinaten desjenigen Punktes finden, welcher die Verbindungslinie der erstern in einem gegebenen Verhältnisse theilt.

Es seyen $x'y'$ und $x''y''$ die gegebenen Coordinaten und $m:n$ das gegebene Verhältniß. Bezeichnet man die gesuchten Coordinaten durch x_1y_1, so hat man, weil der Punkt x_1y_1 mit den Punkten $x'y'$ und $x''y''$ in gerader Linie liegen soll

$$\frac{y_1-y''}{x_1-x''} = \frac{y_1-y'}{x_1-x'}. \quad (2)$$

Nun soll der Aufgabe zufolge (§. 2. S. 4.)

$$n\sqrt{(y_1-y')^2+2(y_1-y')(x_1-x')\cos\alpha+(x_1-x')^2} = \pm m\sqrt{(y_1-y'')^2+2(y_1-y'')(x_1-x'')\cos\alpha+(x_1-x'')^2}$$

seyn. Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$n(x_1-x')\sqrt{\left(\frac{y_1-y'}{x_1-x'}\right)^2+2\left(\frac{y_1-y'}{x_1-x'}\right)\cos\alpha+1} = \pm m(x_1-x'')\sqrt{\left(\frac{y_1-y''}{x_1-x''}\right)^2+2\left(\frac{y_1-y''}{x_1-x''}\right)\cos\alpha+1},$$

so ist ersichtlich, daß sich in Folge der Gleichung (2) die Wurzelgrößen heben, daher hat man

$$n(x_1-x') = \pm m(x_1-x''),$$

woraus sich, und in Folge von (2),

$$x_1 = \frac{nx'\pm mx''}{n\pm m} \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{ny'\pm my''}{n\pm m} \quad (3)$$

ergiebt.

Man erhält also im Allgemeinen zwei solcher Theilungspunkte, von welchen der eine auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte selbst, der andere in ihrer Verlängerung liegt. Wenn aber $n=m$, d. i., wenn der gesuchte Punkt die Verbindungslinie in gleiche Theile theilen soll, so werden die Werthe, welche das untere Vorzeichen giebt, $=\infty$; die andern Werthe aber sind §. 5.

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(x'+x'') \quad \text{und} \quad y_1 = \tfrac{1}{2}(y'+y''). \qquad (4)$$

liegt von den gegebenen Punkten einer in der Abscissenachse und der andere in der Ordinatenachse, so daß also $y'=0$, und $x''=0$, so hat man

$$x_1 = \frac{nx'}{n\pm m} \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{my''}{n\pm m}, \qquad (5)$$

und, unter derselben Voraussetzung, für $n=m$

$$x_1 = \tfrac{1}{2}x' \quad \text{und} \quad y_1 = \tfrac{1}{2}y''. \qquad (6)$$

§. 6.

Aufgabe [8]. *Die Gleichungen zweier Geraden*

$$y = ax+b \quad \text{und} \quad y = a'x+b'$$

sind gegeben; man soll die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes und den Winkel finden, den sie mit einander bilden.

I. Da der Durchschnittspunkt der beiden Linien sowohl in der einen als in der andern liegt, so werden seine Coordinaten, die $x'y'$ seyn mögen, beide gegebene Gleichungen befriedigen, so daß man haben wird:

$$y' = ax'+b \quad \text{und} \quad y' = a'x'+b'.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich nun:

$$x' = \frac{b'-b}{a-a'} \quad \text{und} \quad y' = \frac{ab'-a'b}{a-a'}. \qquad (1)$$

Hierbei ist Folgendes zu bemerken. α) Wenn $b'=b$, so ist $x'=0$, d. i. der Durchschnittspunkt liegt in der Ordinatenachse. β) Wenn $ab'=a'b$, so ist $y'=0$, d. i. der Durchschnittspunkt liegt in der Abscissenachse. γ) Wenn $a=a'$, so ist $x'=\infty$ und $y'=\infty$, d. i. der Durchschnittspunkt liegt in keiner endlichen Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten, und in der That bilden, wenn $a=a'$, beide Gerade mit der Abscissenachse denselben Winkel (Aufg. 5.) und sind also parallel. δ) Wenn irgend zwei von diesen drei Relationen zu gleicher Zeit statt finden, so ist $a=a'$ und $b=b'$; alsdann sind aber beide Gleichungen identisch, d. i. die beiden Ge-

§. 6. raden liegen auf einander, ein jeder Punkt in der einen ist zugleich ein Punkt der andern, und die Ausdrücke (1) werden $\frac{0}{0}$.

II. Bezeichnet man die Winkel, welche die beiden gegebenen Geraden mit der Abscissenachse bilden, durch β und β', und denjenigen, welchen sie mit einander machen, durch δ, so hat man $\delta = \beta' - \beta$ und nach (§. 4. G. 6.) $a = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$ und $a' = \frac{\sin\beta'}{\sin(\alpha-\beta')}$. Aus den letzten Gleichungen findet man $tg\,\beta = \frac{a\sin\alpha}{1+a\cos\alpha}$, $tg\,\beta' = \frac{a'\sin\alpha}{1+a'\cos\alpha}$ und diese Werthe, in $tang\,\delta = \frac{tg\,\beta - tg\,\beta'}{1+tg\,\beta\,.\,tg\,\beta'}$ substituirt, geben

$$tang\,\delta = \frac{(a'-a)\sin\alpha}{1+(a+a')\cos\alpha+aa'}\,. \qquad (2)$$

Wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, wenn also $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so ist

$$tang\,\delta = \frac{a'-a}{1+aa'}\,. \qquad (2')$$

Aufgabe [9]. Die Gleichung einer Geraden und die Coordinaten eines Punktes sind gegeben. Man soll die Gleichung der Geraden finden, welche durch den gegebenen Punkt geht, und auf jener Linie senkrecht ist.

Es sey $y = ax + b$ die Gleichung der gegebenen Geraden, und es seyen $x'y'$ die Coordinaten des gegebenen Punktes. Wenn nun

$$y = a'x + b'$$

die gesuchte Gleichung seyn soll, so muß sie, wenn man x' und y' für x und y setzt, befriedigt werden, weil der Punkt $x'y'$ in der gesuchten Linie liegen soll. Subtrahirt man, um b zu eliminiren, $y' = a'x' + b'$ von $y = a'x + b$, so kommt

$$y - y' = a'(x - x').$$

Die Gerade, welche durch diese Gleichung ausgedrückt wird, bildet aber mit der gegebenen einen Winkel δ, der zufolge der vorigen Aufgabe durch

$$tang\,\delta = \frac{(a'-a)\sin\alpha}{1+(a+a')\cos\alpha+aa'}$$

gegeben wird, und da dieser ein rechter seyn soll, so hat man

$$1+(a+a')\cos\alpha+aa'=0,$$ §. 6.

woraus $a'=-\frac{1+a\cos\alpha}{a+\cos\alpha}$. Also ist die gesuchte Gleichung

$$y-y'=-\frac{1+a\cos\alpha}{a+\cos\alpha}(x-x'). \qquad (3)$$

Für rechtwinklige Coordinaten, wo $\alpha=\frac{\pi}{2}$, hat man statt dieser Gleichung die folgende:

$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x'). \qquad (4)$$

Aufgabe [10]. Die Länge des Perpendikels, welcher vom Anfangspunkte der Coordinaten auf eine Gerade gefällt ist, und der Winkel, welchen er mit der Abscissenachse bildet, sind gegeben; man soll die Gleichung jener Geraden finden.

Es sey der gegebene Perpendikel $=p$, und der gegebene Winkel $=\beta$. Diese beiden Größen kann man als die Polarcoordinaten des Endpunktes des Perpendikels ansehen. Die rechtwinkeligen Coordinaten dieses Punktes sind daher (§. 3. F. 10.) $x'=p\cos\beta$ und $y'=p\sin\beta$, während die Gleichung des Perpendikels in rechtwinkligen Coordinaten (§. 4. Aufg. 5.)

$$y=\mathit{tang}\,\beta.x$$

ist. Hieraus findet man für die gesuchte Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten, nach der vorigen Aufgabe,

$$y-y'=-\frac{1}{\mathit{tg}\,\beta}(x-x')$$

oder, wenn man für x' und y' die angegebenen Werthe und für $\mathit{tang}\,\beta$ $\sin\beta:\cos\beta$ setzt

$$\sin\beta.y+\cos\beta.x=p. \qquad (5)$$

§. 7.

Aufgabe [11]. Die Gleichung einer Geraden in rechtwinkligen Coordinaten ist gegeben; man soll den Ort des Punktes finden, der von dieser Linie eine gegebene Entfernung hat.

Es sey $y=ax+b$ die Gleichung der gegebenen Geraden in rechtwinkeligen Coordinaten und p die gegebene Entfernung. Bezeichnet man die Coordinaten des gesuchten Punktes durch $x'y'$, so ist die Gleichung der auf

§. 7. der gegebenen Linie senkrechten und durch diesen Punkt gehenden Geraden (Aufg. 9. S. 4.)

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

Da nun die Coordinaten des Durchschnittspunktes, $x''y''$, dieser Geraden und der gegebenen beide Gleichungen befriedigen müssen (§. 6.), so hat man:

$$y'' = ax'' + b \quad \text{und} \quad y'' - y' = -\frac{1}{a}(x'' - x');$$

und da ferner die Entfernung der Punkte $x'y'$ und $x''y''$ gegeben ist, so hat man auch (§. 2.)

$$\pm\sqrt{(y'' - y')^2 + (x'' - x')^2} = p.$$

Eliminirt man zwischen diesen drei Gleichungen die Größen x'' und y'', so kommt

$$y' = ax' + b \pm p\sqrt{1 + a^2}, \qquad (1)$$

welches die Gleichung des gesuchten Ortes ist. Diese Doppelgleichung gehört zu zwei Geraden, von denen

die eine durch $y' = ax' + b + p\sqrt{1 + a^2}$, (2)

und die andere durch $y' = ax' + b - p\sqrt{1 + a^2}$ (3)

ausgedrückt wird. Diese beide Geraden (2 u. 3.) machen mit der Abscissenachse denselben Winkel, dessen trigonometrische Tangente gleich a ist (§. 4.); sie sind daher der gegebenen Linie und einander parallel. Die erste dieser Geraden schneidet von der Ordinatenachse ein Stück gleich $b + p\sqrt{1 + a^2}$, und die zweite ein Stück gleich $b - p\sqrt{1 + a^2}$ ab, während die gegebene Gerade von derselben Achse ein Stück gleich b abschneidet (§. 4.). Es liegt also, von der gegebenen Linie an gerechnet, jene erste Linie nach der Seite der positiven und die zweite nach der Seite der negativen Ordinaten hin.

Aufgabe [12]. Die Gleichung einer Geraden und die Coordinaten eines Punktes sind gegeben; man soll die Entfernung des Punktes von der Geraden finden.

Es sey $y = ax + b$ die gegebene Gleichung der Geraden in rechtwinkligen Coordinaten und $x'y'$ seyen die gegebenen Coordinaten des Punktes. Alsdann findet man dieselben Gleichungen zwischen x', y', x'', y'' und der jetzt unbekannten Entfernung p, wie in der vorigen Aufgabe, und durch Elimination von x'' und y'' erhält man

$p =$

$$p = \pm\frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1+a^2}}. \qquad (4)$$ §. 7.

Dieser Ausdruck muß mit dem Zeichen + genommen werden, wenn der Punkt x'y', von der gegebenen Geraden an gerechnet, nach der Seite der positiven und mit dem Zeichen —, wenn er nach der Seite der negativen Ordinaten hin liegt, was aus der Lösung der vorigen Aufgabe folgt.

Hat die Gleichung der gegebenen Geraden die Form

$$ay + bx + c = 0, \qquad (5)$$

so ist der Perpendikel vom Punkte x'y' auf diese Linie

$$p = \pm\frac{ay' + bx' + c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (6)$$

§. 8.

Die Lösung vieler Aufgaben kann oft durch eine schickliche Wahl der Coordinatenachsen erleichtert werden, wie dies bei der folgenden der Fall ist.

Aufgabe [13]. Auf einem gegebenen Dreiecke ABC bewegt sich eine Gerade DE so, daß sie fortwährend einer Seite BC parallel ist. Von den Endpunkten B und C dieser Seite sind nach den auf AC und AB fortrückenden Durchschnittspunkten G und F gerade Linien gezogen; es soll der Ort ihres Durchschnitts O gefunden werden. Fig. 8.

Nehmen wir AC und AB zu Coordinatenachsen, und setzen AC=a und AB=b, so ist die Gleichung der Geraden BC (§. 4. S. 14.)

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1,$$

und wenn AG=x' und AF=y' gesetzt wird, die Gleichung von DE

$$\frac{y}{y'} + \frac{x}{x'} = 1.$$

Diese beide Geraden sollen nach der Voraussetzung parallel laufen, daher muß

$$\frac{y'}{x'} = \frac{b}{a}$$

seyn. Nun sind aber die Gleichungen der Geraden CF und BG respective

$$\frac{y}{y'} + \frac{x}{a} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{y}{b} + \frac{x}{x'} = 1,$$

§. 8. und die Werthe von x und y, welche diese beide Gleichungen zugleich befriedigen, sind die Coordinaten des Durchschnitts O, ausgedrückt durch x' und y'. Eliminirt man also diese beiden Größen zwischen den drei zuletzt angegebenen Gleichungen, so erhält man die Gleichung des gesuchten Ortes. Um diese Elimination zu bewirken, subtrahire man die letzte Gleichung von der vorletzten, so kommt

$$y\left(\frac{1}{y'}-\frac{1}{b}\right)+x\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x'}\right)=0,$$

und wenn man hierin für y' den Werth $\frac{bx'}{a}$ aus der obigen Gleichung setzt und sodann durch den Factor $\frac{a}{x'}-1$ dividirt,

$$\frac{y}{b}=\frac{x}{a}.$$

Der gesuchte Ort ist demnach eine gerade Linie, deren Gleichung augenscheinlich sowohl durch $x=0$ und $y=0$ als durch $x=\frac{1}{2}a$ und $y=\frac{1}{2}b$ befriedigt wird, und die daher durch den Anfangspunkt der Coordinaten A, und durch den Halbirungspunkt von BC geht (§. 5. S. 6.).

Setzt man $x'=\frac{1}{2}a$, so ist, in Folge der Gleichung $\frac{y'}{x'}=\frac{b}{a}$, $y'=\frac{1}{2}b$, und die Gleichungen der Linien CF und BG sind dann

$$\frac{2y}{b}+\frac{x}{a}=1 \quad ; \quad \frac{y}{b}+\frac{2x}{a}=1.$$

Die Coordinaten des Durchschnittpunktes O, die man aus diesen Gleichungen findet, sind also

$$y=\tfrac{1}{3}b \text{ und } x=\tfrac{1}{3}a,$$

woraus sich der bekannte Satz ergiebt: Die Verbindungslinien der Ecken und Halbirungspunkte der gegenüberstehenden Seiten eines Dreiecks theilen einander in dem Verhältniß von 1:2.

Nicht nur diese Verbindungslinien, sondern auch die drei Senkrechten, welche von den Ecken eines Dreiecks auf die gegenüberstehende Seiten gefällt werden, haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, und dasselbe findet Statt bei den Senkrechten, welche auf den Seiten in ihren Halbirungspunkten errichtet werden, was wir als bekannt voraussetzen. Die drei genannten Durchschnittspunkte wollen wir durch O, O' und O'' bezeichnen.

Aufgabe [14]. Es soll die gegenseitige Lage der eben genannten drei Punkte O, O′ und O″ gefunden werden. §. 8.

Nimmt man hier eine Seite AC des Dreiecks zur Abscissenachse und die Senkrechte durch die gegenüberstehende Ecke B zur Ordinatenachse, und setzt dann

für die Coordinaten von A, $x=x'$; $y=0$,
" " " " C, $x=x''$; $y=0$,
" " " " B, $x=0$; $y=y'''$,

so ist die Gleichung von AB: $\frac{y}{y'''}+\frac{x}{x'}=1$, und daher die Gleichung der Senkrechten durch C auf AB (§. 6. G. 4.)

$$y=\frac{x'}{y'''}(x-x'').$$

Setzt man darin $x=0$, so findet man $y=-\frac{x'x''}{y'''}$, und man hat daher

für die Coordinaten des Punktes O′, $x=0$; $y=-\frac{x'x''}{y'''}$.

Es ist ferner die Gleichung der Senkrechten auf AC in ihrem Halbirungspunkte: $x=\frac{x'+x''}{2}$, und die Gleichung der Senkrechten auf AB in ihrem Halbirungspunkte: $2y-y'''=\frac{x'}{y'''}(2x-x')$, woraus sich ergeben

für die Coordinaten des Punktes O″, $x=\frac{x'+x''}{2}$; $y=\frac{y'''^2+x'x''}{2y'''}$.

Endlich sind die Gleichungen der, von A nach dem Halbirungspunkte von BC und von C nach dem Halbirungspunkte von AB gezogenen, Geraden

$$y=\frac{y'''}{x''-2x'}(x-x') \text{ und } y=\frac{y'''}{x'-2x''}(x-x''),$$

woraus sich ergeben

für die Coordinaten des Punktes O, $x=\frac{x'+x''}{3}$; $y=\frac{y'''}{3}$.

Legt man nun durch O und O″ eine Gerade, so ist ihre Gleichung

$$y-\tfrac{1}{3}y'''=\frac{y'''^2+3x'x''}{(x'+x'')y'''}\left(x-\frac{x'+x''}{3}\right).$$

Es ist aber leicht einzusehen, daß diese Linie durch den Punkt O′ geht; denn

§. 8. setzt man $x=0$, welches die Abscisse des Punktes O', so giebt die letzte Gleichung $y=-\frac{x'x''}{y'''}$, welches die Ordinate des Punktes O' ist. Die Punkte O, O' und O'' sind also in gerader Linie, und da ihre Abscissen beziehungsweise $\frac{x'+x''}{3}$, 0 und $\frac{x'+x''}{2}$ sind, so liegt O immer zwischen O' und O'', und zwar ist $OO'=2OO''$.

Fig. 9. Wenn in einem Viereck ABCD die gegenüberstehenden Seiten bis zu ihren Durchschnitten verlängert werden, so heißt die dadurch entstehende Figur ABCEFD ein vollständiges Viereck (quadrilatère complet), und die drei Geraden AC, BD und EF werden die Diagonalen des Vierecks genannt.

Lehrsatz [1]. Die Halbirungspunkte M, N und P der Diagonalen eines vollständigen Vierecks ABCDEF liegen in gerader Linie.

Man nehme die Geraden AF und AE zu Coordinatenachsen, und es sey $AD=x'$, $AF=x''$, $AB=y'$ und $AE=y''$. Dann ist

die Gleichung der Geraden DE: $\frac{y}{y''}+\frac{x}{x'}=1$,

die Gleichung der Geraden BF: $\frac{y}{y'}+\frac{x}{x''}=1$.

Daraus findet man für die Coordinaten des Durchschnittspunkts C (§. 6. Aufg. 8.)

$$x=\frac{x'x''(y''-y')}{x''y''-x'y'} \quad \text{und} \quad y=\frac{y'y''(x''-x')}{x''y''-x'y'};$$

folglich ist (§. 5. Aufg. 7.)

für den Halbirungspunkt M, $x=\frac{x'x''(y''-y')}{2(x''y''-x'y')}$ und $y=\frac{y'y''(x''-x')}{2(x''y''-x'y')}$,

und ferner ist

für den Halbirungspunkt N, $x=\frac{1}{2}x'$ und $y=\frac{1}{2}y'$,
für den Halbirungspunkt P, $x=\frac{1}{2}x''$ und $y=\frac{1}{2}y''$.

Hieraus findet man (§. 4. Aufg. 6.) für die Gerade MN die Gleichung

$$2y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(2x-x').$$

Da nun diese Gleichung von den Coordinaten des Punktes P befriedigt wird, so liegt der Punkt P in der Geraden MN. §. 8.

Lehrsatz [2]. Zieht man durch drei in gerader Linie liegende Punkte A, B, C drei beliebige Gerade AB', BC' und CA', die sich in drei Punkten A', B', C' schneiden, und verbindet zwei der gegebenen, B und C von neuem mit zwei von diesen Durchschnittspunkten durch zwei Gerade BB' und CC'; so geht die Verbindungslinie des dritten Durchschnittspunktes A' und des Durchschnitts O von BB' und CC' durch einen bestimmten Punkt P der Geraden ABC, wie auch die drei von A, B und C ausgehenden Geraden gezogen seyn mögen. Fig. 10.

Man nehme die Gerade AC zur Abscissenachse und eine der drei beliebig gezogenen Geraden, z. B. AB', zur Ordinatenachse. Bezeichnet man nun die Abscissen von B und C durch x' und x'', und die Ordinaten von B' und C' durch y' und y'', so ist die Gleichung von:

$$BB' \ldots \frac{y}{y'}+\frac{x}{x'}=1 \; ; \; CC' \ldots \frac{y}{y''}+\frac{x}{x''}=1 \; ;$$

$$CB' \ldots \frac{y}{y'}+\frac{x}{x''}=1 \; ; \; BC' \ldots \frac{y}{y''}+\frac{x}{x'}=1 \; .$$

Die Summe der ersten und zweiten Gleichung ist nun eben sowohl als die Summe der dritten und vierten:

$$\left(\frac{1}{y'}+\frac{1}{y''}\right)y+\left(\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}\right)x=2 \; .$$

Da aber die Coordinaten des Durchschnittspunktes von BB' und CC' die beiden ersten der obigen vier Gleichungen und folglich auch ihre Summe befriedigen müssen; da ferner die Coordinaten des Durchschnitts von CB' und BC' den beiden letzten jener vier Gleichungen und folglich auch ihrer Summe Genüge leisten müssen; so wird die fünfte Gleichung sowohl von den Coordinaten des Punktes O, als von denen des Punktes A' befriedigt werden, und somit die Gleichung der Geraden seyn, welche durch diese beiden Punkte geht. Setzt man in diese Gleichung $y=0$, so kommt für die Abscisse des Punktes P

$$x=\frac{2x'x''}{x'+x''} \; ,$$

ein Ausdruck, der von den Coordinaten der Punkte B' und C' und von dem Coordinatenwinkel unabhängig ist, oder, mit andern Worten, welcher der-

§. 8. selbe bleibt, wie man auch die drei Geraden AB', BC' und CA' gezogen haben mag *).

Fig. 10. **Aufgabe [15].** Zwei gerade Linien BC und B'C', und ein Punkt A' sind der Lage nach gegeben; durch diesen Punkt sind zwei beliebige Gerade A'B und A'C gezogen, und die Durchschnitte B, C, B', C', welche dadurch entstehen, sind durch zwei andere gerade Linien BB' und CC' verbunden. Es soll der Ort des Durchschnitts O der zuletzt genannten Geraden gefunden werden.

Nimmt man die gegebenen Geraden zu Coordinatenachsen, und nennt die unveränderlichen Coordinaten des Punktes A' in Beziehung auf diese Achsen x_1, y_1, die veränderlichen Abscissen von B und C, x' und x'' und die veränderlichen Ordinaten von B' und C', y' und y'', so ist die Gleichung

$$\text{von } BC' \ldots . \frac{y}{y''} + \frac{x}{x'} = 1 \; ; \; \text{von } B'C \ldots . \frac{y}{y'} + \frac{x}{x''} = 1 .$$

Da aber beide Linien durch den Punkt A' gehen sollen, so müssen die Coordinaten dieses Punktes beide Gleichungen befriedigen. Man hat also

$$\frac{y_1}{y''} + \frac{x_1}{x'} = 1 \quad (1) \quad ; \quad \frac{y_1}{y'} + \frac{x_1}{x''} = 1 , \qquad (2)$$

zwei Gleichungen, welche die Bedingung ausdrücken, daß B u. C', und B' u. C mit A' in gerader Linie liegen. Es ist ferner die Gleichung

$$\text{von } CC' \ldots . \frac{y}{y''} + \frac{x}{x''} = 1 \quad (3) \quad ; \quad \text{von } BB' \ldots . \frac{y}{y'} + \frac{x}{x'} = 1 . \qquad (4)$$

Soll nun der Durchschnitt O dieser letztern Linien einen geometrischen Ort haben, so muß es möglich seyn, zwischen den letzten vier Gleichungen die vier Größen x', x'', y' und y'' zu eliminiren. Und dies ist wirklich der Fall; zieht man nämlich (2) von (1) und (4) von (3) ab, so kommt

$$\left(\frac{1}{y''} - \frac{1}{y'}\right) y_1 + \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right) x_1 = 0 ,$$

$$\left(\frac{1}{y''} - \frac{1}{y'}\right) y - \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right) x = 0 ;$$

---

*) Aus dem Ausdrucke für x findet man $x'x + x''x = 2x'x''$ oder $x'(x'' - x) = x''(x - x')$, woraus man die Proportion $x'' : x' = x'' - x : x - x'$, oder in Beziehung auf die 10te Figur, $AC : AB = PC : PB$ erhält. Diese Theilung einer Linie AC in B und P nannten die älteren Mathematiker die harmonische Theilung.

und wenn man zwiſchen dieſen Gleichungen $\left(\frac{1}{y''}-\frac{1}{y'}\right)$ eliminirt, ſo geht §. 8.
$\left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right)$ von ſelbſt fort, und man erhält

$$\frac{y}{y_1}+\frac{x}{x_1}=0$$

für die Gleichung des geſuchten Ortes, welcher alſo eine Gerade iſt, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. i. durch den Punkt A, und durch einen Punkt geht, deſſen Coordinaten y_1 und $-x_1$ ſind.

Die gefundene Gleichung, auf die Form $y=-\frac{y_1}{x_1}x$ gebracht, zeigt, daß der Ort des Punktes O derſelbe bleibt, wenn ſich die Lage des Punktes A' ändert, ſo aber, daß der Quotient $\frac{y_1}{x_1}$ dadurch nicht geändert wird, oder was daſſelbe iſt, wenn $\frac{y_1}{x_1}=c$, alſo $y_1=cx_1$, d. i. wenn der Punkt A' auf einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Geraden AA' fortrückt. Daraus ergiebt ſich alſo der Satz: Nimmt man auf einer jeden von drei geraden Linien AA', AB' und AC, die ſich in demſelben Punkte A ſchneiden, einen Punkt A', B' und B beliebig an, welche die drei Verbindungslinien A'B', B'B und A'B geben, und verlängert, wenn es nöthig iſt, zwei von ihnen, bis ſie zwei der gegebenen in C und C' ſchneiden, ſo liegt der Durchſchnitt O von CC' und der dritten Linie BB' in einer Geraden, die durch den gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkt A geht, wie auch die Punkte A', B' und B angenommen ſeyn mögen.

Dieſer Satz und der Lehrſatz (2) ſtehen in einer gewiſſen Beziehung zu einander, die bald näher betrachtet werden ſoll.

§. 9.

Aufgabe [16]. Es ſind die Gleichungen zweier Geraden gegeben; man ſoll den Ort des Punktes P finden, deſſen Entfernungen von beiden gegebenen Geraden ein gegebenes Verhältniß hat.

Es ſeyen $y=ax+b$ und $y=a'x+b'$ die Gleichungen der beiden Geraden in rechtwinkligen Coordinaten, und $1:n$ das gegebene Verhältniß.

§. 9. Die Entfernungen eines Punktes P, deſſen Coordinaten x'y' ſeyn mögen, von dieſen Linien ſind (§. 7. F. 4.)

$$\pm \frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}} \quad \text{und} \quad \pm \frac{y'-a'x'-b'}{\sqrt{1+a'^2}};$$

und weil dieſe Entfernungen in dem Verhältniß von 1 : n ſtehen ſollen, ſo muß

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(y-ax-b) = \pm\frac{n}{\sqrt{1+a'^2}}(y-a'x-b') \qquad (1)$$

ſeyn, wenn wir die Accente, die jetzt nicht mehr nöthig ſind, weglaſſen; und dies iſt die Gleichung des geſuchten Ortes. Dieſe Doppelgleichung entſpricht aber zweien Geraden, von denen die eine durch

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(y-ax-b) = \frac{n}{\sqrt{1+a'^2}}(y-a'x-b'), \qquad (2)$$

die andere durch

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(y-ax-b) = -\frac{n}{\sqrt{1+a'^2}}(y-a'x-b') \qquad (3)$$

ausgedrückt wird.

Es bleibt noch übrig, die Conſtruction dieſer beiden Geraden aufzufinden. Zu dem Ende bemerke man, daß diejenigen Werthe von x und y, welche zu gleicher Zeit die Gleichungen

$$y-ax-b=0 \quad \text{und} \quad y-a'x-b'=0$$

befriedigen, auch den beiden gefundenen Gleichungen (2) und (3) genugthun werden. Dieſe Werthe ſind aber die Coordinaten des Durchſchnittspunktes der gegebenen Geraden, folglich gehen die beiden Geraden, welche den geſuchten Ort bilden, durch den Durchſchnitt der gegebenen. Wir bemerken ferner, daß auch diejenigen Werthe von x und y, welche zugleich

$$y-ax-b = p\sqrt{1+a^2} \quad (4) \quad \text{und} \quad y-a'x-b' = \frac{p}{n}\sqrt{1+a'^2} \quad (5)$$

befriedigen, der Gleichung (2), und diejenigen, welche gleichzeitig

$$y-ax-b = p\sqrt{1+a^2} \quad (4) \quad \text{und} \quad y-a'x-b' = -\frac{p}{n}\sqrt{1+a'^2} \quad (6)$$

befriedigen, der Gleichung (3) genugthun, wo p die Länge einer beliebigen Linie bezeichnet. Die Gleichungen (4) drücken eine Gerade aus, welche der

ersten gegebenen Linie in der Entfernung p, und (5) u. (6) sind die Gleichungen zweier Geraden, welche der zweiten gegebenen Linie auf beiden Seiten in der Entfernung $\frac{p}{n}$ parallel sind (§. 7. Aufg. 11.). Die Linie (2) geht durch den Durchschnitt von (4) und (5) und die Linie (3) durch den von (4) und (6). Da nun auf diese Weise zwei Punkte der beiden Geraden (2) und (3) geometrisch bestimmt worden, so sind diese Linien als construirt zu betrachten. §. 9.

Wenn $n = 1$ ist, sind die Entfernungen des Punktes P von den beiden gegebenen Geraden einander gleich. Die geraden Linien, in welchen der Punkt P liegt, bilden dann offenbar gleiche Winkel mit den gegebenen Geraden, oder, mit andern Worten, sie halbiren die Winkel, welche die gegebenen Linien bilden. Die Gleichungen (2) und (3) gehen für diesen Fall in

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(y-ax-b) = \frac{1}{\sqrt{1+a'^2}}(y-a'x-b') \quad , \qquad (7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(y-ax-b) = -\frac{1}{\sqrt{1+a'^2}}(y-a'x-b') \qquad (8)$$

über. Bringt man diese letzten Gleichungen auf die Form $y = Ax + B$ und multiplicirt die beiden für A sich ergebenden Ausdrücke mit einander, so kommt zum Producte -1; daher stehen die Geraden (7) und (8), welche die Winkel zwischen den gegebenen Linien halbiren, senkrecht auf einander (§. 6. Aufg. 9.).

Es seyen:

$$y + ax + b = 0 \quad ; \quad y + a'x + b' = 0 \quad ;$$
$$y + mx + n = 0 \quad ; \quad y + m'x + n' = 0$$

die gegebenen Gleichungen von vier Geraden. Um die Gleichung derjenigen graden Linie zu finden, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden ersten und durch den der beiden letzten geht, kann man die Coordinaten dieser beiden Durchschnittspunkte, nach §. 6. (Aufg. 8.) bestimmen, und dann die Gleichung der gesuchten Linie nach §. 4. (Aufg. 6.) bilden. Es läßt sich aber auch folgendes Verfahren hier anwenden.

Man multiplicire die zweite und vierte der gegebenen Gleichungen mit zwei unbestimmten Factoren λ und λ', und addire die Producte respective zu der ersten und dritten Gleichung, so kommt

§. 9.
$$(y+ax+b)+\lambda(y+a'x+b')=0\,;$$
$$(y+mx+n)+\lambda'(y+m'x+n')=0\,.$$

Diese beiden Gleichungen drücken, da sie vom ersten Grade sind, zwei gerade Linien aus, von denen die erste den Durchschnittspunkt der beiden ersten gegebenen Geraden enthält, weil ihre Gleichung von denjenigen Werthen von x und y, welche $y+ax+b=0$ und $y+a'x+b'=0$ zu gleicher Zeit befriedigen, verificirt wird, und von denen die zweite durch den Durchschnitt der beiden letzten gegebenen Geraden geht, weil ihrer Gleichung durch diejenigen Werthe von x und y, welche $y+mx+n=0$ und $y+m'x+n'=0$ gleichzeitig befriedigen, genügt wird. Sollen nun diese beiden geraden Linien in eine zusammenfallen, so müssen ihre Gleichungen identisch seyn, d. i.

$$y+\frac{a+\lambda a'}{1+\lambda}x+\frac{b+\lambda b'}{1+\lambda}\equiv y+\frac{m+\lambda' m'}{1+\lambda}x+\frac{n+\lambda' n'}{1+\lambda'},$$

wo das Zeichen ($\equiv$) die Identität der beiden Ausdrücke, zwischen denen es steht, anzeigt. Hieraus folgt:

$$\frac{a+\lambda a'}{1+\lambda}=\frac{m+\lambda' m'}{1+\lambda'}\quad\text{und}\quad\frac{b+\lambda b'}{1+\lambda}=\frac{n+\lambda' n'}{1+\lambda'},$$

zwei Gleichungen, die hinreichen, um λ und λ' zu bestimmen. Diese Bestimmung aber ist immer möglich, wie man sich durch die Entwickelung der beiden Gleichungen leicht überzeugen kann. Setzt man die sich ergebenden Werthe in die vorher gebildeten Gleichungen, so erhält man offenbar eine und dieselbe Gleichung, welche auch die verlangte ist.

Ueberhaupt drückt die Summe oder Differenz zweier Gleichungen vom ersten Grade, es mag nun eine jede von ihnen vor der Addition mit einem constanten Factor multiplicirt worden seyn oder nicht, eine gerade Linie aus, die durch den Durchschnitt derjenigen beiden Geraden geht, deren Gleichungen die Summanden sind. Die Bestimmung dieser Factoren ist in vielen Fällen gar nicht nöthig, wie dies bei dem folgenden Beweise des im vorigen §. erwähnten Satzes, dem wir nur eine etwas veränderte Form geben, der Fall ist.

Fig. 10. Lehrsatz [3]. Wenn zwei feste gerade Linien AB, AB' gegeben sind, und man durch einen Punkt A' zwei beliebige Gerade A'B, A'B' zieht und die Durchschnittspunkte B, B' und C, C' durch Gerade verbindet, so ist der Ort des Durchschnitts O dieser Verbindungslinien eine

gerade Linie, die durch den Punkt A geht, wie auch der Punkt A' auf der Verbindungslinie AA' angenommen werden mag. §. 9.

Bezeichnet man die Gleichungen von AB und AB' durch $u=0$ und $u'=0$; ferner die von A'B und A'B' durch $v=0$ und $v'=0$, so wie die Gleichung von AA' durch $w=0$; so ist sowohl

$$\lambda u+\lambda' u'=0 \quad \text{als} \quad \mu v+\mu' v'=0$$

die Gleichung von AA', wenn man λ, λ', μ und μ' so bestimmt sich denkt, daß

$$\lambda u+\lambda' u'\equiv w \quad \text{und} \quad \mu v+\mu' v'\equiv w,$$

woraus

$$\lambda u+\lambda' u'\equiv \mu v+\mu' v'$$

folgt. Hieraus ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\lambda u-\mu v\equiv \mu' v'-\lambda' u' \quad \text{und} \quad \mu v-\lambda' u'\equiv \lambda u-\mu' v'.$$

Die Gleichung $\lambda u-\mu v=0$ drückt nun, nach dem Obigen, eine Gerade aus, die durch den Punkt B geht, und weil sie der Gleichung $\mu' v'-\lambda' u'=0$ identisch ist, so drückt sie auch eine Gerade aus, die durch den Punkt B' geht. Es ist also

$$\lambda u-\mu v=0 \quad \text{die Gleichung von BB',}$$

und aus ganz ähnlichen Gründen

$$\mu v-\lambda' u'=0, \quad \text{die Gleichung von CC'.}$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so kommt

$$(\lambda u-\mu v)+(\mu v-\lambda' u')=0 \quad \text{oder} \quad \lambda u-\lambda' u'=0,$$

die Gleichung einer Geraden, welche durch den Durchschnitt O gehen muß. Diese Gerade aber, weil ihre Gleichung von den Coordinaten des Durchschnitts der Geraden $u=0$ und $u'=0$ befriedigt wird, geht auch durch den Punkt A. Der Punkt O liegt also immer in einer durch den Punkt A gehenden Geraden, die, wie man sieht, von den beiden Linien $v=0$ und $v'=0$ unabhängig ist, das heißt, welche dieselbe bleibt, wie auch der Punkt A' auf $w=0$ angenommen seyn mag.

Aufgabe [17]. Es sind n feste in gerader Linie liegende Punkte, $p_1, p_2 \ldots p_n$, gegeben. Durch einen jeden dieser Punkte ist eine Gerade $l_1, l_2 \ldots l_n$ gezogen, so daß die Durchschnittspunkte der ersten und zweiten, zweiten und dritten .... letzten und ersten, die wir durch $q_1, q_2 \ldots q_n$ bezeichnen, mit Ausnahme von zweien, der Punkte q_h und q_k,

§. 9. auf gegebenen Geraden $L_1, L_2 .. L_{h-1}, L_{h+1} .. L_{k-1}, L_{k+1} ... L_n$ liegen. Es ist ferner der Ort des Punktes q_k gegeben; man soll den Ort des Punktes q_h finden.

Man nehme die Verbindungslinie der Punkte $p_1 p_2 .... p_n$ zur Ordinatenachse, und es seyen $y_1, y_2 .... y_n$ die Ordinaten dieser Punkte, ferner

$$y + a_1 x + b_1 = 0 \; ; \; y + a_2 x + b_2 = 0 \; ; \; .... y + a_n x + b_n = 0$$

die $(n-2)$ Gleichungen der Geraden $L_1, L_2 ... L_{h-1}, L_{h+1} .. L_{k-1}, L_{k+1} ... L_n$. Nun sind die n Gleichungen der Geraden $l_1, l_2 ... l_n$

$$y - y_1 + m_1 x = 0 \; ; \; y - y_2 + m_2 x = 0 \; ; \; .... y - y_n + m_n x = 0 \; ;$$

wo $m_1, m_2 .... m_n$ bis jetzt noch unbestimmte Größen sind. Von diesen Linien sollen sich $n-2$ auf den gegebenen Geraden L schneiden, und um dies auszudrücken, addiren wir die Gleichungen von je zwei Linien, die sich auf den gegebenen schneiden sollen, nachdem wir eine jede zweite mit einem noch unbestimmten Factor λ multiplicirt haben, und setzen diese Summen den Gleichungen der Geraden L identisch. Dies giebt $(n-2)$ Gleichungen:

$$y + \frac{m_1 + \lambda_2 m_2}{1 + \lambda_2} x - \frac{y_1 + \lambda_2 y_2}{1 + \lambda_2} \equiv y + a_1 x + b_1$$

$$y + \frac{m_2 + \lambda_3 m_3}{1 + \lambda_3} x - \frac{y_2 + \lambda_3 y_3}{1 + \lambda_3} \equiv y + a_2 x + b_2$$

u. s. w.,

woraus sich die Gleichungen

$$m_1 + \lambda_2 m_2 = a_1 (1 + \lambda_2) \; ; \; y_1 + \lambda_2 y_2 + b_1 (1 + \lambda_2) = 0$$
$$m_2 + \lambda_3 m_3 = a_2 (1 + \lambda_3) \; ; \; y_2 + \lambda_3 y_3 + b_2 (1 + \lambda_3) = 0$$
u. s. w.

ergeben. Durch Elimination von $\lambda_2, \lambda_3 .... \lambda_n, \lambda_1$ erhält man hieraus

$$(y_2 + b_1) m_1 - (y_1 + b_1) m_2 + a_1 (y_1 - y_2) = 0$$
$$(y_3 + b_2) m_2 - (y_2 + b_2) m_3 + a_2 (y_2 - y_3) = 0$$
$$\vdots$$
$$(y_h + b_{h-1}) m_{h-1} - (y_{h-1} + b_{h-1}) m_h + a_{h-1} (y_{h-1} - y_h) = 0$$
$$(y_{h+2} + b_{h+1}) m_{h+1} - (y_{h+1} + b_{h+1}) m_{h+2} + a_{h+1} (y_{h+1} - y_{h+2}) = 0$$
$$\vdots$$
$$(y_k + b_{k-1}) m_{k-1} - (y_{k-1} + b_{k-1}) m_k + a_{k-1} (y_{k-1} - y_k) = 0$$

$$(y_{k+2}+b_{k+1})m_{k+1}-(y_{k+1}+b_{k+1})m_{k+2}+a_{k+1}(y_{k+1}-y_{k+2})=0 \qquad \text{§. 9.}$$

$$\vdots$$

$$(y_1+b_n)m_n-(y_n+b_n)m_1+a_n(y_n-y_1)=0.$$

In diesen $(n-2)$ Gleichungen kommen von den n unbekannten Größen $m_1, m_2 \ldots m_n$ nur $(n-4)$ zweimal vor, und eliminirt man diese, so ergeben sich, wie aus der Gestalt dieser Gleichungen hervorgeht, zwei Gleichungen von der Form

$$Am_k+Bm_{k+1}+C=0 \quad ; \quad Dm_k+Em_{k+1}+F=0,$$

worin A, B ... F bekannte Größen sind. Bezeichnet man die Coordinaten des Punktes q_h durch x', y' und die des Punktes q_k durch t, u, so hat man, da sich diese Punkte auf den Geraden l_h und l_{h+1}, und auf den Geraden l_k und l_{k+1} befinden sollen,

$$y'-y_h+m_hx'=0 \quad ; \quad y'-y_{k+1}+m_{k+1}x'=0 ;$$
$$u-y_k+m_kt=0 \quad ; \quad u-y_{k+1}+m_{k+1}t=0 ;$$

und, wenn man aus diesen Gleichungen $m_h, m_{h+1}, m_k, m_{k+1}$ entwickelt und die Werthe in die beiden vorher angegebenen setzt, so erhält man zwei Gleichungen, die außer den Größen x', y', t und u nur gegebene Größen enthalten, und von solch einer Form sind, daß, wenn man daraus t und u entwickelt, diese Größen, nämlich

$$u=\frac{m'y'+n'x'+p'}{my'+nx'+p} \quad \text{und} \quad t=\frac{m''y'+n''x'+p''}{my'+nx'+p} \qquad (9)$$

sind, wo m, m', m'', n, n' &c. aus gegebenen Größen zusammengesetzte Ausdrücke bedeuten.

Werden nun diese Ausdrücke, in die Gleichung des Ortes q_k, für u und t substituirt, so erhält man eine Gleichung zwischen x' und y', welche die gesuchte des Ortes von q_h ist.

Die Form der Ausdrücke (9) ist sehr beachtenswerth. Beide Ausdrücke haben nämlich denselben Nenner; dieser und die Zähler sind rationale Functionen ersten Grades von x' und y'.

Ist der gegebene Ort des Punktes q_k eine gerade Linie, so ist der gesuchte Ort des Punktes q_h ebenfalls eine Gerade. Denn setzt man in die Gleichung der gegebenen geraden Linie, welche vom ersten Grade ist, für die Coordinaten u, t die Ausdrücke (9), so erhält man wieder eine Gleichung

§. 9. vom ersten Grade in x' und y'. Dies giebt folgenden Satz: Wenn die Seiten eines Polygons sich um feste in gerader Linie liegende Punkte drehen, und die Eckpunkte desselben, mit Ausnahme eines einzigen, sich auf geraden Linien bewegen (wobei die Länge der Seiten und die Größe der Winkel des Polygons sich nothwendigerweise ändern), so beschreibt der sich frei bewegende Eckpunkt ebenfalls eine gerade Linie.

§. 10.

Aufgabe [18]. Die rechtwinkligen und schiefwinkligen Coordinaten der Eckpunkte eines Polygons, dessen Seiten sich nicht durchkreuzen, sind gegeben. Man soll den Flächeninhalt S dieses Polygons durch die gegebenen Coordinaten ausdrücken.

Fig. 11. Es sey z. B. $p_1p_2p_3p_4p_5p_1$ ein Polygon, und es seyen die Coordinaten der Eckpunkte Aq_1 u. q_1p_1, Aq_2 u. q_2p_2 u. s. w., welche auf zwei beliebige, den Winkel α einschließende, Achsen bezogen sind, der Reihe nach x_1 u. y_1, x_2 u. y_2 u. s. w. Nun ist, wie man durch die bloße Ansicht der Figur findet,

$$S = p_1p_2p_3p_4p_5p_1 = q_4p_4p_5p_1p_2q_2q_4 - q_4p_4p_3p_2q_2q_4;$$

oder auch $S = q_4p_4p_5q_5 + q_5p_5p_1q_1 + q_1p_1p_2q_2 - q_4p_4p_3q_3 - q_3p_3p_2q_2$.

Da nun aber der Inhalt der einzelnen Trapeze, nämlich

$q_4p_4p_5q_5 = \frac{1}{2}(x_5-x_4)(y_4+y_5)\sin\alpha$; $q_5p_5p_1q_1 = \frac{1}{2}(x_1-x_5)(y_5+y_1)\sin\alpha$;
$q_1p_1p_2q_2 = \frac{1}{2}(x_2-x_1)(y_1+y_2)\sin\alpha$; $q_4p_4p_3q_3 = \frac{1}{2}(x_3-x_4)(y_4+y_3)\sin\alpha$;
und $q_3p_3p_2q_2 = \frac{1}{2}(x_2-x_3)(y_3+y_2)\sin\alpha$ ist, so ergiebt sich

$$S = \frac{1}{2}\left\{(x_2y_1-x_1y_2)+(x_3y_2-x_2y_3)+(x_4y_3-x_3y_4)+(x_5y_4-x_4y_5)+(x_1y_5-x_5y_1)\right\}\sin\alpha \quad (1)$$

oder auch

$$S = \frac{1}{2}\left\{[x_2y_1+x_3y_2+x_4y_3+x_5y_4+x_1y_5]-[y_2x_1+y_3x_2+y_4x_3+y_5x_4+y_1x_5]\right\}\sin\alpha. \quad (2)$$

Das Gesetz dieses Ausdrucks fällt in die Augen, und man sieht leicht ein, daß dasselbe für ein Polygon von mehr oder weniger Seiten als das verzeichnete ebenfalls Statt finden wird. Dabei ist aber zu bemerken, daß die Coordinaten der Eckpunkte der Reihe nach numerirt werden müssen, in-

dem man sich den Perimeter des Polygons von einem Punkte durchlaufen vorstellt *). §. 10.

Uebrigens macht es keinen Unterschied, ob das Polygon ganz oder nur zum Theil auf einer Seite der Abscissen- oder Ordinatenachse liegt, oder, was dasselbe ist, ob die Coordinaten der Eckpunkte sämmtlich oder zum Theil positiv oder negativ sind. Denn wenn wir die Coordinatenachsen, auf welche die Eckpunkte eines Polygons bezogen werden, das von ihnen nicht geschnitten wird, parallel mit sich selbst und so verlegen, daß sie in ihrer neuen Lage das Polygon schneiden, so müssen wir in die Formel (1) oder (2) $x_1'+a$ für x_1, $y_1'+b$ für y_1, $x_2'+a$ für x_2 u. s. w. setzen, wodurch diese Formeln aber nicht geändert werden, indem alle Glieder, die a oder b enthalten, sich aufheben.

Wenn die Seiten eines Polygons sich kreuzen, wie in Fig. 12., finden Fig. 12.
die Formeln (1) und (2) keine Anwendung. In diesem Falle kann man die Durchschnittspunkte der Seiten nach den vorigen Aufgaben ausdrücken, und dann die einzelnen Theile des Polygons nach den in Rede stehenden Formeln berechnen.

Von der Verwandtschaft der Collineation.

§. 11.

Zwei Figuren oder Systeme von Punkten und Linien heißen gleich und ähnlich, wenn sie, gehörig auf einander gelegt, sich decken. Zwei Punkte beider Figuren, welche bei der Deckung auf einander fallen, werden einander entsprechende oder homologe Punkte genannt; der Abstand zweier Punkte der einen Figur ist daher dem Abstande der beiden ihnen entsprechenden Punkte in der anderen Figur gleich. Zwei Linien, welche nur einander entsprechende Punkte enthalten, heißen einander entsprechende oder homologe

*) Der Werth des Ausdrucks (1) oder (2) wird positiv oder negativ, je nachdem man beim Numeriren der Eckpunkte den durchlaufenden Punkt nach der einen oder nach der entgegengesetzten Richtung sich bewegen läßt. Ob aber der Flächeninhalt eines Polygons positiv oder negativ zu nehmen sey, kann im Allgemeinen eben so wenig bestimmt werden, als dies bei der gegenseitigen Entfernung zweier Punkte der Fall ist.

§. 11. Linien. — Von zwei gleichen und ähnlichen Figuren ist die eine nur eine Wiederholung der andern.

Zwei Figuren oder Systeme von Punkten und Linien heißen ähnlich, wenn die Punkte der einen Figur den Punkten der andern so entsprechen, daß der Abstand je zweier Punkte der ersten Figur n mal so groß ist, als der Abstand der beiden entsprechenden Punkte in der andern Figur, wo n irgend eine reelle und für zwei individuelle Figuren constante Zahl ist. Zwei Linien, welche nur einander entsprechende Punkte enthalten, heißen auch hier einander entsprechende oder homologe Linien.

Zwei gleiche und ähnliche und zwei bloß ähnliche Figuren haben in ihrer gegenseitigen Beziehung das mit einander gemein, daß wenn drei Punkte einer Figur in gerader Linie liegen, auch die ihnen entsprechenden Punkte der andern Figur sich in gerader Linie befinden.

Dies Alles ist aus den Elementen bekannt. Nur um Mißverständnissen vorzubeugen bemerken wir noch, daß zwei Systeme von Punkten und Linien, die zu einander in der Beziehung der Gleichheit und Aehnlichkeit, oder bloß in der Beziehung der Aehnlichkeit stehen, nicht als aus einer geschlossenen Anzahl von Punkten und Linien bestehend zu betrachten sind, sondern daß vielmehr in das eine System noch beliebig viele Punkte und Linien eingetragen werden können, wenn nur in das zweite System eine gleiche Anzahl von Punkten und Linien, die jenen entsprechen, eingetragen wird.

Zwei Figuren oder Systeme von Punkten und Linien, welche so beschaffen sind, daß jedem Punkte der einen Figur ein Punkt der andern entspricht, dergestalt, daß wenn drei Punkte der einen Figur in gerader Linie liegen, die drei ihnen entsprechenden Punkte der andern Figur ebenfalls in einer geraden Linie enthalten sind, nennen wir, nach Hrn. Möbius, collinear-verwandte oder collineare Figuren *). Da nun eine gerade Li-

*) Diese Definition, wiewohl sie Alles enthält, was das Wesen collinearer Systeme ausmacht, könnte vielleicht beim ersten Anblick zu Mißverständnissen Veranlassung geben, und deshalb wird es nicht überflüssig seyn, sie hier näher zu beleuchten. Bei einer oberflächlichen Betrachtung dieser Erklärung könnte es nämlich scheinen, daß z. B. sechs beliebige Punkte $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, von welchen, zwei mal drei, a, b, c und α, β, γ, in zwei Geraden liegen, und sechs beliebige andere Punkte $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$, von welchen ebenfalls zwei mal drei, a', b', c' und α', β', γ', in zwei Geraden enthalten, zwei collineare Systeme bilden; ferner könnte es den Anschein haben, daß je zwei Systeme, von denen

Linie durch zwei Punkte bestimmt ist, so können, nach dieser Erklärung, allen Punkten einer und derselben Geraden einer Figur nur Punkte einer und derselben Geraden der collinearen Figur entsprechen, oder, mit andern Worten, einer Geraden in einer Figur entspricht eine Gerade in der collinearen Figur. Auch sieht man leicht ein, daß einer Geraden, welche zwei Punkte in der §. 11.

---

ein jedes aus n Punkten besteht, collinear seyn müßten, wenn sich unter den n Punkten des einen und unter den n Punkten des andern Systems nicht drei in gerader Linie liegende Punkte befinden. Beides ist aber keineswegs der Fall, und zwar schon deshalb nicht, weil in der Definition, die oben gegeben worden, unter den Worten „System von Punkten" keine geschlossene Anzahl Punkte verstanden werden darf, wie vorher ausdrücklich bemerkt ist, und daß also sechs oder irgend eine andere geschlossene Anzahl Punkte keine Systeme und folglich auch keine collinearen Systeme bilden können. Sollten nun die beliebigen Punkte $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ zwar nicht collineare Systeme bilden, doch aber zu zwei collinearen Systemen gehören können, so müßte, wenn a und a', b und b' u. s. w. homologe Punkte wären, auch der Durchschnitt p der Geraden $a\alpha$ und $b\beta$ dem Durchschnitte p' der Geraden $a'\alpha'$ und $b'\beta'$ entsprechen, weil der Punkt p des einen Systems mit a und α sowohl als mit b und β in gerader Linie liegt, und folglich der ihm entsprechende Punkt im andern Systeme sowohl mit a' und α' als mit b' und β' in gerader Linie liegen muß, eine Lage, die nur der Punkt p' hat. Es müßten ferner die Durchschnitte q,r,s u. s. w. anderer Geraden, welche zwischen je zwei von den sechs Punkten a,b u. s. w. gezogen werden können, den Durchschnitten q',r',s' u. s. w. der Verbindungslinien der entsprechenden Punkte a',b' u. s. w. entsprechen. Die auf diese Weise erhaltenen Punkte p,q,r u. s. w. und p',q',r' u. s. w. würden vermittelst ihrer Verbindungslinien wieder zu neuen einander entsprechenden Punkten führen, welche ihrerseits, durch gerade Linien unter einander und mit den frühern Punkten verbunden, wiederum einander entsprechende Punkte liefern würden, und so ohne Ende fort, wobei es denn immer zutreffen müßte, daß, wenn von den gefundenen Punkten des einen Systems drei in gerader Linie liegen, die drei, ebenfalls gefundenen, ihnen entsprechenden Punkte auch in gerader Linie sich befinden. Daß dies aber bei einer willkührlichen Annahme der Punkte $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ und $a',b',c',\alpha',\beta',\gamma'$ nicht der Fall zu seyn brauche, ist leicht einzusehen; denn man kann die ersten sechs Punkte so annehmen, daß schon die zunächst sich ergebenden Punkte p,q,r in gerader Linie liegen, und die zweiten sechs Punkte kann man so wählen, daß die jenen entsprechenden Punkte p',q',r' nicht in gerader Linie sich befinden. — Es wird in der Folge gezeigt werden, daß im Allgemeinen vier Punkte eines Systems und vier ihnen entsprechende Punkte eines collinearen Systems hinreichen, um zu jedem andern Punkte des einen Systems den ihm entsprechenden Punkt des zweiten Systems zu finden.

(Daß ein System, welches einem andern collinear ist, die perspectivische Abbildung oder Centralprojection des letztern sey, kann hier eben so wenig zur Definition der Collineation benutzt werden, als die Projectionsmethode bei der Erklärung der Aehnlichkeit angewendet wird.)

§. 11. einen Figur verbindet, die Gerade, welche die ihnen entsprechenden Punkte in der andern Figur verbindet, entsprechen muß.

Es seyen nun x, y die rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten eines Punktes in dem einen Systeme, und t, u die rechtwinkligen oder schiefwinkligen, auf dieselben oder auf andere Achsen bezogenen, Coordinaten des ihm entsprechenden Punktes in einem dem ersten collinear-verwandten Systeme. Da, wenn beide Systeme gegeben sind, t sowohl als u für jeden bestimmten Werth von x und y einen bestimmten Werth, und für jeden andern Werth von x und y auch andere Werthe bekommen; so sind t und u von x und y auf eine bestimmte Weise abhängig, oder mit andern Worten, t sowohl als u ist eine Function von x und y, d. i. $t = \varphi(x,y)$ und $u = \psi(x,y)$. Nehmen wir nun an, daß die Art dieser Abhängigkeit oder, was dasselbe ist, die Form der Functionen φ und ψ bekannt wäre, so würde die Gleichung derjenigen Geraden im Systeme xy, welche der Geraden

$$gu + ht + k = 0$$

im Systeme ut entspricht, durch Substitution jener Functionen für t und u gefunden werden, und diese Gleichung würde daher seyn:

$$g\psi(x,y) + h\varphi(x,y) + k = 0.$$

Da aber diese Gleichung, was auch g, h und k seyn mögen, nur vom ersten Grade seyn darf, so wird sie die Form

$$g(m'y + n'x + p') + h(m''y + n''x + p'') + k(my + nx + p) = 0$$

haben, woraus

$$\left.\begin{aligned} u = \psi(x,y) &= \frac{m'y + n'x + p'}{my + nx + p} \\ t = \varphi(x,y) &= \frac{m''y + n''x + p''}{my + nx + p} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

sich ergiebt.

Die auf diese Weise gefundenen Ausdrücke für t und u enthalten zusammen neun constante Größen m, n, p, m' u. s. w., von welchen aber eine beliebig angenommen und z. B. gleich Eins gesetzt werden kann, was eben so viel ist, als dividirte man den Zähler und Nenner des Bruches, der diese Größe enthält, durch dieselbe. Wählt man z. B. p hierzu und läßt nun $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$, $\frac{m'}{p}$ u. s. w. durch m, n, m' u. s. w. bezeichnet seyn, so ist

$$u = \frac{m'y+n'x+p'}{my+nx+1} \; ; \; t = \frac{m''y+n''x+p''}{my+nx+1}, \qquad (2)$$ §. 11.

welche Ausdrücke noch acht Constanten enthalten. Diese Constanten können bestimmt werden, wenn von vier Punkten des einen Systems und von den vier ihnen entsprechenden Punkten des andern Systems die Coordinaten bekannt sind; denn setzt man die Werthe dieser Coordinaten nach einander in die Gleichungen (2), so erhält man acht Gleichungen, welche in Beziehung auf m, n, m' u. s. w. vom ersten Grade und zur Bestimmung dieser Grösen im Allgemeinen hinreichend sind.

Aus dem bisher Gesagten folgt, daß einer gegebenen Figur unzählig viele andere Figuren collinear seyn können; sind aber auch vier Punkte der andern Figur gegeben, welche vier bestimmten Punkten der erstern entsprechen sollen, so ist diese andere Figur völlig bestimmt.

Entwickelt man aus den Gleichungen (1) oder (2) x und y, so erhält man Ausdrücke in t und u von derselben Form, nämlich Brüche, deren Zähler und Nenner Functionen ersten Grades von t und u sind. Daraus folgt, daß die Verwandtschaft der Collineation zwischen zwei Systemen nur gegenseitig Statt finden kann.

Ein drittes System von Punkten und Linien, dessen Coordinaten r und s heißen mögen, wird dem System tu collinear-verwandt seyn, wenn

$$u = \frac{f's+g'r+h'}{fs+gr+1} \quad \text{und} \quad t = \frac{f''s+g''r+h''}{fs+gr+1}$$

ist. Daher ist auch

$$\frac{f's+g'r+h'}{fs+gr+1} = \frac{m'y+n'x+p'}{my+nx+1} \; ; \; \frac{f''s+g''r+h''}{fs+gr+1} = \frac{m''y+n''x+p''}{my+nx+1}. \qquad (3)$$

Aus diesen letzten Gleichungen (3) kann man r und s durch x und y bestimmen, und man wird durch die Entwickelung Ausdrücke von der vorher erwähnten Form finden, woraus folgt, daß das System xy dem Systeme rs collinear-verwandt ist, und im Allgemeinen, daß zwei Systeme, die mit einem dritten in der Verwandtschaft der Collineation stehen, selbst collinear-verwandt sind. Auch ist klar, daß man die Gleichungen (3) ebenfalls anwenden kann, um die Beziehungen aufzufinden, die zwischen zwei collinear-verwandten Systemen Statt finden. Setzt man zur Abkürzung A, B und C für $f's+g'r+h'$, $f''s+g''r+h''$ und $fs+gr+1$; und M, N und

§. 11. P für $m'y+n'x+p'$, $m''y+n''x+p''$ und $my+nx+1$, so hat man statt der Gleichungen (3) die folgenden:

$$\frac{A}{C} = \frac{M}{P} \; ; \; \frac{B}{C} = \frac{N}{P}, \qquad (4)$$

und diese Gleichungen enthalten 16 Constanten $f, g, f', \ldots m, n, m', \ldots$, zwischen welchen nur acht Bedingungsgleichungen existiren, wenn (was zur gegenseitigen Bestimmung zweier collinearen Figuren hinreicht) vier Paar einander entsprechender Punkte aus beiden Figuren bekannt sind. Man kann also die acht Größen m, n, m' u. s. w. beliebig und auf unzählig verschiedene Weisen annehmen, wenn man nur den acht übrigen Größen $f, g, f' \ldots$ die ihnen bei diesen Annahmen, in Folge der acht Bedingungsgleichungen, zukommenden Werthe giebt. Sind nun für irgend zwei collineare Systeme die Constanten m, n, m' u. s. w. angenommen und daraus $f, g, f' \ldots$ bestimmt, so wird einer Geraden des einen Systems, deren Gleichung

$$\lambda A+\mu B+\nu C = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda\frac{A}{C}+\mu\frac{B}{C}+\nu = 0$$

ist, die Gerade des andern Systems, deren Gleichung

$$\lambda M+\mu N+\nu P = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda\frac{M}{P}+\mu\frac{N}{P}+\nu = 0,$$

entsprechen. Setzt man, der Reihe nach, μ und ν, λ und ν, u. μ und λ gleich Null, so ergiebt sich, daß den Geraden

$$A = 0 \; ; \; B = 0 \; ; \; C = 0$$

in dem einen Systeme die Geraden

$$M = 0 \; ; \; N = 0 \; ; \; P = 0$$

in dem collinearen Systeme entsprechen.

Es seyen jetzt $x'y'$ und $x''y''$ zwei Punkte in dem einen Systeme, und $r's'$ und $r''s''$ zwei Punkte in dem collinearen Systeme, die respective jenen entsprechen; ferner seyen

a' und a''	die von den Punkten	$s'r'$ und $s''r''$	auf die Gerade $A = 0$
b' und b''	" " " "	$s'r'$ und $s''r''$	" " " $B = 0$
α' und α''	" " " "	$x'y'$ und $x''y''$	" " " $M = 0$
β' und β''	" " " "	$x'y'$ und $x''y''$	" " " $N = 0$

gefällten Perpendikel; so ist, wenn man durch A', A'', B' und B'' die Ausdrücke bezeichnet, welche durch Substitution von s', r' und s'', r'' in A und

B erhalten werden, und wenn M', M'', N' und N'' die Resultate der Substitution von x', y' und x'', y'' in M und N bezeichnen, unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, zufolge (§. 7. S. 6.), §. 11.

$$a' = \frac{A'}{\sqrt{f'^2+g'^2}} \; ; \quad a'' = \frac{A''}{\sqrt{f''^2+g'^2}} \; ;$$

$$b' = \frac{B'}{\sqrt{f''^2+g''^2}} \; ; \quad b'' = \frac{B''}{\sqrt{f''^2+g''^2}} \; ;$$

$$\alpha' = \frac{M'}{\sqrt{m''^2+n''^2}} \; ; \quad \alpha'' = \frac{M''}{\sqrt{m''^2+n''^2}} \; ;$$

$$\beta' = \frac{N'}{\sqrt{m''^2+n''^2}} \; ; \quad \beta'' = \frac{N''}{\sqrt{m''^2+n''^2}} \; .$$

Es ist aber auch, weil x'y' und r's' , x''y'' und r''s'' einander entsprechende Punkte sind, zufolge der Gleichungen (4),

$$\frac{A'}{B'} = \frac{M'}{N'} \quad \text{und} \quad \frac{A''}{B''} = \frac{M''}{N''} \; ,$$

oder, wenn man für A', A'', B' u. s. w. die Werthe aus den letzten acht Gleichungen setzt,

$$\frac{\sqrt{f'^2+g'^2}}{\sqrt{f''^2+g''^2}} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{\sqrt{m'^2+n'^2}}{\sqrt{m''^2+n''^2}} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} \; ;$$

$$\frac{\sqrt{f'^2+g'^2}}{\sqrt{f''^2+g''^2}} \cdot \frac{a''}{b''} = \frac{\sqrt{m'^2+n'^2}}{\sqrt{m''^2+n''^2}} \cdot \frac{\alpha''}{\beta''} \; .$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen eine von den Wurzelgrößen, so gehen die übrigen von selbst fort, und man erhält

$$\frac{a'}{b'} : \frac{a''}{b''} = \frac{\alpha'}{\beta'} : \frac{\alpha''}{\beta''} \; ,$$

oder auch

$$\frac{a'}{a''} : \frac{b'}{b''} = \frac{\alpha'}{\alpha''} : \frac{\beta'}{\beta''} \; .$$

Da nun aber, wie oben bemerkt worden, m, n, m' u. s. w. willkührlich angenommen werden können, so bezeichnen M = 0 und N = 0 jede zwei gerade Linien im Systeme xy, und A = 0 u. B = 0 die ihnen entsprechenden im Systeme rs. Eben deshalb bezeichnen aber auch α', α'', β' u. β'' die von zwei beliebigen Punkten auf je zwei beliebige Gerade gefällten Perpendikel, und a', a'', b' u. b'' die von den entsprechenden Punkten auf die

§. 11. entsprechenden Geraden herabgelassenen Senkrechten, und wir haben somit den

Lehrsatz [4]. Wenn man von zwei beliebigen Punkten A und B auf irgend zwei gerade Linien a und b Senkrechte fällt, deren Länge durch Aa, Ab, Ba u. Bb bezeichnet, und wenn man ferner in einem collinearen Systeme von den entsprechenden Punkten A' und B' auf die entsprechenden Geraden a' und b' Perpendikel herabläßt, deren Längen A'a', A'b', B'a' u. B'b' heißen, so ist

$$\frac{Aa}{Ab} : \frac{Ba}{Bb} = \frac{A'a'}{A'b'} : \frac{B'a'}{B'b'} \qquad (5)$$

oder

$$\frac{Aa}{Ba} : \frac{Ab}{Bb} = \frac{A'a'}{B'a'} : \frac{A'b'}{B'b'} . \qquad (6)$$

Aus diesem Lehrsatze läßt sich unmittelbar ein anderer, über das Ver-
Fig. 13. hältniß der Flächentheile zweier collinearen Figuren ableiten. Wenn nämlich A, B, C, D u. E fünf Punkte eines Systems und A', B', C', D' u. E' die entsprechenden fünf Punkte eines collinearen Systems sind, so sind CD und C'D', CE und C'E' einander entsprechende Gerade; daher hat man

$$\frac{Aa}{Ba} : \frac{Ab}{Bb} = \frac{A'a'}{B'a'} : \frac{A'b'}{B'b'} ,$$

folglich auch

$$\frac{\frac{1}{2}Aa \times CD}{\frac{1}{2}Ba \times CD} : \frac{\frac{1}{2}Ab \times CE}{\frac{1}{2}Bb \times CE} = \frac{\frac{1}{2}A'a' \times C'D'}{\frac{1}{2}B'a' \times C'D'} : \frac{\frac{1}{2}A'b' \times C'E'}{\frac{1}{2}B'b' \times C'E'} ,$$

oder, wenn man die Dreiecke der Figur einführt,

$$\frac{ACD}{BCD} : \frac{ACE}{BCE} = \frac{A'C'D'}{B'C'D'} : \frac{A'C'E'}{B'C'E'} . \qquad (7)$$

Nicht bloß die Perpendikel Aa, Ab, Ba u. s. w. stehen in der angegebenen Proportion (5 oder 6), sondern auch jede acht Gerade Aa, $A\beta$, $B\alpha$, $B\beta$ und $A'\alpha'$, $A'\beta'$, $B'\alpha'$, $B'\beta'$, die durch die Punkte A, B und durch die ihnen entsprechenden Punkte A', B' gezogen werden, wenn sie mit jenen Perpendikeln, also auch mit den Linien, nach welchen sie gezogen sind, respective gleiche Winkel bilden, weil, wegen der Gleichheit dieser Winkel, $\frac{Aa}{A\alpha} = \frac{Ba}{B\alpha}$ u. s. w. oder $\frac{Aa}{Ba} = \frac{A\alpha}{B\alpha}$ u. s. w. Sind nun A, B, C, D vier in gera-

der Linie liegende Punkte eines Systems, und A', B', C', D' die vier entsprechenden Punkte eines collinearen Systems, welche also ebenfalls in gerader Linie liegen, so denke man sich durch B und C zwei beliebige Gerade EF, GH, und durch B' und C' die entsprechenden Geraden E'F', G'H' gezogen. Alsdann sind AB und DB als zwei Gerade anzusehen, welche mit EF gleiche Winkel bilden; eben so sind AC und DC als zwei Gerade zu betrachten, die mit GH gleiche Winkel machen, und Aehnliches findet in dem collinearen Systeme Statt. Es folgt demnach aus dem obigen Lehrsatz (4) der §. 11. Fig. 14.

Lehrsatz [5]. Sind A, B, C, D vier Punkte eines Systems, welche in gerader Linie liegen, und A', B', C', D' die vier ihnen entsprechenden Punkte eines collinearen Systems, welche also ebenfalls in gerader Linie liegen; so ist

$$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{A'B'}{B'D'} : \frac{A'C'}{C'D'} . \qquad (8)$$

Aufgabe [19]. Es sind vier in gerader Linie liegende Punkte A, B, C, D eines Systems und drei Punkte A', B', C' eines collinearen Systems, welche den drei Punkten A, B, C entsprechen, gegeben. Man soll den Punkt D' des letztern Systems, welcher dem Punkte D des erstern entspricht, durch Construction finden. Fig. 15.

Man ziehe durch den Punkt A' eine beliebige Gerade und bestimme auf derselben die Punkte b, c, d so, daß A'b = AB, A'c = AC und A'd = AD. Nun ziehe man B'b und C'c, und verbinde deren Durchschnittspunkt P mit d durch eine Gerade Pd, welche, wenn es nöthig ist, verlängert die Gerade A'B' in einem Punkte D' schneidet, welcher der verlangte ist.

Denn nimmt man A'B' zur Abscissenachse und A'b zur Ordinatenachse, und bezeichnet A'B', A'C' durch x', x'', ferner A'b, A'c, A'd durch y', y'', y''', so ist (§. 4. u. §. 9.)

die Gleichung von B'b; $\frac{y}{y'} + \frac{x}{x'} = 1$,

die Gleichung von C'c; $\frac{y}{y''} + \frac{x}{x''} = 1$,

die Gleichung von Pd; $\left(\frac{y}{y'} + \frac{x}{x'} - 1\right) + \lambda\left(\frac{y}{y''} + \frac{x}{x''} - 1\right) = 0$,

wenn nämlich λ so bestimmt ist, daß

§. 11.

$$\left(\frac{y'''}{y'} - 1\right) + \lambda\left(\frac{y'''}{y''} - 1\right) = 0 .$$

Die Gerade Pd ſchneidet nun die Abſciſſenachſe in einem Punkte D', deſſen Ordinate $y=0$ iſt. Man hat daher, wenn die Abſciſſe dieſes Punktes durch x''' bezeichnet wird,

$$\left(\frac{x'''}{x'} - 1\right) + \lambda\left(\frac{x'''}{x''} - 1\right) = 0 .$$

Die vorige Gleichung giebt

$$\lambda = - \frac{y''}{y''' - y''} : \frac{y'}{y''' - y'} ,$$

und die letzte

$$\lambda = - \frac{x''}{x''' - x''} : \frac{x'}{x''' - x'} ,$$

oder, wenn man für $x', x'', x''', y', y'', y'''$ die Linien ſetzt, denen ſie gleich ſind,

$$\lambda = - \frac{AC}{CD} : \frac{AB}{BD} , \quad \text{und} \quad \lambda = - \frac{A'C'}{C'D'} : \frac{A'B'}{B'D'} .$$

Demnach iſt

$$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{A'B'}{B'D'} : \frac{A'C'}{C'D'} ,$$

und ſomit der Punkt D' (nach Lehrſatz 5.) richtig beſtimmt.

Aufgabe [20]. Es ſind fünf Punkte A, B, C, D, E, von denen nicht drei in gerader Linie liegen, und vier den Punkten A, B, C, D entſprechende Punkte A', B', C', D' eines collinearen Syſtems gegeben. Man ſoll den Punkt E', welcher dem Punkte E entſpricht, durch Conſtruction finden.

Fig. 16. Man bilde aus den vier Punkten A, B, C, D des einen Syſtems und aus den vier Punkten A', B', C', D' des andern Syſtems die vollſtändigen vierſeitigen Figuren ABMCND und A'B'M'C'N'D', ſo ſind M und M', N und N' einander entſprechende Punkte, weil ſie die Durchſchnitte von einander entſprechenden Geraden ſind. Man ziehe nun ME und NE, ſo erhält man zwei Durchſchnittspunkte P und Q in AM und AN. Jetzt beſtimme man auf A'M' vermittelſt der Punkte A, B, M, P und A', B', M', nach der vorigen Aufgabe, einen Punkt P', welcher dem Punkte P entſpricht, und auf A'N' beſtimme man vermittelſt der Punkte A, D, N, Q und A', D', N' eben ſo einen Punkt Q', welcher dem Punkte Q entſpricht. Endlich ziehe

man N'P' und M'Q', so ist ihr Durchschnitt E' der verlangte Punkt. Denn als Verbindungslinien einander entsprechender Punkte entsprechen sich NP und N'P', und aus demselben Grunde entsprechen sich MQ und M'Q'; die Durchschnittspunkte dieser Linien, nämlich E und E', werden also ebenfalls einander entsprechen. §. 12.

§. 12.

Die Formeln (2) des vorigen §. lassen sich durch Transformation der Coordinaten vereinfachen. Verlegt man nämlich zuerst nur den Anfangspunkt der tu und der xy, indem man $t+t'$, $u+u'$, $x+x'$ und $y+y'$ respective für t, u, x und y setzt, so kommt

$$u+u' = \frac{m'y+n'x+m'y'+n'x'+p'}{my+nx+my'+nx'+1};$$

$$t+t' = \frac{m''y+n''x+m''y'+n''x'+p''}{my+nx+my'+nx'+1}.$$

Wählt man aber zu den neuen Anfangspunkten zwei einander entsprechende Punkte, so daß also

$$u' = \frac{m'y'+n'x'+p'}{my'+nx'+1} \quad ; \quad t' = \frac{m''y'+n''x'+p''}{my'+nx'+1}$$

ist, so geben die eben aufgestellten Formeln

$$u = \frac{\{(m'n-mn')x'+(m'-mp')\}y+\{(mn'-m'n)y'+(n'-np')\}x}{(my'+nx'+1)(my+nx+my'+nx'+1)},$$

$$t = \frac{\{(m''n-mn'')x'+(m''-mp'')\}y+\{(mn''-m''n)y'+(n''-np'')\}x}{(my'+nx'+1)(my+nx+my'+nx'+1)},$$

oder, wenn man zur Abkürzung $m'n-mn'=a$, $m'-mp'=b$, $np'-n'=c$, $m''n-mn''=a'$, $m''-mp''=b'$, $np''-n''=c'$ und $my'+nx'+1=v$ setzt,

$$u = \frac{(ax'+b)y-(ay'+c)x}{v(my+nx+v)} \quad \text{und} \quad t = \frac{(a'x'+b')y-(a'y'+c')x}{v(my+nx+v)},$$

zwei Ausdrücke, die, für $x=0$ und $y=0$, verschwinden.

Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, daß die alten Coordinaten rechtwinklig gewesen sind, was erlaubt ist, weil durch eine Transformation der Coordinaten die Form der Gleichungen (1 u. 2) des vorigen Paragraphen nicht geändert wird. Aendert man nun die Lage der Achsen der x und y ohne den Coordinatenwinkel zu verändern, indem man (§. 3. F. 9.)

§. 12. $\cos\beta \cdot x - \sin\beta \cdot y$ und $\sin\beta \cdot x + \cos\beta \cdot y$ für x und y ſetzt; ſo geben die zuletzt gefundenen Ausdrücke

$$u = \frac{\{(ax'+b)\cos\beta+(ay'+c)\sin\beta\}y+\{(ax'+b)\sin\beta-(ay'+c)\cos\beta\}x}{v\{(m\cos\beta-n\sin\beta)y+(m\sin\beta+n\cos\beta)x+v\}},$$

$$t = \frac{\{(a'x'+b')\cos\beta+(a'y'+c')\sin\beta\}y+\{(a'x'+b')\sin\beta-(a'y'+c')\cos\beta\}x}{v\{(m\cos\beta-n\sin\beta)y+(m\sin\beta+n\cos\beta)x+v\}}.$$

Da nun die Größen x' und y' ſo wie der Winkel β beliebig gewählt werden können, ſo wollen wir ſie ſo beſtimmen, daß

$$(ax'+b)\cos\beta+(ay'+c)\sin\beta = (a'x'+b')\sin\beta-(a'y'+c')\cos\beta;$$
$$(ax'+b)\sin\beta-(ay'+c)\cos\beta = 0;$$
$$(a'x'+b')\cos\beta+(a'y'+c')\sin\beta = 0$$

werden. Dies iſt im Allgemeinen immer, und zwar in Betreff der Größen x' u. y' nur auf eine einzige Art möglich. Denn ſetzt man wieder zur Abkürzung $ax'+b=A$; $a'x'+b'=A'$; $ay'+c=B$ und $a'y'+c'=B'$, und $\mathit{tang}\,\beta$ für $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$, ſo haben die drei letzten Gleichungen die Geſtalt

$$(A'-B)\,\mathit{tang}\,\beta = A+B'\ ;\ A\,\mathit{tang}\,\beta = B\ ;\ B'\,\mathit{tang}\,\beta = -A'.$$

Addirt man die zweite und dritte dieſer Gleichungen, ſo kommt

$$(A+B')\,\mathit{tang}\,\beta = -(A'-B),$$

und, wenn man nun vermittelſt der erſten $\mathit{tang}\,\beta$ eliminirt,

$$(A+B')^2+(A'-B)^2 = 0,$$

welche Gleichung, weil die Summe zweier Quadrate nicht Null iſt, nur beſtehen kann, wenn zu gleicher Zeit

$$A'-B = 0 \quad \text{und} \quad A+B' = 0$$

iſt. Dieſe beiden Gleichungen geben, da ſie vom erſten Grade ſind, ſowohl für x' als für y' nur einen und zwar immer reellen Werth; und für dieſe Werthe iſt, da alsdann $A'=B$ und $B'=-A$, $\mathit{tang}\,\beta = \frac{B}{A} = -\frac{A'}{B'}$. Da nun alſo auch $\mathit{tang}\,\beta$ nur einen Werth bekommt, ſo erhält β zwei Werthe, die um π oder zwei rechte Winkel von einander differiren.

Für dieſe beſtimmten Werthe von x', y' und β bekommen alſo die Gleichungen (1 oder 2) des vorigen Paragraphen die Geſtalt

$$u = \frac{py}{my+nx+1} \quad \text{und} \quad t = \frac{px}{my+nx+1}, \qquad (1)$$

wo m, n und p Größen bezeichnen, die von den früher so genannten Quantitäten verschieden sind. §. 12.

In Folge dieser Gleichungen (1) entspricht nun einer Geraden im Systeme tu, deren Gleichung

$$au+bt+c=0$$

seyn mag, eine Gerade im Systeme xy, deren Gleichung alsdann

$$\frac{apy+bpx}{my+nx+1}+c=0 \quad \text{oder} \quad (ap+cm)y+(bp+cn)x+c=0$$

seyn muß. Den beiden Geraden, deren Gleichungen

$$t=0 \quad ; \quad u=0$$

sind, entsprechen die Geraden, deren Gleichungen

$$x=0 \quad ; \quad y=0$$

seyn müssen; d. h. der Achse der t entspricht jetzt die Achse der x und der Achse der u entspricht die Achse der y.

Den neuen Anfangspunkt der xy wollen wir das **Collineationscentrum** oder den **Collineationspunkt des Systems in xy** und den neuen Anfangspunkt der tu das **Collineationscentrum** oder den **Collineationspunkt des Systems in tu** nennen.

Aus dem vorher Gesagten ist zu ersehen, daß von zwei collinear-verwandten Systemen ein jedes im Allgemeinen nur einen Collineationspunkt hat, und daß die Relationen zwischen den Coordinaten homologer Punkte durch Gleichungen von der Form (1) ausgedrückt werden können, wenn man die Coordinatenachsen respective durch die Collineationspunkte und so legt, daß die Achse der t der Achse der x, und die Achse der u der Achse der y entspricht.

Denkt man sich nun, bei dieser Lage der Coordinatenachsen, eins der beiden Systeme so auf das andere gelegt, daß die Achse der x auf die Achse der t, und die Achse der y auf die Achse der u fällt; so fallen auch alle durch den, jetzt gemeinschaftlichen, Collineationspunkt gezogene einander entsprechende Gerade auf einander; und jede zwei einander entsprechende Punkte liegen mit dem Collineationspunkte in gerader Linie. Denn ist

$$u=ht$$

die Gleichung irgend einer Geraden des einen Systems, die durch den An-

§. 12. fangspunkt der Coordinaten geht, so ist die Gleichung der Geraden, welche ihr im andern Systeme entspricht, in Folge der Relationen (1),

$$y = hx$$

und diese Gerade fällt also, wie man sieht, mit jener zusammen. Sind ferner $x'y'$ und $t'u'$ die Coordinaten entsprechender Punkte, so sind die Gleichungen der Geraden, welche den Anfangspunkt mit diesen Punkten verbinden, $y = \frac{y'}{x'}x$ und $u = \frac{u'}{t'}t$. Da aber in Folge der Gleichungen (1) $\frac{u'}{t'} = \frac{y'}{x'}$, und die Coordinatenachsen dieselben sind, so fallen die beiden Geraden in eine Linie zusammen.

§. 13.

Zwei collinear-verwandte Systeme wollen wir **collinear-liegend** nennen, wenn sie die im vorigen §. angegebene Lage haben, bei welcher je zwei durch den gemeinschaftlichen Collineationspunkt gezogene, sich entsprechende, Gerade auf einander fallen. Es verdient bemerkt zu werden, daß zwei collinear-verwandte Systeme im Allgemeinen nur auf zwei verschiedene Weisen so gelegt werden können, daß sie collinear-liegend sind, was daraus erhellet, daß x' u. y' (§. 12.) für zwei bestimmte Systeme nicht mehrfache Werthe haben, und daß β auf zweierlei Weise genommen werden kann.

Es fragt sich jetzt, ob in zwei collinearen und collinear-liegenden Systemen außer den Collineationspunkten noch andere homologe Punkte auf einander fallen. Für solche Punkte hat man, da die Coordinatenachsen auf einander liegen, $t = x$ und $u = y$, und diese Werthe, in die Gleichungen (1) des vorigen §. gesetzt, geben

$$(my+nx+1)y = py \quad ; \quad (my+nx+1)x = px \,,$$

oder

$$(my+nx+1-p)y = 0 \quad ; \quad (my+nx+1-p)x = 0 \,.$$

Diese Gleichungen werden befriedigt, wenn zu gleicher Zeit $y=0$ und $x=0$ ist, oder wenn $my+nx+1-p = 0$ ist, und hieraus sieht man, daß, außer den beiden Collineationspunkten, alle Punkte der Linie

$$my+nx+1-p = 0 \,, \qquad (1)$$

welche eine gerade ist, auf den ihnen entsprechenden Punkten liegen. Diese Gerade wollen wir die **Collineationsachse** nennen. **Eine jede Linie**

des einen Systems schneidet die ihr entsprechende Linie des anderen collinear-liegenden Systems, wie leicht einzusehen ist, auf dieser Collineationsachse. (Eine krumme Linie des einen Systems kann die ihr entsprechende Linie des collinear-liegenden Systems außer auf der Collineationsachse in noch andern Punkten schneiden.) §. 13.

Zweien parallelen geraden Linien des einen Systems entsprechen in einem collinearen Systeme zwei Gerade, die im Allgemeinen nicht parallel sind. Denn es seyen

$$u+ht+k=0 \quad ; \quad u+ht+k'=0$$

die Gleichungen der zuerst genannten Linien, so hat man für die ihnen entsprechenden Geraden in einem collinear-liegenden Systeme, durch Substitution der Werthe aus den Gleichungen (1) §. 12.,

$$p(y+hx)+k(my+nx+1)=0;$$
$$p(y+hx)+k'(my+nx+1)=0;$$

und diese Geraden sind, wie man sieht, im Allgemeinen einander nicht parallel (eine Ausnahme macht der Fall, in welchem $h=\frac{n}{m}$), vielmehr schneiden sie sich in einem Punkte, und zwar in demjenigen, in welchem sich die beiden Geraden schneiden, die durch die Gleichungen

$$y+hx=0 \quad \text{und} \quad my+nx+1=0$$

ausgedrückt sind, weil die Werthe von x u. y, welche diesen Gleichungen genugthun, auch jene Gleichungen befriedigen. Die letzte dieser beiden Gleichungen ist die einer Geraden im Systeme xy, welche der Collineationsachse (1) parallel ist, und man sieht also, daß der Ort der Durchschnittspunkte derjenigen Geraden im Systeme xy, welche parallelen Geraden im Systeme tu entsprechen, eine der Collineationsachse parallele, durch die Gleichung

$$my+nx+1=0 \qquad (2)$$

(deren erster Theil nichts anders als der Nenner der Ausdrücke (1) im vorigen §.) dargestellte, gerade Linie ist. Diese gerade Linie mag die Gegenachse im Systeme xy heißen. Es giebt nun, wie leicht einzusehen ist, auch eine Gegenachse im Systeme tu, d. i. eine gerade Linie, auf welcher sich alle Geraden im Systeme tu schneiden, die parallelen Geraden im Systeme xy entsprechen.

Die erste der beiden vorher genannten Gleichungen, $y+hx=0$, ist

§. 13. die einer Geraden, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. i. durch das Collineationscentrum geht und mit der Collineationsachse, also auch mit der Gegenachse denselben Winkel macht, als die Richtung der parallelen Geraden im Systeme tu. Dies giebt ein Mittel an die Hand, die folgende Aufgabe zu lösen.

Aufgabe [21]. I. Es sind zwei collineare Figuren gegeben, die nicht collinear liegen; man soll das Collineationscentrum durch Construction bestimmen.

II. Es ist von zwei collinearen und collinear-liegenden Systemen, das eine derselben, der gemeinschaftliche Collineationspunkt, die Collineationsachse und die Gegenachse des andern Systems gegeben; man soll zu jedem Punkte des gegebenen Systems den entsprechenden im andern Systeme durch Construction bestimmen.

I. Man ziehe in der ersten Figur zwei Paar Parallellinien l, l' und in der zweiten Figur ebenfalls zwei Paar Parallellinien λ, λ'; ferner in der ersten Figur die beiden Linien-Paare m, m', welche den Geraden λ, λ', und in der zweiten Figur die beiden Linien-Paare μ, μ', welche den Geraden l, l' entsprechen. Der Durchschnittspunkt p der beiden Geraden m, und der Durchschnittspunkt p' der beiden Geraden m' bestimmen die Gegenachse g in der ersten Figur, welche mit den Geraden l, l' die Winkel a, a' macht; und die Geraden μ, μ' bestimmen durch ihre Durchschnittspunkte π, π' die Gegenachse γ in der zweiten Figur, welche mit den Geraden λ, λ' die Winkel α, α' bildet. Nun ziehe man durch p und p' zwei Gerade r, r', die mit der Geraden g die Winkel α, α' bilden, und durch π und π' zwei Gerade ϱ, ϱ', die mit γ die Winkel a, a' machen; so ist der Durchschnittspunkt von r und r' das Collineationscentrum der ersten Figur und der Durchschnittspunkt von ϱ und ϱ' das Collineationscentrum der zweiten Figur.

Die Richtigkeit dieser Lösung folgt unmittelbar aus demjenigen, was oben gesagt worden.

Sind die Collineationspunkte gefunden, so hat es keine Schwierigkeit, beide Figuren collinear-liegend zu verzeichnen, und die Collineationsachse ergiebt sich alsdann durch die Durchschnitte sich entsprechender Geraden.

II. Es sey p ein Punkt des gegebenen Systems, zu welchem der homologe Punkt π im andern Systeme gefunden werden soll. Wir verbinden den Collineationspunkt c mit dem Punkte p durch eine Gerade cp, ziehen durch p irgend eine Gerade, welche die Collineationsachse im Punkte a schnei-

bet, und dieſer Geraden durch c eine Parallele, welche die gegebene Gegenachſe in b ſchneidet; wir verbinden ferner die Punkte a und b durch eine Gerade ab, ſo iſt der Durchſchnitt π der Geraden cp und ab der verlangte Punkt. §. 13.

Denn den beiden Parallelen pa und cb in dem gegebenen Syſteme entſprechen in dem andern zwei Gerade, welche ſich auf der Gegenachſe, und zwar da, wo die durch c gezogene Parallele dieſelbe trifft, alſo in b ſchneiden. Dieſer Punkt b, als ein Punkt des zweiten Syſtems betrachtet, hat alſo ſeinen entſprechenden Punkt in dem gegebenen Syſteme auf der Geraden pa; der Punkt a aber, als ein Punkt der Collineationsachſe, entſpricht ſich ſelbſt. Demnach iſt im zweiten Syſteme die Verbindungslinie ab der Geraden pa des gegebenen Syſtems homolog. Die Gerade cp, als eine durch den Collineationspunkt c gehende Gerade, entſpricht ſich ſelbſt. Da nun den beiden Geraden pa und cp die beiden Geraden ab und cp entſprechen, ſo iſt der Durchſchnitt π der letztern der homologe Punkt des Durchſchnitts p der erſtern.

§. 14.

Entwickelt man aus den Gleichungen (1) des §. 12. die Größen y und x, ſo kommt

$$y = -\frac{u}{mu+nt-p} \quad \text{und} \quad x = -\frac{t}{mu+nt-p}\,; \qquad (1)$$

daher iſt die Gleichung der Gegenachſe im Syſteme tu (vor. §.)

$$mu+nt-p = 0\,, \qquad (2)$$

und, unter der fortwährenden Vorausſetzung rechtwinkliger Coordinaten, iſt alſo (§. 7. S. 6.) die Länge des Perpendikels vom Collineationspunkte

auf die Collineationsachſe, $P = \frac{1-p}{\sqrt{m^2+n^2}}$,

auf die Gegenachſe im Syſteme xy, $P_1 = \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$,

auf die Gegenachſe im Syſteme tu, $P_2 = \frac{-p}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

Die Entfernung der Gegenachſe im Syſteme xy von der Collineationsachſe iſt demnach $\frac{-p}{\sqrt{m^2+n^2}}$, alſo gleich der Entfernung der Gegenachſe im Syſteme tu vom Collineationscentrum.

§. 14. Zufolge der Gleichungen (1) des gegenwärtigen §. und des §. 12. ist

$$(mu+nt-p)y = -u \quad \text{und} \quad (my+nx+1)u = py,$$

woraus durch Multiplication

$$(mu+nt-p)(my+nx+1) = -p$$

sich ergiebt. Bezeichnet man den Perpendikel von irgend einem Punkte xy auf die Gegenachse im Systeme xy durch P' und den Perpendikel von dem ihm entsprechenden Punkte tu auf die Gegenachse im Systeme tu durch P'', so ist (§. 7. S. 6.)

$$my+nx+1 = P'\sqrt{m^2+n^2} \quad \text{und} \quad mu+nt-p = P''\sqrt{m^2+n^2};$$

daher hat man

$$P'P'' = \frac{-p}{m^2+n^2},$$

oder auch, in Folge des oben Gefundenen,

$$P'P'' = P_1P_2.$$

Demnach ist das Product der beiden Perpendikel, welche von zwei einander entsprechenden Punkten respective auf die Gegenachsen der beiden Systeme gefällt werden, eine constante Größe.

Ehe wir von der Anwendung des bisher Gesagten reden, wollen wir noch zweier besonderen Fälle Erwähnung thun. Wenn nämlich in den Gleichungen (1) des §. 12. $p=1$ ist, so geht die Gleichung der Collineationsachse (1. §. 13.) in

$$my+nx = 0$$

über. Die Collineationsachse geht also in diesem Falle durch das Collineationscentrum.

Wenn aber $p = -1$ ist, also wenn

$$t = -\frac{x}{my+nx+1}, \quad u = -\frac{y}{my+nx+1},$$

und

$$x = -\frac{t}{mu+nt+1}, \quad y = -\frac{u}{mu+nt+1},$$

so ist die Gleichung der Collineationsachse

$$my+nx+2 = 0;$$

und sind die Coordinaten eines Punktes im Systeme xy, h und k, so sind die Coordinaten des ihm entsprechenden Punktes

t =

$$t = -\frac{h}{mk+nh+1} \quad , \quad u = -\frac{k}{mk+nh+1} \; . \qquad \text{§. 14.}$$

Wird derselbe Punkt hk der gemeinschaftlichen Ebene beider Systeme, von denen wir annehmen, daß sie collinear liegen, als ein Punkt im Systeme tu betrachtet, so sind die Coordinaten des ihm entsprechenden Punktes

$$x = -\frac{h}{mk+nh+1} \quad , \quad y = -\frac{k}{mk+nh+1} \; .$$

Da nun die Werthe von t und x und von u und y dieselben sind, so folgt, daß man in dem Falle, wenn $p = -1$ ist, beliebig viele Punkte des einen Systems mit den ihnen entsprechenden Punkten des andern Systems vertauschen kann. Sind demnach P und P′, ferner Q und Q′ zwei Paar homologe Punkte zweier collinearen und collinear-liegenden Systeme, für welche $p = -1$ ist, so werden nicht nur die Geraden PQ und P′Q′ als einander entsprechende Linien sich auf der Collineationsachse schneiden, sondern es werden sich auch die Geraden PQ′ und P′Q auf derselben Achse durchkreuzen; denn hier kann man Q mit Q′ verwechseln.

In demselben Falle (wenn nämlich $p = -1$ ist) fällt die Gegenachse im Systeme xy mit der Gegenachse im Systeme tu zusammen; denn die Gleichung der einen ist $my + nx + 1 = 0$, und die der andern $mu + nt + 1 = 0$. Da jetzt die Gleichung der Collineationsachse $my + nx + 2 = 0$ ist, so ist die Entfernung der Collineationsachse vom Collineationscentrum doppelt so groß als die Entfernung der Gegenachse von diesem Punkte.

§. 15.

Die drei Constanten m, n und p, welche in den Gleichungen (1) des §. 12. vorkommen, können bestimmt werden, wenn der Collineationspunkt von zwei collinearen und collinear-liegenden Systemen und drei Paar sich entsprechende Punkte bekannt sind. Denn setzt man die Coordinaten dieser drei Paar Punkte nach einander in jene beide Gleichungen für x u. y und für t u. u, so erhält man sechs Gleichungen; weil aber der gemeinschaftliche Collineationspunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen ist, müssen auch je zwei sich entsprechende Punkte auf einer durch diesen Anfangspunkt gehenden Geraden liegen (§. 12.), daher muß also, wenn x′, y′ und t′, u′ die Coordinaten zweier entsprechenden Punkte bedeuten, $\frac{u'}{t'} = \frac{y'}{x'}$

§. 15. seyn, und diejenigen Werthe von m, n und p, welche der Gleichung $u' = \frac{py'}{my'+nx'+1}$ genugthun, werden auch die Gleichung $t' = \frac{px'}{my'+nx'+1}$ befriedigen, da jene aus dieser entsteht, wenn man ihren ersten Theil mit $\frac{u'}{t'}$, und ihren zweiten Theil mit $\frac{y'}{x'}$ multiplicirt; die beiden Gleichungen, welche man für jeden der drei gegebenen Punkte erhält, drücken also nur eine Bedingung aus, und sämmtliche sechs Gleichungen reduciren sich daher auf drei, die im Allgemeinen hinreichen die drei Constanten zu bestimmen.

Fig. 17. Zwei Dreiecke ABC, A'B'C' können folglich immer als collineare und collinear-liegende Figuren angesehen werden, wenn die Verbindungslinien ihrer Eckpunkte AA', BB', CC' in einem Punkte P zusammen treffen. Die Punkte A und A', B und B', C und C' sind alsdann einander entsprechende Punkte, und die Geraden AB und A'B', AC und A'C', BC und B'C' einander entsprechende Gerade, welche sich also auf der Collineationsachse schneiden müssen. Daraus ergiebt sich der

Lehrsatz [6]. Wenn die drei Verbindungslinien der Eckpunkte zweier Dreiecke ABC und A'B'C' sich in einem Punkte P schneiden, so liegen die drei Durchschnittspunkte der diesen Eckpunkten gegenüberstehenden Seiten in einer Geraden A"B"C".

Viele andere Sätze lassen sich aus den allgemeinen Eigenschaften collinear-liegender Figuren ableiten, von welchen nur noch der folgende hier Platz finden mag.

Fig. 18. Lehrsatz [7]. Wenn die Scheitel P, A, A' dreier Winkel, welche drei Vierecke BCDE, B'C'D'E', B"C"D"E" bilden, in gerader Linie liegen, so schneiden sich von den sechs Diagonalen vier mal drei in einem Punkte P_1, P_2, P_3, P_4.

Denn da die Verbindungslinien von A und A', B und B', E und E' durch den Punkt P gehen, so kann man diese Punkte als sich entsprechende Punkte betrachten; alsdann sind AB und A'B', AE und A'E' einander entsprechende Linien, und daher wieder C und C', D und D' sich entsprechende Punkte, somit auch BD und B'D', CE und C'E' einander entsprechende Linien, die sich auf der Collineationsachse D"E" in den Punkten P_1, P_2 schneiden. Man kann aber auch A und A', B und E', E und B' als sich entsprechende Punkte betrachten; alsdann sind AB und A'E', AE und A'B' einander entsprechende Linien, folglich C und D', D und C' sich entspre-

chende Punkte und somit auch CE und D'B', BD und C'E' einander entsprechende Linien, die sich auf der jetzigen Collineationsachse B''C'' in den Punkten P_3, P_4 schneiden. §. 15.

Da man jetzt vier neue Punkte hat, in denen sich immer drei Gerade schneiden, so kann man wieder diese Punkte zu Collineationspunkten nehmen, und noch mehrere andere Linien ziehen, die sich zu dreien in einem Punkte schneiden.

Aus dem letzten Lehrsatze folgt auch, daß, wenn die drei Collineationspunkte von drei collinearen Figuren, welche zu je zweien collinear liegen, sich in gerader Linie befinden; so schneiden sich die drei Collineationsachsen in einem und demselben Punkte.

§. 16.

Wenn in den Ausdrücken (2) des §. 11. $m = 0$ und $n = 0$ ist, so hat man

$$u = m'y + n'x + p' \quad \text{und} \quad t = m''y + n''x + p''. \qquad (1)$$

Die besondere Art der Collineationsverwandtschaft zweier Systeme, welche durch diese Formeln ausgedrückt wird, heißt Affinität.

Um die sechs Constanten m', n', p', m'', n'', p'' zu bestimmen, ist es hinreichend, wenn drei Punkte in dem einen Systeme und die drei ihnen entsprechenden Punkte in dem affinen Systeme bekannt sind.

Ein drittes System, dessen Coordinaten r und s seyn mögen, wird dem Systeme in t und u affin seyn, wenn

$$u = f's + g'r + h' \quad \text{und} \quad t = f''s + g''r + h'' \qquad (2)$$

ist. Eliminirt man t und u zwischen den Gleichungen (1 u. 2), so ergeben sich für r und s Ausdrücke in x und y von linearer Form, woraus dann folgt, daß zwei Systeme, die einem dritten affin sind, selbst in der Verwandtschaft der Affinität stehen.

Giebt man den Buchstaben A', A'', M', M'', a', a'', α', α'' dieselbe Bedeutung wie im §. 11., so hat man

$$A' = M' \quad , \quad A'' = M''$$

und

$$a' = \frac{A'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} \; ; \; a'' = \frac{A''}{\sqrt{f''^2 + g''^2}} \; ; \; \alpha' = \frac{M'}{\sqrt{m'^2 + n'^2}} \; ; \; \alpha'' = \frac{M''}{\sqrt{m''^2 + n''^2}}.$$

§. 16. Daraus ergiebt sich

$$a\sqrt{f'^2+g'^2} = \alpha'\sqrt{m'^2+n'^2} \quad ; \quad a''\sqrt{f'^2+g'^2} = \alpha''\sqrt{m'^2+n'^2} ,$$

und demnach

$$a' : a'' = \alpha' : \alpha'' .$$

Da nun, wie schon im §. 11. bemerkt, $A = 0$ und $M = 0$ jede zwei einander entsprechende Gerade und a', a'', α', α'' die von zwei beliebigen Punkten des einen Systems und den beiden ihnen entsprechenden Punkten des andern gefällten Perpendikel bezeichnen; so ergiebt sich aus der letzten Gleichung der

Lehrsatz [8]. Wenn man von zwei beliebigen Punkten A und B auf irgend eine Gerade a Senkrechte Aa, Ba fällt, und in einem affinen Systeme von den entsprechenden Punkten A', B' auf die entsprechende Gerade a' ebenfalls Senkrechte A'a', B'a' herabläßt, so ist

$$Aa : Ba = A'a' : B'a' .$$

Sind ABCD und A'B'C'D' sich entsprechende Vierecke in zwei affinen Systemen, so ist in Folge dieses Lehrsatzes

$$ABC : A'B'C' = DBC : D'B'C' .$$

Auch ist leicht einzusehen, daß nicht nur Dreiecke, die eine Seite gemein haben, sondern je zwei Dreiecke, und folglich auch je zwei geradlinige Figuren in dem einen Systeme sich eben so zu einander verhalten, wie die ihnen entsprechenden Figuren in dem affinen Systeme.

Man wird ferner aus diesem Lehrsatze leicht erschließen, daß jede zwei parallele gerade Linien, die von zwei Punkten, A und B, an eine Gerade a gezogen werden, sich eben so wie zwei parallele Linien in einem affinen Systeme, die von den beiden entsprechenden Punkten A' und B' an die entsprechende Gerade a' gezogen sind, zu einander verhalten; woraus sich wiederum ergiebt, daß eine gerade Linie, welche die Punkte A und B verbindet, von irgend einer Geraden a in demselben Verhältnisse geschnitten wird, als eine gerade Linie, welche die Punkte A' und B' verbindet, von der entsprechenden Geraden a' im affinen Systeme; und weil homologe Gerade sich in homologen Punkten schneiden, so folgt der

Lehrsatz [9]. Sind A, B, C und A', B', C' drei sich entsprechende, in gerader Linie liegende, Punkte zweier affinen Systeme, so ist

$$AB : BC = A'B' : B'C' .$$

Aufgabe [22]. Es ſind vier Punkten A, B, C, D, von denen nicht drei in gerader Linie liegen, und drei Punkte A', B', C' eines affinen Syſtems, welche den Punkten A, B, C entſprechen, gegeben. Man ſoll den Punkt D' dieſes Syſtems finden, welcher dem Punkte D entſpricht. §. 16.

Man ziehe AC, BC, AD, BD; ſchneidet nun die Gerade BD die Linie AC in P und die AD die BC in Q, ſo beſtimme man auf den Geraden A'C' und B'C' die Punkte P' und Q', ſo daß $AP : PC = A'P' : P'C'$ und $BQ : QC = B'Q' : Q'C'$, und ziehe A'Q' und B'P', ſo iſt der Durchſchnittspunkt dieſer beiden Geraden der verlangte Punkt D'.

Die Richtigkeit dieſer Löſung erhellet aus dem vorigen Lehrſatze.

In zwei affinen Syſtemen ſind die Geraden des einen Syſtems, welche parallelen Geraden des andern entſprechen, ſelbſt parallel. Denn es ſeyen

$$u + at + \alpha = 0 \quad , \quad u + at + \beta = 0$$

die Gleichungen zweier Parallelen des einen Syſtems, ſo ſind die Gleichungen der entſprechenden Linien im affinen Syſteme

$$(m' + am'')y + (n' + an'')x + p' + ap'' + \alpha = 0 \ ,$$
$$(m' + am'')y + (n' + an'')x + p' + ap'' + \beta = 0 \ ,$$

in welchen die Coefficienten von x und y dieſelben ſind.

§. 17.

In zwei affinen Syſtemen werden, wie im vorigen §. gezeigt worden, einander entſprechende Gerade durch ſich entſprechende Punkte in gleichem Verhältniß getheilt. Findet die Gleichheit dieſer Verhältniſſe auch bei ſolchen Abſchnitten Statt, die nicht Theile einer und derſelben Geraden ſind, ſo heißen die affinen Syſteme ähnlich. Für ſolche Syſteme finden zwiſchen den Coefficienten m', n', p', m'', n'', p'' gewiſſe Relationen Statt, die auf folgende Weiſe gefunden werden können.

Es ſeyen x'y' und t'u', x''y'' und t''u'' die Coordinaten von zwei Paar homologer Punkte A und A', B und B', ferner ſey q der unbeſtimmte, aber conſtante Exponent des erwähnten Verhältniſſes. Wenn nun α und α' die Coordinatenwinkel in beiden Syſtemen ſind, ſo iſt (§. 2.)

$$\overline{AB}^2 = (y'' - y')^2 + 2(y'' - y')(x'' - x')\cos\alpha + (x'' - x')^2 \ ,$$
$$\overline{A'B'}^2 = (u'' - u')^2 + 2(u'' - u')(t'' - t')\cos\alpha' + (t'' - t')^2$$

und durch Subſtitution der Werthe von u und t aus (G. 1. §. 16)

§. 17.
$$\overline{A'B'}^2 = \begin{cases} (m'^2+2m'm''\cos\alpha'+m''^2)(y''-y')^2 \\ +2\{m'n'+(m'n''+m''n')\cos\alpha'+m''n''\}(y''-y')(x''-x') \\ +(n'^2+2n'n''\cos\alpha'+n''^2)(x''-x')^2. \end{cases}$$

Soll nun $\overline{A'B'} = q.\overline{AB}$ seyn, und zwar für jeden Werth von x', x'', y' und y'', so muß

$$\begin{aligned} m'^2+2m'm''\cos\alpha'+m''^2 &= q^2 \\ m'n'+(m'n''+m''n')\cos\alpha'+m''n'' &= q^2\cos\alpha \\ n'^2+2n'n''\cos\alpha'+n''^2 &= q^2 \end{aligned}$$

oder, wenn man q eliminirt,

$$\begin{aligned} (m'^2+2m'm''\cos\alpha'+m''^2)\cos\alpha &= m'n'+(m'n''+m''n')\cos\alpha'+m''n'', \\ m'^2+2m'm''\cos\alpha'+m''^2 &= n'^2+2n'n''\cos\alpha'+n''^2; \end{aligned}$$

und diese beiden Gleichungen drücken die Relationen aus, welche zwischen den Coefficienten in den Formeln (§. 16. S. 1) Statt finden müssen, damit die beiden Systeme ähnlich seyen. Sind beide Coordinatensysteme rechtwinklig, so gehen diese Bedingungsgleichungen in

$$m'n'+m''n'' = 0 \quad \text{und} \quad m'^2+m''^2 = n'^2+n''^2$$

über, woraus $m'' = \pm n'$ und $n'' = \mp m'$ gefunden wird. Für zwei ähnliche Systeme hat man also in rechtwinkligen Coordinaten

$$u = m'y+n'x+p' \;;\; t = \pm n'y \mp m'x+p''. \qquad (1)$$

Da zwischen den sechs Coefficienten m', n', p', m'', n'', p'' zwei Gleichungen existiren, so sind zwei Paar einander entsprechende Punkte hinreichend, um sämmtliche Coefficienten zu bestimmen.

Zwei Systeme, die einem dritten ähnlich sind, sind selbst einander ähnlich. Denn es seyen tu und rs die rechtwinkligen Coordinaten der beiden ersten Systeme und xy die rechtwinkligen Coordinaten des dritten Systems, so ist

$$\begin{aligned} u &= m'y+n'x+p' \;;\; t = \pm n'y \mp m'x+p''; \\ y &= f's+g'r+h' \;;\; x = \pm g's \mp f'r+h'', \end{aligned}$$

woraus sich durch Elimination von x und y die Gleichungen

$$\begin{aligned} u &= (m'f' \pm n'g')s+(m'g' \mp n'f')r+m'h'+n'h''+p'; \\ t &= \pm(m'g' \mp n'f')s \mp (m'f' \pm n'g')r \mp n'h' \pm m'h''+p'' \end{aligned}$$

ergeben, welche die Aehnlichkeit der Systeme in tu und rs ausdrücken.

Die obigen Formeln (1) lassen sich durch Transformation der Coor-

kommen noch bedeutend vereinfachen. Verlegt man nämlich zuerst den Anfangspunkt der tu und der xy, indem man $t+t'$ für t u. s. w. setzt, so kommt §. 17.

$$u+u' = m'y+n'x+m'y'+n'x'+p' ;$$
$$t+t' = \pm n'y \mp m'x \pm n'y' \mp m'x'+p'' .$$

Wählt man aber zu den neuen Anfangspunkten zwei einander entsprechende Punkte, so daß also

$$u' = m'y'+n'x'+p' \quad ; \quad t' = \pm n'y' \mp m'x'+p''$$

ist, so reduciren sich die eben erhaltenen Formeln auf

$$u = m'y+n'x \quad ; \quad t = \pm n'y \mp m'x .$$

Transformirt man nun das System in xy auf neue, ebenfalls rechtwinklige Achsen, so geben die Formeln (§. 3. F. 9.)

$$u = (m'\cos\beta - n'\sin\beta)y+(m'\sin\beta+n'\cos\beta)x ,$$
$$t = \pm(n'\cos\beta+m'\sin\beta)y \pm (n'\sin\beta - m'\cos\beta)x ,$$

und wenn man β so wählt, daß

$$m'\sin\beta+n'\cos\beta = 0 \quad \text{oder} \quad \tang\beta = -\frac{n'}{m'} ,$$

und den sich daraus ergebenden Werth von $m'\cos\beta - n'\cos\beta$ durch a bezeichnet,

$$u = ay \quad ; \quad t = \mp ax . \qquad (2)$$

Zwei durch den neuen Anfangspunkt der tu gezogene Geraden bilden, wie man aus diesen Formeln (2) sieht, denselben Winkel als die beiden ihnen entsprechenden Geraden, welche durch den neuen Anfangspunkt der xy gehen. Es schließen demnach irgend zwei Gerade eines Systems denselben Winkel ein, als die ihnen entsprechenden Geraden in einem ihm ähnlichen Systeme. Legt man also zwei ähnliche Systeme so auf einander, daß irgend ein Punkt auf den ihm entsprechenden fällt, so kann, wenn in den Formeln (1 u. 2) die untern Zeichen gelten, eins dieser Systeme immer so um jenen Punkt gedreht werden, daß alle durch diesen Punkt gezogenen Geraden des einen Systems auf die ihnen entsprechenden Geraden des andern Systems zu liegen kommen; und wenn in den Formeln (1 u. 2) die obern Zeichen gelten, kann dasselbe System umgewendet, und dann immer so um jenen Punkt gedreht werden, daß dasselbe Statt findet *). In dieser Lage

*) Hierbei setzen wir voraus, daß die Achsen der x u. y und die der t u. u in

§. 17. heißen die beiden Systeme ähnlich-liegend, und setzt man die Drehung fort, bis sie zwei rechte Winkel beträgt, so sind die Systeme von Neuem ähnlich-liegend. Der Punkt, auf welchem der ihm entsprechende liegt, heißt der Aehnlichkeitspunkt, und je nachdem zwei andere, auf derselben durch ihn gezogenen Geraden liegende, homologe Punkte auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten dieses Aehnlichkeitspunkts befindlich sind, nennt man ihn den äußern oder innern Aehnlichkeitspunkt.

In ähnlichen und ähnlich-liegenden Systemen sind zwei sich entsprechende Gerade parallel. Für solche Systeme gelten, wenn nicht der Aehnlichkeitspunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen wird, die Formeln

$$u = ay + b \quad ; \quad t = ax + c \,. \qquad (3)$$

Es seyen xy, tu und rs die auf dieselben Achsen bezogenen Coordinaten von drei Systemen, von welchen das erste und zweite, ferner das erste und dritte ähnlich und ähnlich-liegend sind, und es sey der Aehnlichkeitspunkt des ersten und zweiten Systems der Anfangspunkt der Coordinaten; dann ist

$$u = ay \quad ; \quad t = ax \quad ;$$
$$y = a's + b \quad ; \quad x = a'r + c \,.$$

Eliminirt man x und y zwischen diesen vier Gleichungen, so kommt

$$u = aa's + ab \quad ; \quad t = aa'r + ac \,;$$

und aus diesen Gleichungen sieht man, daß auch das zweite und dritte System ähnlich und ähnlich-liegend sind. Bezeichnet man die Coordinaten des Aehnlichkeitspunkts vom ersten und dritten Systeme durch $x_1 y_1$ und die des Aehnlichkeitspunkts vom zweiten und dritten Systeme durch $t_1 u_1$, so ist

$$y_1 = \frac{b}{1 - a'} \quad ; \quad x_1 = \frac{c}{1 - a'} \quad ; \quad u_1 = \frac{ab}{1 - aa'} \quad ; \quad t_1 = \frac{ac}{1 - aa'} \,,$$

woraus sich

---

gleicher Kreisrichtung auf einander folgen, so daß, wenn man die positive Seite der x auf die positive Seite der t gelegt hätte, auch die positive Seite der y auf die positive Seite der u fiele, ohne daß die Ebene der xy umgewendet worden sey. Findet die entgegengesetzte Voraussetzung Statt, so müßte das Umwenden des einen der beiden Systeme vor der Drehung Statt finden, wenn die untern Zeichen in den Formeln (1 u. 2) gelten, und es wäre nicht vorzunehmen, wenn die obern Zeichen gelten.

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{u_1}{t_1}$$ §. 17.

ergiebt. Demnach liegen die Aehnlichkeitspunkte x_1y_1 und t_1u_1 mit dem Anfangspunkte der Coordinaten, d. i. mit dem Aehnlichkeitspunkte des ersten und zweiten Systems in gerader Linie, und man hat den

Lehrsatz [10]. Sind zwei Systeme einem dritten ähnlich und ähnlich-liegend, so sind sie selbst ähnlich und ähnlich-liegend, und die drei Aehnlichkeitspunkte befinden sich in gerader Linie.

Wie auch zwei ähnliche Systeme liegen mögen, so liegt im Allgemeinen immer ein Punkt auf dem ihm entsprechenden; denn sind

$$u = m'y + n'x + p' \quad ; \quad t = \pm n'y \mp m'x + p'' \qquad (1)$$

die Relationen zwischen den, auf dieselben rechtwinkligen Achsen bezogenen, Coordinaten beider Systeme, so hat man für einen Punkt, der auf dem ihm entsprechenden liegt, $u = y$ und $t = x$, also

$$(m' - 1)y + n'x + p' = 0 \quad \text{und} \quad \pm n'y \mp (m' \pm 1)x + p'' = 0 ,$$

zwei Gleichungen, welche im Allgemeinen immer, sowohl für x als für y einen, und nicht mehr als einen reellen Werth geben. Dieser Punkt, den man das Situationscentrum oder den Situationspunkt nennen kann, hat die merkwürdige Eigenschaft, daß, wenn man von ihm nach einem beliebigen Punkte des einen Systems und nach dem entsprechenden Punkte des andern Systems gerade Linien zieht, diese Geraden immer in demselben Verhältnisse stehen; denn da der Situationspunkt als sich selbst entsprechend anzusehen ist, so sind die gezogenen Linien sich entsprechende Gerade, die von entsprechenden Punkten begrenzt werden.

§. 18.

Ist der Exponent des Verhältnisses, q, gleich ± 1, so sind die beiden Systeme nicht bloß ähnlich, sondern einander gleich. Die drei Bedingungsgleichungen des vorigen §. verwandeln sich für diesen Fall, unter der Voraussetzung von rechtwinkligen Coordinaten, also dadurch, daß man $q^2 = 1$ und $\cos\alpha = \cos\alpha' = 0$ setzt, in

$$m'^2 + m''^2 = 1 \quad ; \quad m'n' + m''n'' = 0 \quad ; \quad n'^2 + n''^2 = 1 .$$

Diese Gleichungen werden befriedigt, wenn man $m' = \cos\beta$; $n' = \sin\beta$; $m'' = \mp\sin\beta$ und $n'' = \pm\cos\beta$ setzt. Für zwei solche Systeme hat man also in rechtwinkligen Coordinaten

§. 18. Punkt liegt in unendlicher Entfernung, wenn beide Polygone eine parallele Lage haben. Iſt aber eine Umwendung des einen Polygons nöthig, um es mit dem andern zur Congruenz zu bringen, ſo giebt es im Allgemeinen keinen Punkt der gemeinſchaftlichen Ebene, der die angegebene Eigenſchaft hat.

Von der Reciprocität.

§. 19.

Zwei Figuren oder Syſteme von Punkten und Linien, welche ſo beſchaffen ſind, daß jedem Punkte des einen Syſtems eine gerade Linie des andern Syſtems, und umgekehrt jedem Punkte des zweiten Syſtems eine gerade Linie des erſten Syſtems entſpricht, heißen reciproke Figuren oder Syſteme. Der Punkt und die ihm entſprechende Gerade werden in Beziehung auf einander Pol und Polarlinie (oder Polare) genannt.

Es ſeyen xy die rechtwinkligen oder ſchiefwinkligen Coordinaten eines Punktes in dem einen Syſteme, und tu die rechtwinkligen oder ſchiefwinkligen, auf dieſelben oder auf andere Achſen bezogenen, Coordinaten eines Punktes in dem reciproken Syſteme. Soll nun dem Punkte xy die Gerade

$$mu+nt+p = 0$$

entſprechen, ſo müſſen m, n und p von x und y abhängig ſeyn, oder es muß $m = \varphi(x,y)$, $n = \psi(x,y)$ und $p = f(x,y)$ ſeyn. Die Gleichung der dem Punkte xy entſprechenden Geraden iſt daher

$$\varphi(x,y)u+\psi(x,y)t+f(x,y) = 0 .$$

Damit aber, in Folge dieſer Relation zwiſchen x, y, t und u, dem Punkte tu eine Gerade im Syſteme xy entſpreche, muß dieſe Gleichung auch in Beziehung auf x und y vom erſten Grade ſeyn, was nur der Fall iſt, wenn die Functionen φ, ψ und f vom erſten Gerade ſind, oder, wenn $\varphi(x,y) = ay+bx+c$, $\psi(x,y) = a'y+b'x+c'$ und $f(x,y) = a''y+b''x+c''$, wodurch die in Rede ſtehende Gleichung die Form

$$(ay+bx+c)u+(a'y+b'x+c')t+a''y+b''x+1 = 0 \quad (1)$$

erhält, wo ſtatt c'' die Einheit geſetzt iſt, indem man, wenn c'' nicht gleich

Es giebt also in dem Falle, in welchem die untern Zeichen gelten, im Allgemeinen keinen Situationspunkt. Findet aber die letzte Bedingungsgleichung Statt, so fallen die beiden vorher genannten Gleichungen in eine einzige §. 18.

$$\sin\frac{\beta}{2}y-\cos\frac{\beta}{2}x=\frac{p'}{2\sin\frac{\beta}{2}} \qquad (2)$$

zusammen, so daß jeder Punkt der Geraden, welche durch diese Gleichung ausgedrückt wird, ein Situationspunkt ist. Nimmt man einen solchen Punkt zum Anfangspunkt der gemeinschaftlichen Coordinatenachsen beider Systeme, so verschwinden in den Gleichungen (1) die Constanten p' und p'', so daß

$$u=\cos\beta y+\sin\beta x \;;\; t=\sin\beta y-\cos\beta x,$$

und wenn man diese Achsen so dreht, daß die neue Abscissenachse mit der alten den Winkel $\pi-\frac{\beta}{2}$ macht, und demgemäß (F. 9. §. 3.)

$\cos\frac{\beta}{2}t+\sin\frac{\beta}{2}u$ statt u, $\sin\frac{\beta}{2}t-\cos\frac{\beta}{2}u$ statt t, $\cos\frac{\beta}{2}x+\sin\frac{\beta}{2}y$ statt y und $\sin\frac{\beta}{2}x-\cos\frac{\beta}{2}y$ statt x setzt, und u und t entwickelt, so ergiebt sich

$$u=-y \;;\; t=x.$$

Die neue Abscissenachse, welche keine andere als die durch die Gleichung (2) ausgedrückte gerade Linie ist, kann die Situationsachse genannt werden.

Ein Situationspunkt gleicher Systeme hat die merkwürdige Eigenschaft, daß je zwei Gerade, die von ihm nach zwei sich entsprechenden Punkten gezogen werden, einander gleich sind (S. 57.).

Eine Anwendung des bisher Gesagten auf einen besondern Fall ist das Folgende. Wenn zwei gleiche Polygone in derselben Ebene so liegen, daß das eine Polygon durch bloße Verrückung und Drehung, ohne daß eine Umwendung nöthig ist, mit dem andern zur Congruenz gebracht werden kann; so giebt es immer in dieser Ebene einen Punkt (den Situationspunkt), der die Eigenschaft hat, daß die von ihm nach den homologen Eckpunkten der Polygone gezogenen Geraden gleich groß sind. Dieser

§. 18. Punkt liegt in unendlicher Entfernung, wenn beide Polygone eine parallele Lage haben. Iſt aber eine Umwendung des einen Polygons nöthig, um es mit dem andern zur Congruenz zu bringen, ſo giebt es im Allgemeinen keinen Punkt der gemeinſchaftlichen Ebene, der die angegebene Eigenſchaft hat.

Von der Reciprocität.

§. 19.

Zwei Figuren oder Syſteme von Punkten und Linien, welche ſo beſchaffen ſind, daß jedem Punkte des einen Syſtems eine gerade Linie des andern Syſtems, und umgekehrt jedem Punkte des zweiten Syſtems eine gerade Linie des erſten Syſtems entſpricht, heißen reciproke Figuren oder Syſteme. Der Punkt und die ihm entſprechende Gerade werden in Beziehung auf einander Pol und Polarlinie (oder Polare) genannt.

Es ſeyen xy die rechtwinkligen oder ſchiefwinkligen Coordinaten eines Punktes in dem einen Syſteme, und tu die rechtwinkligen oder ſchiefwinkligen, auf dieſelben oder auf andere Achſen bezogenen, Coordinaten eines Punktes in dem reciproken Syſteme. Soll nun dem Punkte xy die Gerade

$$mu+nt+p = 0$$

entſprechen, ſo müſſen m, n und p von x und y abhängig ſeyn, oder es muß $m = \varphi(x,y)$, $n = \psi(x,y)$ und $p = f(x,y)$ ſeyn. Die Gleichung der dem Punkte xy entſprechenden Geraden iſt daher

$$\varphi(x,y)u+\psi(x,y)t+f(x,y) = 0 .$$

Damit aber, in Folge dieſer Relation zwiſchen x, y, t und u, dem Punkte tu eine Gerade im Syſteme xy entſpreche, muß dieſe Gleichung auch in Beziehung auf x und y vom erſten Grade ſeyn, was nur der Fall iſt, wenn die Functionen φ, ψ und f vom erſten Gerade ſind, oder, wenn $\varphi(x,y) = ay+bx+c$, $\psi(x,y) = a'y+b'x+c'$ und $f(x,y) = a''y+b''x+c''$, wodurch die in Rede ſtehende Gleichung die Form

$$(ay+bx+c)u+(a'y+b'x+c')t+a''y+b''x+1 = 0 \quad (1)$$

erhält, wo ſtatt c'' die Einheit geſetzt iſt, indem man, wenn c'' nicht gleich

1 wäre, die ganze Gleichung durch c'' dividiren und sie dadurch auf diese Form bringen könnte. Diese Gleichung (1), welcher man auch die Form §. 19.

$$(au+a't+a'')y+(bu+b't+b'')x+cu+c't+1=0 \qquad (2)$$

geben kann, drückt also, wenn man x und y als constant betrachtet, die Polare des Punktes xy, und wenn man t und u als constant ansieht, die Polare des Punktes tu aus.

Die Coordinaten x, y des Pols einer Polarlinie, deren Gleichung

$$mu+nt+1=0$$

gegeben ist, werden gefunden, wenn man diese Gleichung der Gleichung (1) identisch setzt, woraus die Gleichungen

$$\frac{ay+bx+c}{a''y+b''x+1}=m \quad ; \quad \frac{a'y+b'x+c'}{a''y+b''x+1}=n \qquad (3)$$

hervorgehen, welche hinreichend sind, um x und y zu bestimmen.

Die Polare des Durchschnittspunktes t'u' zweier Geraden enthält die Pole x'y' und x''y'' dieser Geraden, und umgekehrt die Polarlinien zweier Punkte x'y' und x''y'' gehen durch den Pol der Verbindungslinie dieser Punkte. Denn weil x'y' und x''y'' die Pole sind, haben die erstgenannten Geraden zu Gleichungen

$$(ay'+bx'+c)y+(a'y'+b'x'+c')t+a''y'+b''x'+1=0,$$
$$(ay''+bx''+c)u+(a'y''+b'x''+c')t+a''y''+b''x''+1=0,$$

welche von den Coordinaten des Durchschnittspunktes t'u' befriedigt werden müssen, so daß man hat

$$(ay'+bx'+c)u'+(a'y'+b'x'+c')t'+a''y'+b''x'+1=0,$$
$$(ay''+bx''+c)u'+(a'y''+b'x''+c')t'+a''y''+b''x''+1=0,$$

welche beiden Gleichungen auch die Resultate der Substitutionen von x'y' und x''y'' in die Gleichung der Polarlinie des Punktes t'u', nämlich in $(ay+bx+c)u'+(a'y+b'x+c')t'+a''y+b''x+1=0$, sind. Diese Gleichung wird also von den Coordinaten x'y' und x''y'' befriedigt; folglich geht die Polare des Punktes t'u' durch die Punkte x'y' und x''y''.

Hieraus ergiebt sich Folgendes: Die Polarlinien von drei oder mehrern Punkten, die in gerader Linie liegen, schneiden sich in einem und demselben Punkte, dem Pole jener Geraden; und umgekehrt, die Pole von drei oder mehrern Geraden, die sich in einem und demselben Punkte schneiden, liegen in gerader

§. 19. die Gleichung der Polare des Punktes $t'u' \ldots F(x, y, t', u') = 0$, (7)
" " " " " " $t''u'' \ldots F(x, y, t'', u'') = 0$. (8)

Bezeichnet man ferner die Resultate der Substitution von x', y' und x'', y'' für x, y in

$ay + bx + c$ und $a'y + b'x + c'$ respective durch m' u. n' und m'' u. n'';

ferner die Resultate der Substitution von t', u' und t'', u'' für t, u in

$au + a't + a''$ und $bu + b't + b''$ respective durch p' u. q' und p'' u. q'';

und benennt man endlich die Länge der Perpendikel

von den Punkten $x'y'$ und $x''y''$ auf die Gerade (7) mit α' und α'',
" " " $x'y'$ und $x''y''$ " " " (8) " β' und β'',
" " " $t'u'$ und $t''u''$ " " " (5) " A' und A'',
" " " $t'u'$ und $t''u''$ " " " (6) " B' und B'';

so hat man (§. 7. S. 6.)

$$\alpha'\sqrt{p'^2+q'^2} = F(x', y', t', u') \quad ; \quad \beta'\sqrt{p''^2+q''^2} = F(x', y', t'', u'') \quad ;$$
$$A'\sqrt{m'^2+n'^2} = F(x', y', t', u') \quad ; \quad B'\sqrt{m''^2+n''^2} = F(x'', y'', t', u') \quad ;$$
$$\alpha''\sqrt{p''^2+q''^2} = F(x'', y'', t', u') \quad ; \quad \beta''\sqrt{p''^2+q''^2} = F(x'', y'', t'', u'') \quad ;$$
$$A''\sqrt{m''^2+n''^2} = F(x', y', t'', u'') \quad ; \quad B''\sqrt{m''^2+n''^2} = F(x'', y'', t'', u'') \quad .$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar

$$\frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{F(x', y', t', u')}{F(x'', y'', t', u')} \quad ; \quad \frac{\beta'}{\beta''} = \frac{F(x', y', t'', u'')}{F(x'', y'', t'', u'')} \quad ;$$
$$\frac{A'}{A''} = \frac{F(x', y', t', u')}{F(x', y', t'', u'')} \quad ; \quad \frac{B'}{B''} = \frac{F(x'', y'', t', u')}{F(x'', y'', t'', u'')} \quad ;$$

und sodann

$$\frac{\alpha'}{\alpha''} : \frac{A'}{A''} = F(x', y', t'', u'') : F(x'', y'', t', u') \quad ;$$
$$\frac{\beta'}{\beta''} : \frac{B'}{B''} = F(x', y', t'', u'') : F(x'', y'', t', u') \quad ,$$

woraus ferner

$$\frac{\alpha'}{\alpha''} : \frac{A'}{A''} = \frac{\beta'}{\beta''} : \frac{B'}{B''} \quad .$$

Daher hat man den

Lehrsatz [11]. Wenn man zwei Punkte A, B in einem Systeme, ferner zwei Punkte C', D' in einem reciproken Systeme beliebig annimmt, und von A und B auf die Polaren c, d von C', D' die Senkrech:

rechten Ac, Ad, Bc u. Bd fällt; wenn man ferner von den Punkten C', D' auf die Polaren a', b' von A, B die Senkrechten C'a', C'b', D'a', D'b' herabläßt, so ist §. 19.

$$\frac{Ac}{Bc} : \frac{C'a'}{D'a'} = \frac{Ad}{Bd} : \frac{C'b'}{D'b'}, \quad \text{oder} \quad \frac{Ac}{Bc} : \frac{Ad}{Bd} = \frac{C'a'}{D'a'} : \frac{C'b'}{D'b'}.$$

Nicht bloß die Perpendikel, sondern, wie leicht einzusehen ist, auch andere gerade Linien, die durch die genannten Punkte an die angegebenen Geraden gezogen werden, wenn sie mit den Perpendikeln, also auch mit den angegebenen Geraden, gleiche Winkel bilden, stehen in einer analogen Beziehung zu einander.

Es seyen nun A, B, C, D vier in gerader Linie liegende Punkte, und Fig. 19.
a', b', c', d' ihre Polaren, die sich in dem Pole P' dieser Geraden schneiden. Es sey ferner eine beliebige Gerade gezogen, welche die Polaren a', b', c', d' in den Punkten A', B', C', D' schneidet, und P der Pol dieser Geraden. Endlich seyen auch PB und PC gezogen, welche, als Verbindungslinien der Pole P und B, P und C, die Polaren b, c der Durchschnittspunkte B' und C' sind. Nun können AB und BD als zwei Gerade betrachtet werden, welche die Gerade b unter gleichen Winkeln schneiden; dasselbe gilt von AC und CD in Beziehung auf die Gerade c, und auch von B'A', C'A' und von B'D', C'D' in Beziehung auf a' und d'. Daher ist

$$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{A'B'}{A'C'} : \frac{B'D'}{C'D'}, \quad \text{oder} \quad \frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{A'B'}{B'D'} : \frac{A'C'}{C'D'},$$

eine Relation, welche der Relation (8) in §. 11. analog ist.

Wenn nun vier in gerader Linie liegende Punkte eines Systems und drei von den ihnen entsprechenden Polarlinien des reciproken, oder wenn vier sich in einem Punkte schneidende Gerade eines Systems und drei von den ihnen entsprechenden Polen des reciproken Systems gegeben sind, so kann (wie in der Aufgabe 19, §. 11.) die vierte Polare oder der vierte Pol durch Construction gefunden werden, was keiner weitern Ausführung bedarf; und dadurch ist man im Stande, die folgende Aufgabe zu lösen.

Aufgabe [23]. Es sind vier Pole A, B, C, D eines Systems, von Fig. 20.
denen nicht drei in gerader Linie liegen, und ihre vier Polaren a', b', c', d' in einem reciproken Systeme, von denen also auch nicht drei sich in einem Punkte schneiden, gegeben. Man soll 1) zu einem fünften gegebenen Punkte E des ersten Systems, die Polare e' im reciproken, und

§. 19. umgekehrt 2) zu einer fünften gegebenen Geraden e' im reciproken Syſteme den Pol E in dem erſten Syſteme durch Conſtruction finden.

Man ziehe die Geraden AB und CD, die ſich in M, und AD und BC, die ſich in N ſchneiden mögen, und verbinde die Durchſchnittspunkte A' u. C' von a', b' und von c', d' durch die Gerade A'C', und die Durchſchnittspunkte D' u. B' von a', d' und von b', c' durch die Gerade B'D'; ſo iſt A'C' die Polare des Punktes M, und B'D' die Polare des Punktes N.

1) Man ziehe von N und M durch den gegebenen Punkt E gerade Linien, die die Geraden AB und AD in P und Q treffen mögen. Vermittelſt der vier bekannten, in gerader Linie liegenden, Punkte A, B, M, P und der drei Polarlinien A'D', A'B', A'C' beſtimme man die Polare des Punktes P, welche B'D' in P' treffen möge, ſo iſt P', als Durchſchnitt der beiden Polaren von P und N, der Pol von NP. Ferner beſtimme man vermittelſt der vier bekannten, in gerader Linie liegenden, Punkte A, D, N, Q und der drei Polarlinien A'D', C'D', B'D' die Polare des Punktes Q, welche A'C' in Q' treffe, ſo iſt Q', als Durchſchnitt der beiden Polaren von M und Q, der Pol von MQ. Verbindet man nun P' und Q' durch eine Gerade, ſo iſt dieſe, indem ſie die Pole von NP und MQ enthält, die Polare des Durchſchnittspunktes E.

2) Man verlängere A'C' und D'B', bis ſie die gegebene Gerade e' in Q' und P' treffen. Vermittelſt der vier bekannten, in einem Punkte zuſammentreffenden, Geraden A'D', A'B', A'C', A'P' und der drei Pole A, B, M beſtimme man den Pol P von A'P' und ziehe ſodann PN; ſo iſt PN, als Verbindungslinie der Pole von A'P' und B'D', die Polare des Durchſchnittspunktes P'. Ferner beſtimme man vermittelſt der vier bekannten, in einem Punkte zuſammentreffenden, Geraden A'D', C'D', B'D', Q'D' und der drei Pole A, D, N den Pol Q von Q'D', und ziehe ſodann QM, ſo iſt QM, als Verbindungslinie der Pole von Q'D' und A'C', die Polare des Durchſchnittspunktes Q'. Der Durchſchnittspunkt E der beiden Polaren PN und QM von P' und Q' iſt alsdann der Pol der Verbindungslinie e' von P' und Q'.

Zwei Syſteme, die mit einem dritten in der Beziehung der Reciprocität ſtehen, ſind einander collinear-verwandt. Denn es ſeyen x y und r s die Coordinaten der beiden erſten Syſteme, und t u die des dritten; ferner ſey $mu+nt+1=0$ die Gleichung einer Geraden in dieſem letzten Syſteme; ſo hat man, wenn a, b, c u. ſ. w. die Conſtanten

für das erste und f, g, h u. s. w. die Constanten für das zweite System §. 19.
bedeuten, zufolge der Gleichungen (3)

$$\frac{ay+bx+c}{a''y+b''x+1}=m\ ;\quad \frac{a'y+b'x+c'}{a''y+b''x+1}=n\ ;$$
$$\frac{fs+gr+h}{f''s+g''r+1}=m\ ;\quad \frac{f's+g'r+h'}{f''s+g''r+1}=n\ ,$$

woraus

$$\frac{fs+gr+h}{f''s+g''r+1}=\frac{ay+bx+c}{a''y+b''x+1}\ ;\quad \frac{f's+g'r+h'}{f''s+g''r+1}=\frac{a'y+b'x+c'}{a''y+b''x+1}\ ,$$

zwei Gleichungen, welche, zufolge des §. 11., die Verwandtschaft der Collimation zwischen den Systemen in rs und xy ausdrücken, was eben gezeigt werden sollte.

§. 20.

Wir nehmen jetzt an, daß die beiden reciproken Systeme, deren gegenseitige Relation durch die Gleichung (1) oder (2) des vor. §. ausgedrückt ist, auf dieselben Coordinatenachsen bezogen seyen. Alsdann hat irgend ein bestimmter Punkt der gemeinschaftlichen Ebene beider Systeme, dessen Coordinaten p, q seyn mögen, wenn man ihn als einen Punkt im Systeme xy ansieht, die Polare

$$(aq+bp+c)u+(a'q+b'p+c')t+a''q+b''p+1=0\ ,$$

und, wenn ihn als einen Punkt im Systeme tu betrachtet, die Polare

$$(aq+a'p+a'')y+(bq+b'p+b'')x+cq+c'p+1=0\ .$$

Diese beide Gleichungen drücken im Allgemeinen nicht dieselbe gerade Linie aus; indessen kann durch bloße Veränderung der gegenseitigen Lage beider Systeme bewirkt werden, daß beide Polaren zusammenfallen, welches auch der Punkt pq seyn mag.

Der Kürze wegen wollen wir annehmen, daß beide Systeme auf dieselben rechtwinkligen Achsen bezogen seyen, was geschehen kann, weil die Form der Gleichung (1) oder (2) durch eine Transformation auf rechtwinklige Coordinaten unverändert bleibt. Wird nun die Lage des Systems in xy geändert, während die Lage des Systems in tu dieselbe bleibt, so ist dies eben so viel, als ob die Lage der Coordinatenachsen von xy geändert wird, während die Lage der Achsen von tu unverrückt bleibt. Bezeichnen also x', y' die Coordinaten des Anfangspunktes der neuen xy und β den Winkel, welchen die neuen Achsen mit den alten machen, so verwandelt sich,

§. 20. zufolge der Transformations-Formeln im §. 3., die Gleichung (1) des vorigen §. in

$$\left.\begin{aligned}&\{(a\cos\beta - b\sin\beta)y+(a\sin\beta + b\cos\beta)x+ay'+bx'+c\}u\\ +&\{(a'\cos\beta - b'\sin\beta)y+(a'\sin\beta + b'\cos\beta)x+a'y'+b'x'+c'\}t\\ +&\ (a''\cos\beta - b''\sin\beta)y+(a''\sin\beta + b''\cos\beta)x+a''y'+b''x'+1\end{aligned}\right\}=0\,.\ (1)$$

Da aber der Winkel β und die Coordinaten x', y' willkührlich gewählt werden können, so wollen wir diese Größen so bestimmen, daß

$$\begin{aligned}a\sin\beta + b\cos\beta &= a'\cos\beta - b'\sin\beta\ ,\\ ay'+bx'+c &= a''\cos\beta - b''\sin\beta\ ,\\ a'y'+b'x'+c' &= a''\sin\beta + b''\cos\beta\end{aligned}$$

sey. Aus der ersten dieser drei Gleichungen erhält man $tang\,\beta = \frac{a'-b}{a+b'}$, woraus sich $\sin\beta$ und $\cos\beta$ in a, a', b u. b' ausdrücken lassen, und wenn man diese Ausdrücke in die beiden letzten Gleichungen setzt, so erhält man auch, da sie in Beziehung auf x' und y' vom ersten Grade sind, für x' und y' immer reelle Werthe. Setzt man diese und die Werthe von $\sin\beta$ und $\cos\beta$ in die Coefficienten der Gleichung (1), und bezeichnet die Resultate dieser Substitution in

$a\cos\beta - b\sin\beta$ durch A, $a'\sin\beta + b'\cos\beta$ durch C, $a''y'+b''x'+1$ durch F, $a\sin\beta + b\cos\beta = a'\cos\beta - b'\sin\beta$ durch B, $ay'+bx'+c = a''\cos\beta - b''\sin\beta$ durch D

und $a'y'+b'x'+c' = a''\sin\beta + b''\cos\beta$ durch E,

so kommt

$$(Ay+Bx+D)u+(By+Cx+E)t+Dy+Ex+F = 0\ ,\quad (2)$$

oder auch

$$(Au+Bt+D)y+(Bu+Ct+E)x+Du+Et+F = 0\ .\quad (3)$$

Diese Gleichungen sind es, welche die Relation der beiden Systeme in ihrer gegenseitigen neuen Lage auf dieselben Achsen bezogen angeben. Und man sieht, daß beide Gleichungen dieselbe Gerade ausdrücken, wenn in der ersten für x u. y, und in der zweiten für t u. u, p u. q gesetzt werden. In dieser neuen Lage hat also jeder Punkt der gemeinschaftlichen Ebene dieselbe Polare, er mag nun als zu dem einen Systeme oder als zu dem andern gehörend, angesehen werden.

Die Symmetrie, welche in den Gleichungen (2) und (3) herrscht, tritt noch mehr heraus, wenn man sie wie folgt

$$Ayu+B(xu+yt)+Cxt+D(u+y)+E(t+x)+F=0 \quad (4)$$ §. 20.

schreibt; und dieſe Symmetrie geht, wie ſich von vorn herein einſehen läßt, nicht verloren, wenn man die Gleichung auf ſchiefwinklige Achſen transformirt, wovon man ſich übrigens durch Subſtitution der Ausdrücke

$\cos\gamma\, y' + \cos\beta\, x'$; $\sin\gamma\, y' + \sin\beta\, x'$; $\cos\gamma\, u' + \cos\beta\, t'$; $\sin\gamma\, u' + \sin\beta\, t'$

reſpective für x, y, t, u (§. 3. F. 7.) überzeugen kann.

Es darf nicht unbemerkt bleiben, daß bei der in Rede ſtehenden Lage die Mittelpunkte beider Syſteme, wenn es ſolche giebt, auf einander liegen. Denn die im vorigen §. aufgeſtellten Gleichungen, durch welche die Coordinaten der Mittelpunkte beſtimmt werden, verwandeln ſich bei der gegenwärtigen Lage in

$$Ay+Bx+D=0 \quad ; \quad By+Cx+E=0\,,$$
$$Au+Bt+D=0 \quad ; \quad Bu+Ct+E=0\,,$$

und geben alſo für x und t ſowohl als für y und u dieſelben Werthe, und folglich, da die Coordinatenachſen dieſelben ſind, auch denſelben Mittelpunkt.

§. 21.

Wir kommen jetzt auf die im §. 19. bewieſene Eigenſchaft zweier reciproken Syſteme zurück, daß ſich nämlich die Polaren von Punkten, die in gerader Linie liegen, in einem und demſelben Punkte ſchneiden, und daß die Pole von Geraden, die ſich in einem Punkte ſchneiden, in einer und derſelben Geraden liegen, weil ſie es iſt, die die Betrachtung reciproker Figuren beſonders fruchtbar macht; denn aus jedem Satze, der keine Größenbeſtimmung enthält, läßt ſich vermittelſt dieſer Eigenſchaft ein anderer Satz ableiten, deſſen Richtigkeit keines Beweiſes mehr bedarf. Um dies an einem Beiſpiele klar zu machen, wählen wir den im §. 8. bewieſenen Lehrſatz (2).

Conſtruirt man die reciproke Figur zu derjenigen, auf welche die in dieſem Lehrſatze angegebene Conſtruction führt, ſo ergiebt ſich Folgendes. Den drei in gerader Linie ABC liegenden Punkten A, B, C entſprechen in der reciproken Figur drei ſich in einem Punkte $(\alpha\beta\gamma)$ ſchneidende Gerade, die Polaren jener Punkte nämlich, die wir durch α, β, γ bezeichnen. Den drei durch A, B, C beliebig gezogenen Geraden AB', BC', CA' entſprechen drei auf α, β, γ beliebig angenommene Punkte, die Pole jener Geraden, die wir durch $(\alpha\beta')$, $(\beta\gamma')$, $(\gamma\alpha')$ bezeichnen. Den drei Durchſchnittspunkten A', B', C' von AB', BC', CA' entſprechen die drei Verbindungslinien von $(\alpha\beta')$, $(\beta\gamma')$, $(\gamma\alpha')$, die wir durch α', β', γ' bezeichnen. Den Verbindungslinien

§. 21. von B und B′, C und C′ entsprechen die Durchschnittspunkte von β und β', γ und γ', die wir durch $(\beta\beta')$, $(\gamma\gamma')$ bezeichnen. Der Verbindungslinie A′O des dritten Durchschnittspunktes A′ und des Durchschnitts O von BB′ und CC′ entspricht der Durchschnittspunkt $(\alpha'\omega)$ von α' und der Verbindungslinie ω von $(\beta\beta')$ und $(\gamma\gamma')$. Dem Punkte P der Geraden ABC, durch welchen A′O geht, entspricht eine Gerade π, die durch den Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ geht, und auf welcher $(\alpha'\omega)$ liegt. Da nun der Punkt P ein bestimmter ist, wie auch die drei von A, B, C ausgehenden Linien AB′, BC′, CA′ gezogen seyn mögen; so ist auch die Gerade π eine bestimmte, wie auch die Punkte $(\alpha\beta')$, $(\beta\gamma')$, $(\gamma\alpha')$ auf α, β, γ angenommen seyn mögen. Betrachten wir nun bloß die reciproke Figur, so haben wir drei, sich in einem Punkte $(\alpha\beta\gamma)$ schneidende, Gerade α, β, γ; auf jeder derselben einen beliebig angenommenen Punkt $(\alpha\beta')$, $(\beta\gamma')$, $(\gamma\alpha')$; die drei Verbindungslinien α', β', γ' dieser Punkte; die Durchschnittspunkte $(\beta\beta')$, $(\gamma\gamma')$ von β und β', γ und γ'; die Verbindungslinie ω von $(\beta\beta')$ und $(\gamma\gamma')$; den Durchschnitt $(\alpha'\omega)$ von α' und ω; die Gerade π, welche den Punkt $(\alpha'\omega)$ enthält und durch den Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ geht. Der Ort des Punktes $(\alpha'\omega)$ ist daher eine Gerade, die durch den Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ geht, wie auch die Punkte $(\alpha\beta')$, $(\beta\gamma')$, $(\gamma\alpha')$ auf α, β, γ angenommen seyn mögen. Dies ist der zu Ende des §. 8. hergeleitete Satz oder der Lehrsatz (3) im §. 9., der also, wie man eben gesehen hat, aus einem andern Satze unmittelbar abgeleitet werden kann.

Um eine solche Ableitung eines Satzes aus einem andern zu machen, ist es keineswegs nöthig, die reciproke Figur, auf die es dabei allerdings immer ankommt, vollständig construirt sich zu denken. Es reicht vielmehr hin, wenn man in einem vorgelegten Satze „gerade Linien" für „Punkte," „Punkte" für „gerade Linien," „Zusammentreffen in einem Punkte" für „Liegen in gerader Linie" und „Liegen in gerader Linie" für „Zusammentreffen in einem Punkte" überall setzt, um auf der Stelle den abzuleitenden Satz zu erhalten. Damit der Zusammenhang eines Satzes mit dem durch die Reciprocität aus ihm abgeleiteten besser hervortrete, pflegt man zuweilen beide Sätze neben einander zu stellen, wie dies mit den folgenden geschieht, von welcher die in der ersten Columne stehenden in den §§. 9. u. 15. bewiesen sind.

Wenn die n Seitenlinien eines n-seitigen Polygons sich um eben so	Wenn die n Eckpunkte eines n-eckigen Polygons sich auf eben so

viele feste, in gerader Linie liegende, Punkte drehen, während (n—1) Eckpunkte desselben sich auf (n—1) festen Geraden bewegen, so beschreibt der nte Eckpunkt eine gerade Linie.

Wenn die drei Verbindungslinien der Eckpunkte zweier Dreiecke sich in einem Punkte schneiden, so liegen die drei Durchschnittspunkte der, diesen Eckpunkten gegenüberliegenden, Seiten in gerader Linie.

vielen, sich in einem Punkte schneidenden, Geraden bewegen, während (n—1) Seitenlinien desselben, sich um (n—1) feste Punkte drehen, so dreht sich die nte Seitenlinie um einen Punkt. §. 21.

Wenn die drei Durchschnittspunkte der Seiten zweier Dreiecke in gerader Linie liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien der, diesen Seiten gegenüberliegenden, Eckpunkte in einem Punkte.

Vom Kreise.

§. 22.

Aufgabe [24]. Die Gleichung des Kreises zu finden.

Nach der gewöhnlichen Definition ist der Kreis eine ebene Linie, welche die Eigenschaft hat, daß jeder ihrer Punkte von einem gewissen Punkte ihrer Ebene, welcher der Mittelpunkt heißt, gleich weit entfernt ist, welche Entfernung der Radius des Kreises genannt wird. Demzufolge hat man, wenn $x'y'$ die Coordinaten des Mittelpunktes sind, und wenn r der Radius des Kreises ist, für jeden Punkt der Kreislinie (§. 2. F. 4.)

$$(y-y')^2+2(x-x')(y-y')\cos\alpha+(x-x')^2=r^2\ ,$$

oder, wenn der Coordinatenwinkel α ein rechter ist, was wir in diesem Capitel immer annehmen werden,

$$(y-y')^2+(x-x')^2=r^2 \quad \text{oder} \quad y^2+x^2-2y'y-2x'x+y'^2+x'^2-r^2=0\ .$$

Nimmt man den Mittelpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten, so ist $x'=0$ und $y'=0$, daher die Gleichung des Kreises alsdann

$$y^2+x^2=r^2\ .$$

Wenn man aber einen Punkt der Peripherie zum Anfangspunkte nimmt und die Abscissenachse durch den Mittelpunkt legt, so ist $y'=0$ und $x'=\pm r$, wo das obere Zeichen gilt, wenn der Mittelpunkt auf der positiven,

§. 22. und das untere Zeichen, wenn er auf der negativen Seite der Abſciſſenachſe liegt. Daher iſt alsdann die Gleichung des Kreiſes

$$y^2+x^2-2rx = 0 \quad \text{oder} \quad y^2+x^2+2rx = 0 .$$

Aufgabe [25]. Den Radius und die Mittelpunkts-Coordinaten eines Kreiſes zu finden, deſſen Gleichung $y^2+x^2+Dy+Ex+F = 0$ gegeben iſt.

Wären die Coordinaten des Mittelpunktes x', y' und der Radius r bekannt, ſo wäre (vor. Aufg.)

$$y^2+x^2-2y'y-2x'x+x'^2+y'^2-r^2 = 0$$

die Gleichung des in Rede ſtehenden Kreiſes. Setzt man nun dieſe Gleichung der gegebenen identiſch, ſo ergiebt ſich

$$-2y' = D \;\; ; \;\; -2x' = E \;\; ; \;\; y'^2+x'^2-r^2 = F ;$$

und hieraus

$$y' = -\tfrac{1}{2}D \;\; ; \;\; x' = -\tfrac{1}{2}E \;\; ; \;\; r = \tfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F} .$$

Aufgabe [26]. Den Ort der Scheitel derjenigen Dreiecke zu finden, welche auf einer gegebenen Grundlinie ſtehen und einen gegebenen Winkel am Scheitel haben.

Es ſey die gegebene Grundlinie $= 2a$, und der gegebene Winkel $= \alpha$. Nimmt man die Richtung der Grundlinie zur Abſciſſenachſe und die Senkrechte in ihrem Halbirungspunkte zur Ordinatenachſe, ſo ſind

$$y = m(x-a) \quad \text{und} \quad y = n(x+a)$$

die Gleichungen der Seiten eines der in Rede ſtehenden Dreiecke, wenn m und n ſo beſtimmt werden, daß (§. 6. Aufg. 8.)

$$tang\,\alpha = \frac{n-m}{1+nm} .$$

Eliminirt man m und n zwiſchen den eben aufgeſtellten drei Gleichungen, ſo kommt

$$y^2+x^2-\frac{2a}{tg\,\alpha}y-a^2 = 0$$

als Gleichung für den Ort des Durchſchnittspunktes der beiden Seiten des Dreiecks, d. i. des Scheitels des Dreiecks. Dieſe Gleichung drückt nun, wie man ſieht, einen Kreis aus, und für die Coordinaten ſeines Mittelpunktes und für den Radius findet man (vor. Aufg.)

$$y' = \frac{a}{tang\,\alpha} = a\,cotg\,a \;\; ; \;\; x' = 0 \;\; ; \;\; r = \frac{a}{sin\,\alpha} = a\,cosec\,\alpha .$$

Aufgabe [27]. Den Ort der Scheitel derjenigen Dreiecke zu finden, welche auf einer gegebenen Grundlinie stehen, und in welchen die beiden Schenkel ein gegebenes Verhältniß haben. §. 22.

Es sey die gegebene Grundlinie $= a$ und das gegebene Verhältniß $m:n$. Nimmt man die Richtung der Grundlinie zur Abscissenachse, einen ihrer Endpunkte zum Anfangspunkt der Coordinaten, und nennt die Coordinaten des Scheitels x u. y; so sind die Längen der Schenkel (§. 2. F. 5.) durch $\sqrt{y^2+x^2}$ und $\sqrt{y^2+(x-a)^2}$ auszudrücken. Da nun diese Größen sich wie $m:n$, also ihre Quadrate wie $m^2:n^2$ verhalten sollen, so muß

$$n^2(y^2+x^2) = m^2\left\{y^2+(x-a)^2\right\} \text{ oder } (n^2-m^2)(y^2+x^2)+2m^2ax-m^2a^2 = 0$$

oder auch

$$y^2+x^2+\frac{2m^2a}{n^2-m^2}x-\frac{m^2a^2}{n^2-m^2} = 0$$

seyn. Der gesuchte Ort des Scheitels ist demnach ein Kreis, für dessen Mittelpunkts-Coordinaten und Radius (Aufg. 25.)

$$y' = 0 \quad ; \quad x' = \frac{m^2a}{m^2-n^2} \quad ; \quad r = \frac{mn}{m^2-n^2}a$$

gefunden wird. Die Entfernungen des Mittelpunktes von den Endpunkten der Grundlinie sind x' und $x'-a$, oder, wenn man für x' den so eben genannten Werth setzt, $\frac{m^2a}{m^2-n^2}$ und $\frac{n^2a}{m^2-n^2}$; daher ist ihr Product $= \frac{m^2n^2}{(m^2-n^2)^2}a^2$. Da nun dieser Ausdruck $= r^2$ ist, so folgt, daß der Radius die mittlere Proportionale zwischen den Entfernungen des Mittelpunktes von den Endpunkten der Grundlinie der Dreiecke ist.

Wenn $m = n$, d. i. wenn die Dreiecke gleichschenklig seyn sollen, so verschwinden in der Gleichung des Ortes, nämlich in

$$(n^2-m^2)y^2+(n^2-m^2)x^2+2m^2ax-m^2a^2 = 0$$

die Glieder, welche die höchsten Potenzen von x u. y enthalten, und diese Gleichung geht in

$$x-\frac{a}{2} = 0$$

über. Der Kreis degenerirt alsdann in eine gerade Linie, welche die Grundlinie der Dreiecke in ihrem Halbirungspunkte senkrecht schneidet.

§. 22. **Aufgabe** [28]. Es sind drei oder mehrere gerade Linien gegeben. Man soll den Ort eines Punktes P finden, welcher Punkt P so liegt, daß, wenn man von ihm Senkrechte auf die gegebenen Geraden fällt und die Fußpunkte der Senkrechten durch gerade Linien verbindet, diese letztern ein Polygon bilden, welches einen gegebenen Flächeninhalt hat.

Es seyen

$$y = a_1x+b_1 \;;\; y = a_2x+b_2 \;;\; \ldots . y = a_nx+b_n$$

die gegebenen Geraden, s der gegebene Flächeninhalt und t, u die unbekannten Coordinaten des Punktes P.

Die Gleichungen der Senkrechten durch den Punkt P sind alsdann (§. 6. S. 4.)

$$y-u = -\frac{1}{a_1}(x-t) \;;\; y-u = -\frac{1}{a_2}(x-t) \;;\; \ldots . y-u = -\frac{1}{a_n}(x-t) .$$

Daraus findet man die Coordinaten der Fußpunkte dieser Perpendikel

$$x_1 = \frac{a_1u+t-a_1b_1}{1+a_1^2} \;;\; x_2 = \frac{a_2u+t-a_2b_2}{1+a_2^2} \;;\; \ldots x_n = \frac{a_nu+t-a_nb_n}{1+a_n^2},$$

$$y_1 = \frac{a_1^2u+a_1t+b_1}{1+a_1^2} \;;\; y_2 = \frac{a_2^2u+a_2t+b_2}{1+a_2^2} \;;\; \ldots y_n = \frac{a_n^2u+a_nt+b_n}{1+a_n^2} .$$

Da nun diese Punkte die Ecken des Polygons sind, welches den gegebenen Flächeninhalt s haben soll, so braucht man nur die eben gefundenen Ausdrücke in die Formel (§. 10. F. 1.) zu substituiren, und das Resultat gleich s zu setzen. Dies giebt, da der Coordinatenwinkel α ein rechter ist,

$$\left\{\frac{a_1^2a_2-a_1a_2^2}{(1+a_1^2)(1+a_2^2)}+\frac{a_2^2a_3-a_2a_3^2}{(1+a_2^2)(1+a_3^2)}+\ldots+\frac{a_n^2a_1-a_na_1^2}{(1+a_n^2)(1+a_1^2)}\right\}u^2$$

$$+\left\{\frac{a_1^2-a_2^2}{(1+a_1^2)(1+a_2^2)}+\frac{a_2^2-a_3^2}{(1+a_2^2)(1+a_3^2)}+\ldots+\frac{a_n^2-a_1^2}{(1+a_n^2)(1+a_1^2)}\right\}tu$$

$$+\left\{\frac{a_1-a_2}{(1+a_1^2)(1+a_2^2)}+\frac{a_2-a_3}{(1+a_2^2)(1+a_3^2)}+\ldots+\frac{a_n-a_1}{(1+a_n^2)(1+a_1^2)}\right\}t^2$$

$$+\left\{\frac{(a_2b_1-a_1b_2)(1+a_1a_2)}{(1+a_1^2)(1+a_2^2)}+\frac{(a_3b_2-a_2b_3)(1+a_2a_3)}{(1+a_2^2)(1+a_3^2)}+\ldots+\frac{(a_1b_n-a_nb_1)(1+a_na_1)}{(1+a_n^2)(1+a_1^2)}\right\}u$$

$$+\left\{\frac{(b_1-b_2)(1+a_1a_2)}{(1+a_1^2)(1+a_2^2)}+\frac{(b_2-b_3)(1+a_2a_3)}{(1+a_2^2)(1+a_3^2)}+\ldots+\frac{(b_n-b_1)(1+a_na_1)}{(1+a_n^2)(1+a_1^2)}\right\}t$$

$$+\left\{\frac{(a_1-a_2)b_1b_2}{(1+a_1^2)(1+a_2^2)}+\frac{(a_2-a_3)b_2b_3}{(1+a_2^2)(1+a_3^2)}+\ldots+\frac{(a_n-a_1)b_nb_1}{(1+a_n^2)(1+a_1^2)}\right\}-\frac{s}{2}=0\,, \qquad \text{§. 22.}$$

oder kürzer

$$Au^2+Btu+Ct^2+Du+Et+F=0\,.$$

Da nun aber

$$\frac{a_1^2-a_2^2}{(1+a_1^2)(1+a_2^2)}=\frac{a_1^2}{1+a_1^2}-\frac{a_2^2}{1+a_2^2}\,;$$

$$\frac{a_2^2-a_3^2}{(1+a_2^2)(1+a_3^2)}=\frac{a_2^2}{1+a_2^2}-\frac{a_3^2}{1+a_3^2}\,;\ \ldots\frac{a_n^2-a_1^2}{(1+a_n^2)(1+a_1^2)}=\frac{a_n^2}{1+a_n^2}-\frac{a_1^2}{1+a_1^2}\,,$$

so ist erstens $B=0$; und da, wenn man den Coefficienten C von dem Coefficienten A, und zwar Glied für Glied, abzieht,

$$\left(\frac{a_2}{1+a_2^2}-\frac{a_1}{1+a_1^2}\right)+\left(\frac{a_3}{1+a_3^2}-\frac{a_2}{1+a_2^2}\right)+\ldots+\left(\frac{a_1}{1+a_1^2}-\frac{a_n}{1+a_n^2}\right)$$

sich ergiebt, so folgt zweitens, daß $A-C=0$, also $A=C$ ist. Die gefundene Gleichung hat daher die Form

$$u^2+t^2+\frac{D}{A}u+\frac{E}{A}t+\frac{F}{A}=0\,.$$

Demnach ist der gesuchte Ort des Punktes P ein Kreis, und da die Coordinaten des Mittelpunktes,

$$y'=-\frac{D}{2A}\quad;\quad x'=-\frac{E}{2A}\,,$$

nicht von s, sondern bloß von den Constanten, welche in den Gleichungen der gegebenen Linien vorkommen, abhängig sind; so ist dieser Mittelpunkt immer derselbe, welche Größe der Flächeninhalt s auch haben mag *).

§. 23.

Es seyen

$(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2-r^2=0\ldots(1)$ und $(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2-r'^2=0\ldots(2)$

die auf dieselben Achsen bezogenen Gleichungen zweier Kreise. Verändert man den Anfangspunkt der Coordinaten, indem man $u'+y_1$ für u, $t'+x_1$

*) Das Theorem, welches die Lösung dieser Aufgabe enthält, ist in seiner Allgemeinheit zum ersten Male in dem Journale für die reine und angewandte Mathematik Th. I. S. 51. und Th. II. S. 265. aufgestellt und bewiesen worden.

§. 23. für t, $y'+y_1$ für y und $x'+x_1$ für x setzt, wo x_1, y_1 die Coordinaten des neuen Anfangspunkts bedeuten, so erhält man

$$(u'+y_1-\beta)^2+(t'+x_1-\alpha)^2-r^2=0\,, \qquad (3)$$
$$(y'+y_1-\beta')^2+(x'+x_1-\alpha')^2-r'^2=0\,. \qquad (4)$$

Sollen nun beide Kreise als collineare und collinear-liegende Figuren und der neue Anfangspunkt der Coordinaten als Collineationspunkt angesehen werden können, so muß die, durch Substitution der Ausdrücke (§. 12. F. 1.) für u' und t' aus der Gleichung (3) entstehende, neue Gleichung der Gleichung (4) identisch gesetzt werden können. Führt man diese Substitution aus, so findet man, wenn man, der Kürze wegen,

$$x_1-\alpha=X\;;\quad y_1-\beta=Y\;;\quad (y_1-\beta)^2+(x_1-\alpha)^2-r^2=M$$

setzt,

$$\left.\begin{aligned}(p^2+2pmY+m^2M)y'^2+2(pmX+pnY+mnM)x'y'+(p^2+2pnX+n^2M)x'^2\\ +2(pY+mM)y'+2(pX+nM)x'+M=0\,.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Wenn man nun ferner in die Gleichung (4) zur Abkürzung

$$x_1-\alpha'=X'\;;\quad y_1-\beta'=Y'\;;\quad (y_1-\beta')^2+(x_1-\alpha')^2-r'^2=M'$$

setzt, so bekommt diese Gleichung (4) die Form

$$y'^2+x'^2+2Y'y'+2X'x'+M'=0\,. \qquad (6)$$

Damit aber die Gleichungen (5) und (6) identisch seyen, müssen folgende Bedingungsgleichungen Statt finden:

$$\frac{p^2+2pmY+m^2M}{M}=\frac{1}{M'}\;;\quad \frac{p^2+2pnX+n^2M}{M}=\frac{1}{M'}\;;$$
$$pmX+pnY+mnM=0\;;$$
$$\frac{pY+mM}{M}=\frac{Y'}{M'}\;;\quad \frac{pX+nM}{M}=\frac{X'}{M'}\,.$$

Entwickelt man aus den beiden letzten dieser fünf Gleichungen m und n, und setzt die Werthe in die dritte Gleichung, so kommt

$$p^2=\frac{X'Y'M^2}{XYM'^2}\,, \qquad (7)$$

und aus den beiden ersten Gleichungen erhält man nun durch Elimination von m, n und p

$$X'Y'M-XYM'=YY'(X'Y-XY') \text{ und } X'Y'M-XYM'=-XX'(X'Y-XY')\,, \qquad (8)$$

aus welchen beiden Gleichungen x_1 u. y_1 zu bestimmen sind. Durch Subtraction ergiebt sich nun unmittelbar

$$(YY'+XX')(X'Y-XY') = 0\ ,$$ §. 23.

so daß also entweder der Factor $YY'+XX' = 0$ oder der Factor $XY-XY' = 0$ seyn muß. Der erste Factor giebt für Y' den Werth $-\frac{X}{Y}X'$, und wenn dieser in die Gleichung (7) substituirt wird, so kommt

$$p^2 = -\frac{X'^2}{Y^2}\ \frac{M}{M'^2}\ ,$$

ein Ausdruck, der immer negativ ist, wenn X', Y u. s. w. reelle Größen sind; daher wird alsdann p imaginär. Der zweite Factor aber giebt für Y' den Werth $\frac{Y}{X}X'$, wodurch man aus (7)

$$p^2 = \frac{X'^2}{X^2}\ \frac{M^2}{M'^2}$$

findet, so daß man also für p zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe, nämlich

$$p = \pm\frac{X'}{X}\ \frac{M}{M'}\ ,\ \text{oder auch, was jetzt dasselbe ist,}\ p = \pm\frac{Y'}{Y}\ \frac{M}{M'}\ , \quad (9)$$

erhält. Diese beiden Werthe, in die letzten der fünf Bedingungsgleichungen gesetzt, geben, wenn man den Werth von p mit dem obern Zeichen nimmt,

$$m = 0 \quad \text{und} \quad n = 0\ ,$$

wenn man den Werth von p mit dem untern Zeichen nimmt,

$$m = 2\frac{Y'}{M'} \quad \text{und} \quad n = 2\frac{X'}{M'}\ .$$

Da nun

$$X'Y-XY' = 0 \qquad (10)$$

ist, so reduciren sich die Gleichungen (8) beide auf

$$X'Y'M-XYM' = 0\ , \qquad (11)$$

und eliminirt man zwischen (10) und (11) nach einander Y' und X', so kommt

$$X'^2M-X^2M' = 0 \quad \text{und} \quad Y'^2M-Y^2M' = 0\ , \qquad (12)$$

zwei Gleichungen, in deren Folge man aus (9)

$$p = \pm\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} \qquad (13)$$

erhält.

§. 23. Setzt man in $X'^2M - X^2M' = 0$ (12) für M und M' die ihnen gleichen Ausdrücke $Y^2 + X^2 - r^2$ und $Y'^2 + X'^2 - r'^2$, so findet man

$$X'^2Y^2 - X^2Y'^2 + X^2r'^2 - X'^2r^2 = 0 ,$$

eine Gleichung, die sich in Folge von (10), auf

$$X^2r'^2 - X'^2r^2 = 0 \quad \text{oder} \quad Xr' \pm X'r = 0 \qquad (14)$$

reducirt. Wenn man nun für X u. X' ihre Werthe $x_1 - \alpha$ und $x_1 - \alpha'$ substituirt, so kommt

$$(r' \pm r)x_1 = r'\alpha \pm r\alpha' \quad \text{oder} \quad x_1 = \frac{r'\alpha \pm r\alpha'}{r' \pm r} . \qquad (15)$$

Es ist aber auch in Folge von (10) und (14)

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{X'}{X} \quad \text{und} \quad \frac{X'}{X} = \mp\frac{r'}{r} , \quad \text{daher} \quad Y'r \pm Yr' = 0 ,$$

und, indem man für Y u. Y' ihre Werthe $y_1 - \beta$ und $y_1 - \beta'$ setzt,

$$(r \pm r')y_1 = r\beta' \pm r'\beta \quad \text{oder} \quad y_1 = \frac{r'\beta \pm r\beta'}{r' \pm r} . \qquad (16)$$

Setzt man nun in die allgemeinen Formeln (§. 12. F. 1.)

$$u' = \frac{py'}{my' + nx' + 1} \quad ; \quad t' = \frac{px'}{my' + nx' + 1}$$

für m, n und p die gefundenen Werthe, so kommt

$$\text{erstens } u' = \mp\frac{r}{r'}y \quad ; \quad t' = \mp\frac{r}{r'}x' , \qquad (17)$$

$$\text{oder zweitens } u' = \frac{\pm rM'y'}{r'(2Y'y' + 2X'x' + M')} \quad ; \quad t' = \frac{\pm rM'x'}{r'(2Y'y' + 2X'x' + M')} , \qquad (18)$$

in welchen letztern Formeln noch für X', Y' und M' ihre Werthe zu setzen sind.

Aus all' diesem ergiebt sich, daß zwei Kreise, wie sie auch liegen mögen, immer als ähnliche und ähnlich-liegende Figuren (F. 17.), und daß sie auch als bloß collineare und collinear-liegende Figuren (F. 18.) betrachtet werden können, und zwar auf doppelte Art, indem jedesmal, wegen der doppelten Vorzeichen in den Formeln (15) und (16), zwei Collineations- oder Aehnlichkeitspunkte existiren, wenn nicht beide Kreise concentrisch sind. In diesem letztern Falle nämlich hat man $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$, demnach auch aus (F. 15. u. 16.) $x_1 = \alpha$ und $y_1 = \beta$, so daß beide Collineations- oder Aehnlichkeitspunkte mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte zusammenfallen.

Setzt man $u' = y'$ und $t' = x'$, so findet man aus den Formeln (18) als Gleichung der Collineationsachsen §. 23.

$$r'(2Y'y' + 2X'x') + M'(r' \mp r) = 0 .$$

Diese Gleichung bezieht sich aber auf die neuen, durch einen Collineationspunkt gelegten, Coordinatenachsen. Um sie auf die alten Achsen zu transformiren, muß man wieder $x - x_1$ für x' und $y - y_1$ für y' setzen. Dies giebt, wenn man außerdem für X', Y' u. M' ihre Werthe substituirt,

$$2r'(y_1 - \beta')(y - y_1) + 2r'(x_1 - \alpha')(x - x_1)$$
$$+ (r' \mp r)(y_1 - \beta')^2 + (r' \mp r)(x_1 - \alpha')^2 - (r' \mp r)r'^2 = 0 ;$$

und setzt man darin für x_1 und y_1 die Ausdrücke (15) und (16), so kommt

$$2(\beta - \beta')y + 2(\alpha - \alpha')x + \beta'^2 + \alpha'^2 - \beta^2 - \alpha^2 + r^2 - r'^2 = 0, \quad (19)$$

eine Gleichung, in welcher die doppelten Zeichen von selbst verschwunden sind, woraus sich ergiebt, daß die Collineationsachse dieselbe ist, man mag nun den einen oder den andern der beiden gefundenen Punkte zum Collineationscentrum nehmen.

Es darf nicht unbemerkt bleiben, daß die Gleichung (19) unmittelbar aus den Gleichungen (1) und (2) der beiden Kreise erhalten wird, wenn man $u = y$ und $t = x$ setzt, und sodann die erste dieser Gleichungen von der zweiten abzieht, woraus denn folgt, daß die Gerade, welche durch die Gleichung (19) ausgedrückt wird, die Durchschnittspunkte beider Kreise enthält, indem die Werthe von x u. y, welche die beiden Kreis-Gleichungen befriedigen, auch der Gleichung (19) genügen müssen, es mögen diese Werthe nun reell oder imaginär seyn. Die Collineationsachse zweier Kreise ist daher, wenn beide Kreise sich schneiden, nichts anders als ihre gemeinschaftliche Sehne, was auch aus dem im §. 13. Gesagten unmittelbar hergeleitet werden kann.

Die Gerade, welche durch die Mittelpunkte der beiden Kreise (1) u. (2) geht (Centrallinie), hat zur Gleichung (§. 4. S. 10.)

$$y - \beta = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'}(x - \alpha) ,$$

welche von den Werthen der Coordinaten x_1 und y_1 befriedigt wird. Daraus folgt, daß die beiden Collineationspunkte in dieser Centrallinie liegen. Ferner ist aus der letzten Gleichung ersichtlich, daß die Collineationsachse (19) auf der Centrallinie senkrecht steht (§. 6. Aufg. 9.).

§. 23. Fig. 21. Zur Verdeutlichung des bisher Gesagten seyen C u. C' die Mittelpunkte zweier Kreise, und P einer ihrer Collineations- oder Aehnlichkeitspunkte. Eine Gerade PB' schneide jeden dieser Kreise in zwei Punkten A und B, A' und B'. Werden nun die Kreise als ähnliche Figuren betrachtet, so entspricht dem Punkte A des Kreises C der Punkt A' des Kreises C', und dem Punkte B des Kreises C der Punkt B' des Kreises C'. Werden aber beide Kreise als bloß collineare Figuren angesehen, so entspricht dem Punkte A der Punkt B' und dem Punkte B der Punkt A'. Eben so verhält es sich mit den Punkten D und E, D' und E', die respective mit P in gerader Linie sind. Und aus den Eigenschaften ähnlicher und ähnlichliegender so wie collinearer und collinear-liegender Systeme folgt, daß die AD der A'D' und die BE der B'E' parallel seyen, so wie daß AD und B'E', BE und A'D', AE und B'D', BD und A'E' sich auf der Collineationsachse schneiden, ferner daß die Durchschnittspunkte F und F' und die Durchschnittspunkte G und G' respective mit P in gerader Linie liegen.

Von den beiden Aehnlichkeitspunkten, die wir gefunden haben, ist derjenige, dessen Coordinaten $x_1 = \frac{r'\alpha + r\alpha'}{r' + r}$ und $y_1 = \frac{r'\beta + r\beta'}{r' + r}$ sind, der innere, und derjenige, dessen Coordinaten $x_1 = \frac{r'\alpha - r\alpha'}{r' - r}$ und $y_1 = \frac{r'\beta - r\beta'}{r' - r}$ sind, der äußere Aehnlichkeitspunkt (§. 17.). Beide Punkte theilen die Verbindungslinie der Mittelpunkte in dem Verhältnisse der Radien (§. 5. F. 3.). Es ist nun, wenn man die Gleichungen (17) in Betracht zieht, und zufolge des Lehrsatzes (10) §. 17. leicht einzusehen, daß an drei Kreisen, von den sechs Aehnlichkeitspunkten, die drei äußern sowohl als jeder äußere mit zwei innern in gerader Linie liegen müssen. Hieraus folgt wieder, wenn man die drei Kreise als collineare Figuren ansieht, nach der zu Ende des §. 15. gemachten Bemerkung, daß die Collineationsachsen von drei Kreisen sich in einem und demselben Punkte schneiden. Und daraus ergiebt sich nun ferner, daß der Ort des Durchschnittspunktes der beiden Collineationsachsen oder gemeinschaftlichen Sehnen zweier festen Kreise und eines veränderlichen dritten Kreises eine gerade Linie und zwar die Collineationsachse der beiden festen Kreise ist. Dies bietet ein Mittel dar, die Collineationsachse zweier gegebenen Kreise, wenn sie auch sich nicht schneiden, auf eine einfache Weise zu construiren. Man darf nämlich

nur

nur einen dritten Kreis beschreiben, der die beiden gegebenen schneidet, die beiden gemeinschaftlichen Sehnen ziehen und von dem Durchschnittspunkte dieser letztern eine Senkrechte auf die Centrallinie der gegebenen Kreise fällen, so ist diese Senkrechte die Collineationsachse dieser Kreise. §. 23.

Aufgabe [29]. Es sind zwei Kreise C, C' gegeben. Man soll den Ort des Punktes Q finden, der so liegt, daß das Product der Abschnitte QB und QE auf jeder durch Q an den Kreis C gezogenen Geraden dem Producte von QA' und QD' auf jeder ebenfalls durch Q an den Kreis C' gezogenen Geraden gleich sey. Fig. 21

Es seyen

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = r^2 \quad \text{und} \quad (y-\beta')^2+(x-\alpha')^2 = r'^2$$

die Gleichungen der gegebenen Kreise, und x'y' die unbekannten Coordinaten des Punktes Q.

Wir transformiren diese Gleichungen, indem wir den Punkt Q zum Anfangspunkte der Coordinaten nehmen und daher $x+x'$ statt x und $y+y'$ statt y setzen, wodurch wir erhalten

$$y^2+x^2+2(y'-\beta)y+2(x'-\alpha)x+(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2-r^2 = 0,$$
$$y^2+x^2+2(y'-\beta')y+2(x'-\alpha')x+(y'-\beta')^2+(x'-\alpha')^2-r'^2 = 0.$$

Sodann gehen wir zu Polar-Coordinaten über, indem wir (§. 3. F. 10.) $x = u\cos t$ und $y = u\sin t$ setzen. Dadurch gelangen wir zu den Gleichungen

$$u^2+2\{(y'-\beta)\sin t+(x'-\alpha)\cos t\}u+(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2-r^2 = 0,$$
$$u^2+2\{(y'-\beta')\sin t+(x'-\alpha')\cos t\}u+(y'-\beta')^2+(x'-\alpha')^2-r'^2 = 0.$$

Da nun die letzten Glieder dieser Gleichungen den Producten der beiden Wurzeln derselben gleich sind, und diese Wurzeln die Längen von QB und QE und von QA' und QD' ausdrücken, so muß in Folge der Aufgabe

$$(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2-r^2 = (y'-\beta')^2+(x'-\alpha')^2-r'^2$$

seyn. Hebt man die Parentheseen auf, so kommt als Gleichung des gesuchten Ortes

$$2(\beta-\beta')y'+2(\alpha-\alpha')x'+\beta'^2+\alpha'^2-\beta^2-\alpha^2+r^2-r'^2 = 0,$$

welches die Gleichung (19) ist. Der gesuchte Ort ist daher die Collineationsachse der beiden Kreise.

Da das Product der Abschnitte der von Q aus gezogenen Geraden dem

§. 23. Quadrate der von Q aus an die Kreise gelegten Tangenten gleich ist, so ist die Collineationsachse auch der Ort des Punktes, von welchem gleiche Tangenten an beide Kreise gelegt werden können. Auch ist nun leicht einzusehen, daß diese Collineationsachse auch der Ort der Mittelpunkte aller Kreise ist, welche die beiden gegebenen rechtwinklig schneiden.

Es läßt sich noch eine Menge anderer Folgerungen aus diesen Eigenschaften der Collineationsachse zweier Kreise ableiten, die aber hier nicht Raum finden können.

§. 24.

Aufgabe [30]. Die Gleichung eines Kreises und die Coordinaten eines Punktes seiner Peripherie sind gegeben. Man soll die Gleichung der Tangente in diesem Punkte finden.

Es sey

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = r^2 \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung des Kreises, und es seyen $x'y'$ die gegebenen Coordinaten des Punktes.

Die Gleichung der Geraden, die durch den Mittelpunkt $\alpha\beta$ und durch den Punkt $x'y'$ geht, ist (§. 4. S. 10.), wenn tu ihre Coordinaten bezeichnen,

$$u-\beta = \frac{y'-\beta}{x'-\alpha}(t-\alpha)\ ,$$

und die Gleichung der Senkrechten auf dieser im Punkte $x'y'$, d. i. die Gleichung der gesuchten Tangente (§. 6. Aufg. 9.)

$$u-y' = -\frac{x'-\alpha}{y'-\beta}(t-x')$$

oder

$$(y'-\beta)u+(x'-\alpha)t-(y'^2+x'^2)+\beta y'+\alpha x' = 0\ . \qquad (2)$$

Da aber der Punkt $x'y'$ in der Peripherie des Kreises (1) liegt, so hat man auch

$(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2 = r^2$ oder $y'^2+x'^2 = 2\beta y'+2\alpha x'+r^2-\beta^2-\alpha^2$

und, wenn man diesen Werth von $y'^2+x'^2$ in die Gleichung (2) setzt,

$$(y'-\beta)u+(x'-\alpha)t-\beta y'-\alpha x'+\beta^2+\alpha^2-r^2 = 0\ , \qquad (3)$$

eine Gleichung, in welcher die Coordinaten des Berührungspunktes nur in erster Potenz vorkommen. Dieser Gleichung kann man auch die Form

$$(y'-\beta)(u-\beta)+(x'-\alpha)(t-\alpha) = r^2 \qquad (4)$$ §. 24.

geben.

Ist der Mittelpunkt des Kreises der Anfangspunkt der Coordinaten, also $\alpha = 0$ und $\beta = 0$, so ist die Gleichung der Tangente

$$y'u+x't = r^2 . \qquad (5)$$

Die Lösung dieser Aufgabe giebt zu mehrern Betrachtungen Veranlassung. Setzt man in der Gleichung der Polarlinie des Punktes $x'y'$ (§. 20. G. 2.) die unbestimmten Coefficienten $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = -\beta$, $E = -\alpha$ und $F = \beta^2+\alpha^2-r^2$, so kommt

$$(y'-\beta)u+(x'-\alpha)t-\beta y'-\alpha x'+\beta^2+\alpha^2-r^2 = 0 ,$$

eine Gleichung, die mit der Gleichung (3) in der letzten Aufgabe identisch ist. Daraus folgt, daß die Tangente in irgend einem Punkte $x'y'$ eines Kreises als die Polare dieses Punktes, und umgekehrt, dieser Punkt als Pol der Tangente angesehen werden kann. Daher ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier Tangenten eines Kreises (Berührungssehne) die Polare des Durchschnittspunktes der beiden Tangenten (§. 19.), und der Durchschnittspunkt zweier Sehnen eines Kreises ist der Pol der Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der beiden Tangenten-Paare in den Endpunkten dieser Sehnen. Die weitere Ausführung dieses interessanten Gegenstandes bleibt, um Wiederholungen zu ersparen, dem folgenden Capitel vorbehalten.

Durch die Lösung der folgenden Aufgabe wird man das von der Berührungssehne Gesagte bestätigt finden.

Aufgabe [31]. Die Gleichung eines Kreises und die Coordinaten eines Punktes, der nicht in seiner Peripherie liegt, sind gegeben. Man soll die Punkte finden, in welchen die, durch den gegebenen Punkt an den Kreis gelegten, Tangenten ihn berühren.

Es sey

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = r^2 \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung des Kreises, und es seyen $x'y'$ die gegebenen Coordinaten des Punktes. Bezeichnet man nun die noch unbekannten Coordinaten eines Berührungspunktes durch tu, so ist die Gleichung der Tangente in diesem Punkte, wenn man ihre (laufenden) Coordinaten durch xy bezeichnet,

$$(u-\beta)(y-\beta)+(t-\alpha)(x-\alpha) = r^2 , \qquad (6)$$

§. 24. welche aus der Gleichung (4) der vorigen Aufgabe erhalten wird, wenn man darin tu statt $x'y'$ und xy statt tu setzt. Soll diese Gerade (6), wie es die Aufgabe fordert, durch den Punkt $x'y'$ gehen, so muß ihre Gleichung von seinen Coordinaten befriedigt werden. Es muß also seyn

$$(u-\beta)(y'-\beta)+(t-\alpha)(x'-\alpha) = r^2 , \qquad (7)$$

und da der Berührungspunkt tu in der Peripherie des Kreises liegt, so muß auch

$$(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2 = r^2 \qquad (8)$$

seyn. Diese beiden Gleichungen (7 u. 8) reichen hin, die gesuchten Coordinaten t u. u zu bestimmen, und da die eine dieser Gleichungen vom zweiten Grade ist, so wird man im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe für diese Coordinaten finden.

Statt aber diese Werthe zu entwickeln, kann man auch, wenn keine Werthbestimmung der Coordinaten des gesuchten Punktes, sondern die geometrische Bestimmung desselben gefordert ist, die Linie, welche durch die Gleichung

$$(y'-\beta)(u-\beta)+(x'-\alpha)(t-\alpha) = r^2 \qquad (7)$$

ausgedrückt wird, wenn man t u. u als laufende Coordinaten betrachtet, und die offenbar eine Gerade ist, construiren. Ihre Durchschnittspunkte mit dem gegebenen Kreise (8) sind dann die verlangten Berührungspunkte. Hieraus erhellet zugleich, daß die Gleichung (7) die der Berührungssehne ist, welche, wie man sieht, immer reell ist, wenn auch von dem gegebenen Punkte aus keine Tangente an den Kreis gezogen werden kann.

Die Form der Gleichung (7), welche mit der Gleichung (4) übereinstimmt, zeigt, daß die Berührungssehne zweier, von einem Punkte $x'y'$ an einen Kreis gezogenen, Tangenten als Polare dieses Punktes angesehen werden kann, wie wir dies schon in Folge der vorigen Aufgabe gefunden hatten. Diese Berührungssehne (7) wird daher auch die Polare des Punktes $x'y'$ in Beziehung auf den Kreis (8) oder an den Kreis (8) genannt.

Wenn der Mittelpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen wird, so hat man statt der Gleichung (7) für die Polare eines Punktes $x'y'$

$$y'u+x't = r^2 ,$$

und für die Gerade, welche den Mittelpunkt mit dem Punkte $x'y'$ verbindet,

$$x'u - y't = 0 \,.$$ §. 24.

Aus diesen beiden Gleichungen sieht man, daß die Polare eines Punktes x'y' in Beziehung auf einen Kreis senkrecht stehet auf der Geraden, welche diesen Punkt x'y' mit dem Mittelpunkt verbindet. Bezeichnet man die Coordinaten des Durchschnitts dieser Geraden und der Polarlinie durch t'u', so ist

$$y'u' + x't' = r^2 \quad \text{und} \quad x'u' - y't' = 0 \,,$$

oder, wenn man quadrirt,

$$y'^2u'^2 + 2x'y'u't' + x'^2t'^2 = r^4 \,,$$
$$x'^2u'^2 - 2x'y'u't' + y'^2t'^2 = 0 \,,$$

woraus durch Addition

$$(x'^2 + y'^2)(u'^2 + t'^2) = r^4 \quad \text{oder} \quad \sqrt{y'^2 + x'^2}\sqrt{u'^2 + t'^2} = r^2 \,.$$

Zieht man also vom Mittelpunkte c eines Kreises nach irgend einem Punkte p eine Gerade $\overline{cp}$, so wird diese von der Polare des Punktes p so in q geschnitten, daß $\overline{cp} \cdot \overline{cq} = r^2$.

Es ist leicht einzusehen, daß eine Tangente, welche durch einen Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise an einen derselben gezogen ist, auch den andern berührt, daher sind bei zwei Kreisen die Polaren der Collineations- oder Aehnlichkeitspunkte besonders merkwürdig; ihre Gleichungen findet man durch Substitution der Coordinaten dieser Punkte in die Gleichung (3 od. 4). Sind demnach

$$y^2 + x^2 = r^2 \ldots (9) \quad ; \quad (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r_1^2 \ldots (10)$$

die auf dieselben Achsen bezogenen Gleichungen zweier Kreise, in welchen der Mittelpunkt des ersten zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen ist, so sind (§. 23.) die Coordinaten

des inneren Aehnlichkeitspunktes $x_1 = \frac{r\alpha}{r + r_1}$, $y_1 = \frac{r\beta}{r + r_1}$,

des äußern Aehnlichkeitspunktes $x_1 = \frac{r\alpha}{r - r_1}$, $y_1 = \frac{r\beta}{r - r_1}$.

Daher ist die Gleichung der Polarlinie des

innern Aehnlichkeitsp. an d. Kreis (9).... $\beta u + \alpha t - r\,(r + r_1) = 0 \ldots (11)$,
äußern " " " " (9).... $\beta u + \alpha t - r\,(r - r_1) = 0 \ldots (12)$,
innern " " " " (10).. $\beta u + \alpha t - \beta^2 - \alpha^2 + r_1(r + r_1) = 0 \ldots (13)$,
äußern " " " " (10).. $\beta u + \alpha t - \beta^2 - \alpha^2 - r_1(r - r_1) = 0 \ldots (14)$.

§. 25.

§. 25.

Aufgabe [32]. Es sind drei Kreise gegeben; man soll denjenigen Kreis construiren, welcher die gegebenen von außen berührt.

Es sey der Mittelpunkt von einem der gegebenen Kreise der Anfangspunkt der Coordinaten. Die Gleichungen der gegebenen Kreise werden dann seyn

$$y^2+x^2 = r_1^2 , \qquad (1)$$

$$(y-\beta_2)^2+(x-\alpha_2)^2 = r_2^2 , \qquad (2)$$

$$(y-\beta_3)^2+(x-\alpha_3)^2 = r_3^2 , \qquad (3)$$

und die des gesuchten

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = r^2 , \qquad (4)$$

wo α_2, β_2, α_3, β_3, r_1, r_2, r_3 bekannte, α, β und r aber unbekannte Größen bezeichnen.

Da der gesuchte Kreis die gegebenen von außen berühren soll, so muß bekanntermaßen die Entfernung des Mittelpunktes des erstern von dem Mittelpunkte eines der letztern der Summe der Radien der eben genannten Kreise gleich seyn. Diese Relation wird (§. 2.) durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$\beta^2+\alpha^2 = (r+r_1)^2 , \qquad (5)$$

$$(\beta-\beta_2)^2+(\alpha-\alpha_2)^2 = (r+r_2)^2 , \qquad (6)$$

$$(\beta-\beta_3)^2+(\alpha-\alpha_3)^2 = (r+r_3)^2 , \qquad (7)$$

aus welchen drei Gleichungen allein die unbekannten Größen α, β und r bestimmt werden könnten. Da man aber hierbei auf eine Gleichung vom achten Grade gerathen würde, so führe man zwei neue Unbekannte, nämlich die Coordinaten des Berührungspunktes der Kreise (1) und (4) in die Rechnung ein. Bezeichnet man sie durch t und u, so hat man in Folge von (1) und (4)

$$u^2+t^2 = r_1^2 , \qquad (8)$$

$$(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2 = r^2 , \qquad (9)$$

und addirt man die Gleichungen (5) und (8), und zieht dann die Gleichung (9) ab, so kommt nach der Division durch 2

$$u\beta+t\alpha = r_1(r+r_1) , \qquad (10)$$

oder, wenn man für $(r+r_1)$ und für r_1 die Werthe aus (5) und (8) setzt,

$$u\beta+t\alpha = \sqrt{u^2+t^2}\,.\,\sqrt{\beta^2+\alpha^2} ,$$

und wenn man quadrirt und reducirt §. 25.

$$u^2\alpha^2+t^2\beta^2-2ut\alpha\beta = 0 ,$$

oder, wenn man die Wurzel auszieht,

$$u\alpha-t\beta = 0 . \qquad (11)$$

Entwickelt man aus den Gleichungen (10) und (11) die Werthe von α und β, so findet sich

$$\alpha = \frac{tr_1(r+r_1)}{u^2+t^2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{ur_1(r+r_1)}{u^2+t^2} ,$$

oder, wenn man für u^2+t^2 den Werth aus (8), nämlich r_1^2 setzt,

$$\alpha = \frac{t(r+r_1)}{r_1} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{u(r+r_1)}{r_1} .$$

Zieht man die Gleichungen (6) und (7) nach einander von (5) ab, so kommt

$$2\beta_2\beta+2\alpha_2\alpha-2(r_1-r_2)r = \alpha_2^2+\beta_2^2+(r_1+r_2)(r_1-r_2) ,$$
$$2\beta_3\beta+2\alpha_3\alpha-2(r_1-r_3)r = \alpha_3^2+\beta_3^2+(r_1+r_3)(r_1-r_3) ,$$

oder

$$2\beta_2\beta+2\alpha_2\alpha-2(r_1-r_2)(r+r_1) = \alpha_2^2+\beta_2^2-(r_1-r_2)^2 ,$$
$$2\beta_3\beta+2\alpha_3\alpha-2(r_1-r_3)(r+r_1) = \alpha_3^2+\beta_3^2-(r_1-r_3)^2 .$$

Setzt man in diese Gleichungen die für α und β gefundenen Ausdrücke, so ergiebt sich

$$2\{\beta_2u+\alpha_2t-r_1(r_1-r_2)\}(r+r_1) = r_1\{\alpha_2^2+\beta_2^2-(r_1-r_2)^2\} ,$$
$$2\{\beta_3u+\alpha_3t-r_1(r_1-r_3)\}(r+r_1) = r_1\{\alpha_3^2+\beta_3^2-(r_1-r_3)^2\} ,$$

und, wenn man zwischen diesen Gleichungen $r+r_1$ eliminirt,

$$\{\alpha_3^2+\beta_3^2-(r_1-r_3)^2\}\{\beta_2u+\alpha_2t-r_1(r_1-r_2)\} =$$
$$\{\alpha_2^2+\beta_2^2-(r_1-r_2)^2\}\{\beta_3u+\alpha_3t-r_1(r_1-r_3)\} . \qquad (12)$$

Die Gleichungen (8) und (12) reichen hin, um die Werthe von t und u zu bestimmen, was leicht geschehen könnte, indem die erste Gleichung vom zweiten und die andere nur vom ersten Grade ist. Da es aber nicht sowohl auf den algebraischen Ausdruck dieser Größen, als vielmehr darauf ankommt, den berührenden Kreis zu construiren, so suche man den Punkt, dessen Coordinaten t, u sind, geometrisch zu bestimmen. Zu dem Ende bemerke man, daß dieser Punkt in den beiden Linien liegen muß, welche durch die Gleichungen (8) und (12) ausgedrückt werden, wenn man darin t und u als laufende Coordinaten ansieht, und zwar deshalb, weil die Coordina-

§. 23. ten dieſes Punktes eben dieſe Gleichungen befriedigen müſſen. Der in Rede ſtehende Berührungspunkt tu iſt alſo der Durchſchnittspunkt der beiden Linien (8) und (12). Die erſte dieſer Linien iſt aber der gegebene Kreis r_1 und die zweite iſt, da die Gleichung (12) in Beziehung auf t und u vom erſten Grade, eine gerade Linie, welche alſo einzig und allein noch conſtruirt werden muß.

Es iſt klar, daß ſowohl diejenigen Werthe von t und u, welche zu gleicher Zeit die beiden Gleichungen

$$\beta_2 u + \alpha_2 t - r_1(r_1 - r_2) = 0\,, \qquad (13)$$

$$\beta_3 u + \alpha_3 t - r_1(r_1 - r_3) = 0\,, \qquad (14)$$

als diejenigen, welche gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$\beta_2 u + \alpha_2 t - r_1(r_1 - r_2) = \alpha_2^2 + \beta_2^2 - (r_1 - r_2)^2$$

oder

$$\beta_2(u - \beta_2) + \alpha_2(t - \alpha_2) - r_2(r_1 - r_2) = 0\,, \qquad (15)$$

$$\beta_3 u + \alpha_3 t - r_1(r_1 - r_3) = \alpha_3^2 + \beta_3^2 - (r_1 - r_3)^2$$

oder

$$\beta_3(u - \beta_3) + \alpha_3(t - \alpha_3) - r_3(r_1 - r_3) = 0 \qquad (16)$$

befriedigen, auch der Gleichung (12) genugthun werden. Die erſtern Werthe ſind aber die Coordinaten des Durchſchnitts der Linien (13) und (14), und die letztern die des Durchſchnitts der Linien (15) und (16). Alſo befriedigen die Coordinaten dieſer beiden Durchſchnittspunkte die Gleichung (12), und folglich iſt die Gerade (12) die Verbindungslinie dieſer Durchſchnittspunkte.

Nun iſt aus §. 24. (S. 12. u. 14.) erſichtlich, daß die Linien (13) u. (14) die Polaren der äußern Aehnlichkeitspunkte der Kreiſe (1) und (2) und der Kreiſe (1) und (3) in Beziehung auf den Kreis (1), ferner daß die Linien (15) und (16) die Polaren derſelben Aehnlichkeitspunkte reſpective an die Kreiſe (2) und (3) ſind. Und hieraus ergiebt ſich folgende Conſtruction.

Man ziehe die Polaren der äußern Aehnlichkeitspunkte der Kreiſe (1) und (2) und der Kreiſe (1) und (3) an den Kreis (1), welche Polaren ſich im Allgemeinen in einem Punkte p′ ſchneiden werden; ferner die Polare des äußern Aehnlichkeitspunktes der Kreiſe (1) und (2) in Beziehung auf den Kreis (2) und die Polare des äußern Aehnlichkeitspunktes der Kreiſe (1) und (3) in Beziehung auf den Kreis (3), welche Polaren ſich im Allgemeinen in einem Punkte p″ ſchneiden werden. Man verbinde die Punkte p′, p″ durch eine gerade Linie, ſo wird dieſe im Allgemeinen den Kreis (1)

in dem Punkte q ſchneiden, welcher der Berührungspunkt des Kreiſes (1) und des geſuchten Kreiſes iſt. §. 25.

Man mache dieſelbe Conſtruction, indem man die Kreiſe (1) und (2) darin mit einander vertauſcht, ſo erhält man den Punkt q', welcher der Berührungspunkt des Kreiſes (2) und des geſuchten iſt.

Endlich wiederhole man die Conſtruction noch einmal, indem man die Kreiſe (1) und (3) mit einander verwechſelt, ſo ergiebt ſich der Punkt q'' als Berührungspunkt des Kreiſes (3) und des geſuchten.

Sind auf dieſe Weiſe die Berührungspunkte gefunden, ſo darf man nur einen Kreis beſchreiben, der durch dieſe Punkte q, q' und q'' geht, und dieſer wird der verlangte ſeyn. Oder man kann die nach den Berührungspunkten gezogenen Radien der gegebenen Kreiſe verlängern, ſo werden ſie ſich in einem Punkte Q ſchneiden, welcher der Mittelpunkt des verlangten Kreiſes iſt.

Statt der Gleichungen (15) und (16) kann man auch die Gleichungen

$$2\beta_2 u + 2\alpha_2 t - 2r_1(r_1 - r_2) = \alpha_2^2 + \beta_2^2 - (r_1 - r_2)^2 \text{ oder } 2\beta_2 u + 2\alpha_2 t - \alpha_2^2 - \beta_2^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0 \quad (17)$$

$$2\beta_3 u + 2\alpha_3 t - 2r_1(r_1 - r_3) = \alpha_3^2 + \beta_3^2 - (r_1 - r_3)^2 \text{ oder } 2\beta_3 u + 2\alpha_3 t - \alpha_3^2 - \beta_3^2 - r_1^2 + r_3^2 = 0 \quad (18)$$

nehmen, weil auch die Werthe von t und u, welche dieſe beiden Gleichungen zu gleicher Zeit befriedigen, der Gleichung (12) genugthun müſſen. Die Gleichung (17) drückt die Collineationsachſe der Kreiſe (1) und (2), und die Gleichung (18) drückt die Collineationsachſe der Kreiſe (1) und (3) aus (§. 23.), welche nach dem, was zu Ende des §. 23. geſagt worden, leicht conſtruirt werden können. Statt der Polaren der äußern Aehnlichkeitspunkte der Kreiſe (1) u. (2) und (1) u. (3) in Beziehung reſpective auf die Kreiſe (2) und (3) kann man daher in der obigen Conſtruction die eben genannten Collineationsachſen anwenden, um den Punkt q zu finden. Aehnliche Veränderungen kann man in der Conſtruction zur Auffindung der Punkte q' und q'' anbringen.

Die Aufgabe, einen Kreis zu conſtruiren, welcher die drei gegebenen Kreiſe (1), (2) u. (3) berühre und zwar die beiden Kreiſe (1) u. (2) von außen und den dritten (3) von innen, läßt ſich auf ähnliche Weiſe löſen. Von den in der vorigen Löſung aufgeſtellten ſieben Gleichungen (1 bis 7) gelten nämlich die erſten ſechs (1 bis 6) auch hier, und nur ſtatt der letzten (7) hat man hier

$$(\beta - \beta_3)^2 + (\alpha - \alpha_3)^2 = (r - r_3)^2 ,$$

§. 25. woraus man sieht, daß das Resultat der fortgesetzten Rechnung dem obigen bis auf das Zeichen von r_3 (welches jetzt dem vorigen entgegengesetzt ist) gleich seyn muß. Man wird also jetzt ebenfalls zu den Gleichungen (13) und (15) gelangen; statt der Gleichungen (14) und (16) aber wird man die Gleichungen

$$\beta_3 u + \alpha_3 t - r_1(r_1 + r_3) = 0\,,$$
$$\beta_3(u - \beta_3) + \alpha_3(t - \alpha_3) + r_3(r_1 + r_3) = 0$$

erhalten, welche nach §. 24. (S. 11. u. 13.) die Polaren des innern Aehnlichkeitspunktes der Kreise (1) u. (3) in Beziehung auf diese Kreise sind. Hiernach wird man leicht finden, welche Modificationen die in der vorigen Lösung angegebene Construction für den jetzigen Fall erleidet.

Eben so leicht überzeugt man sich, daß durch ähnliche Modificationen die in der vorigen Lösung enthaltene Construction für die noch übrigen sechs Fälle der allgemeinen Aufgabe einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene berührt, leicht abgeändert werden kann.

Es ist dabei zu bemerken, daß von den acht verschiedenen Constructionen zwei und zwei einander so zugeordnet sind, daß die ersten Theile derselben mit einander übereinstimmen. Denn z. B. der Fall, in welchem die drei gegebenen Kreise sämmtlich von außen, und der Fall, in welchem sie sämmtlich von innen berührt werden sollen, führen beide zu denselben Gleichungen (8) und (12), was man sogleich findet, wenn man in diesen Gleichungen, um von dem ersten dieser Fälle zu dem zweiten zu gelangen, die Zeichen der drei Radien verändert, indem diese Gleichungen selbst dadurch nicht geändert werden. Der Theil der Construction, welcher sich darauf bezieht, die Gerade (12) zu verzeichnen, ist also für beide Fälle derselbe. Die Gerade (12) schneidet nun den Kreis (8) in zwei Punkten q, von welchen der eine für den ersten Fall und der andere für den zweiten Fall gilt. Aehnlicherweise verhält es sich mit der Bestimmung der Punkte q′ und q″.

Die in Rede stehende allgemeine Lösung der Aufgabe, welche Hr. Gergonne zuerst gegeben hat, und die mit Recht als ein Muster analytisch-geometrischer Behandlung betrachtet wird, ist in dem besondern Falle, in welchem $\frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_3}{\alpha_3}$ ist, nicht ohne eine kleine Abänderung ausführbar. In diesem Falle sind nämlich die Geraden (13) und (14), (15) und (16), (17) und (18) einander parallel (§. 6. Aufg. 8.); es lassen sich also ihre Durchschnittspunkte nicht angeben. Da nun aber alsdann, eben weil

$\frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_3}{\alpha_3}$, die drei Mittelpunkte der gegebenen Kreise in gerader Linie lie- §. 25.
gen, so läßt sich die Gleichung (12) dadurch vereinfachen, daß man diese gemeinschaftliche Centrallinie der drei Kreise zur Abscissenachse nimmt, und demnach $\beta_2 = \beta_3 = 0$ setzt. Hierdurch gehen die Gleichungen (12 bis 16) in

$$\{\alpha_3^2-(r_1-r_3)^2\}\{\alpha_2 t-r_1(r_1-r_2)\} = \{\alpha_2^2-(r-r_2)^2\}\{\alpha_3 t-r_1(r_1-r_3)\}, \quad (12')$$

$$\alpha_2 t-r_1(r_1-r_2) = 0, \quad (13')$$
$$\alpha_3 t-r_1(r_1-r_3) = 0, \quad (14')$$
$$\alpha_2(t-\alpha_2)-r_2(r_1-r_2) = 0, \quad (15')$$
$$\alpha_3(t-\alpha_3)-r_3(r_1-r_3) = 0 \quad (16')$$

aber, woraus man sieht, daß alle diese Geraden auf der Abscissenachse (der Centrallinie) senkrecht stehen. Könnte man also nur den Punkt angeben, in welchem die Gerade (12') die Centrallinie schneidet, so wäre auch für den gegenwärtigen besondern Fall die Aufgabe gelöst. Zu dem Ende bemerke man, daß die Gerade, deren Gleichung

$$\{\alpha_3^2-(r_1-r_3)^2\}\{mu+\alpha_2 t-r_1(r_1-r_2)\} = \{\alpha_2^2-(r_1-r_2)^2\}\{nu+\alpha_3 t-r_1(r_1-r_3)\} \quad (12'')$$

ist, wo m und n zwei beliebige Größen bedeuten, die Abscissenachse in demselben Punkte schneiden werde, in welchem die Gerade (12') sie schneidet, weil für $u = 0$ beide Gleichungen (12' und 12'') denselben Werth für t geben. Nun ist aber die Gerade (12'') die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der beiden Geraden

$$mu+\alpha_2 t-r_1(r_1-r_2) = 0, \quad (13'')$$
$$nu+\alpha_3 t-r_1(r_1-r_3) = 0, \quad (14'')$$

und der beiden Geraden

$$mu+\alpha_2(t-\alpha_2)-r_2(r_1-r_2) = 0, \quad (15'')$$
$$nu+\alpha_3(t-\alpha_3)-r_3(r_1-r_3) = 0, \quad (16'')$$

aus Gründen, die den in der Lösung angegebenen ähnlich sind. Ferner schneiden die Geraden (13') und (13'') die Abscissenachse in einem und demselben Punkte, und dasselbe findet Statt bei der Geraden (14') und (14''), (15') und (15''), (16') und (16''). Die Geraden (13'') und (15'') sind einander parallel, und die Geraden (14'') und (16'') sind ebenfalls parallel (§. 6. Aufg. 8.). Hieraus ergiebt sich für unsern jetzigen Fall folgende Construction der Linie (12).

§. 25. Man ziehe die Polaren (13), (14), (15) und (16), und durch die Punkte, in welchen die Polaren (13) und (15) die Centrallinie der drei Kreise schneiden, zwei beliebige Parallelen (13″) und (15″); ferner durch die Punkte, in welchen die Polaren (14) und (16) dieselbe Centrallinie schneiden, ebenfalls zwei beliebige, die vorigen schneidende, Parallelen (14″) und (16″); verbinde sodann die Durchschnittspunkte der Geraden (13″) und (14″) und der Geraden (15″) und (16″) durch eine gerade Linie, und errichte in dem Durchschnittspunkte dieser letztern und der Centrallinie auf der Centrallinie eine Senkrechte, so ist diese die verlangte Linie (12).

§. 26.

Eine gerade Linie schneidet einen Kreis unter dem Winkel δ, wenn sie mit der Tangente in einem der beiden Durchschnittspunkte diesen Winkel bildet.

Aufgabe [33]. Es ist ein Kreis, ein Punkt seiner Peripherie und ein Winkel gegeben. Man soll die Gleichung der Geraden finden, welche durch den gegebenen Punkt geht und den Kreis unter dem gegebenen Winkel schneidet.

Es sey

$$y^2+x^2 = r^2 \qquad (1)$$

die Gleichung des gegebenen Kreises, $x'y'$ seyen die Coordinaten des gegebenen Punktes und δ der gegebene Winkel.

Wäre der Winkel, welchen die gesuchte Gerade mit der Abscissenachse bildet, bekannt, und seine trigonometrische Tangente gleich a, so wäre die Gleichung der gesuchten Linie (§. 4.)

$$u-y' = a(t-x') , \qquad (2)$$

wenn t u ihre laufenden Coordinaten bedeuten. Die Gleichung der Tangente im Punkte $x'y'$ aber ist (§. 24. S. 5.)

$$y'u+x't = r^2 \quad \text{oder} \quad u = -\frac{x'}{y'}t+\frac{r^2}{y'} . \qquad (3)$$

Nun sollen die Geraden (2) und (3) den Winkel δ bilden; man hat daher, zufolge des §. 6. (Aufg. 8.), wenn man für das dortige a' den Ausdruck $-\frac{x'}{y'}$ setzt

§. 26.

$$tang\,\delta = \frac{a+\frac{x'}{y'}}{1-\frac{ax'}{y'}} \quad \text{oder} \quad (y'+x'tg\delta)a = y'tg\delta - x' \,. \qquad (4)$$

Eliminirt man zwiſchen (2) und (4) das a, und ſetzt $\frac{sin\,\delta}{cos\,\delta}$ für $tg\,\delta$, ſo kommt

$$(x'sin\delta + y'cos\delta)u + (x'cos\delta - y'sin\delta)t = (y'^2+x'^2)cos\delta \,,$$

aber, da $y'^2+x'^2 = r^2$ iſt,

$$(x'sin\delta + y'cos\delta)u + (x'cos\delta - y'sin\delta)t = r^2 cos\delta \,, \qquad (5)$$

welches die geſuchte Gleichung iſt.

Die Länge der Senkrechten von dem Anfangspunkt der Coordinaten oder dem Mittelpunkt des Kreiſes (1) auf die Gerade (5) iſt (§. 7. Aufg. 12.)

$$\frac{r^2 cos\,\delta}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = r\,cos\,\delta \,. \qquad (6)$$

Sucht man die Durchſchnittspunkte t_1u_1 und t_2u_2 der gefundenen Geraden und des gegebenen Kreiſes, indem man die Werthe von t und u aus der Gleichung (5) und der Gleichung

$$u^2+t^2 = r^2$$

entwickelt, ſo erhält man, mit Rückſicht auf die Gleichung $y'^2+x'^2 = r^2$, und nach einigen Reductionen, die ſich von ſelbſt darbieten,

$$\left\{\begin{matrix} t_1 = x' \\ x_1 = y' \end{matrix}\right\} \,, \quad \left\{\begin{matrix} t_2 = x'cos2\delta - y'sin2\delta \\ u_2 = x'sin2\delta + y'cos2\delta \end{matrix}\right\} \,.$$

Die Tangente des Kreiſes (1) im Punkte t_2u_2 hat zur Gleichung (§. 24. G. 5.)

$$u_2u + t_2t = r^2 \,,$$

und ſie bildet daher mit der Geraden (5) einen Winkel δ', welcher durch

$$tang\,\delta' = \frac{(y'sin\,\delta - x'cos\,\delta)u_2 + (y'cos\,\delta + x'sin\,\delta)t_2}{(y'cos\,\delta + x'sin\,\delta)u_2 - (y'sin\,\delta - x'cos\,\delta)t_2}$$

gegeben iſt. Setzt man in den letzten Ausdruck für t_2 und u_2 die gefundenen Werthe, ſo reducirt er ſich auf

$$tang\,\delta' = tang(-\delta) = tang(\pi - \delta) \,,$$

woraus $\delta' = \pi - \delta$ folgt. Hieraus ergiebt ſich, daß eine Gerade AB, Fig. 22. welche einen Kreis C unter dem Winkel BDF $= \delta$ in D ſchneidet, ihn

§. 26. in einem zweiten Punkte D' unter dem Winkel BD'F = δ' schneiden muß, so daß BD'F der Supplements-Winkel von BDF ist. Diese Relation der beiden Winkel, so wie die Relation CF = CD $\cos\delta$ = r $\cos\delta$ (6), hätte sich sehr leicht auf bloß geometrischem Wege finden lassen, wir haben aber mit Absicht den analytischen Weg gewählt. Es ist hier noch zu bemerken, daß jede Gerade AB, welche einen Kreis C, dessen Radius CD = r, unter einem Winkel δ schneidet, einen concentrischen Kreis berührt, dessen Radius CG = r $\cos\delta$ ist (G. 6.).

Wenn nicht der Mittelpunkt des gegebenen Kreises der Anfangspunkt der Coordinaten, also die gegebene Gleichung

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = r^2 \qquad (7)$$

ist, so ist die Gleichung der Geraden, welche diesen Kreis im Punkte x'y' unter dem Winkel δ schneidet,

$$\{(x'-\alpha)\sin\delta+(y'-\beta)\cos\delta\}(u-\beta) + \{(x'-\alpha)\cos\delta-(y'-\beta)\sin\delta\}(t-\alpha) = r^2\cos\delta\,. \qquad (8)$$

Aufgabe [34]. Die Gleichung eines Kreises, die Coordinaten eines Punktes, der nicht in seiner Peripherie liegt, und ein Winkel sind gegeben. Man soll die Punkte finden, in welchen die durch den gegebenen Punkt gezogenen, den Kreis unter dem gegebenen Winkel schneidenden, Geraden ihn treffen.

Es sey

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = r^2 \qquad (7)$$

die gegebene Gleichung des Kreises; es seyen ferner x'y' die gegebenen Coordinaten des Punktes und δ der gegebene Winkel. Bezeichnet man nun die noch unbekannten Coordinaten eines Durchschnittspunktes durch t u, so ist die Gleichung der gesuchten Geraden, wenn ihre laufenden Coordinaten durch x y bezeichnet werden,

$$\{(t-\alpha)\sin\delta+(u-\beta)\cos\delta\}(y-\beta) + \{(t-\alpha)\cos\delta-(u-\beta)\sin\delta\}(x-\alpha) = r^2\cos\delta\,, \qquad (9)$$

welche aus der Gleichung (8) der vorigen Aufgabe hervorgeht, wenn man darin t u statt x'y' und x y statt t u setzt. Soll diese Gerade (9), wie es die Aufgabe fordert, durch den Punkt x'y' gehen, so muß ihre Gleichung von den Coordinaten dieses Punktes befriedigt werden. Es muß also seyn

§. 26.

$$\{(t-\alpha)\sin\delta+(u-\beta)\cos\delta\}(y'-\beta)$$
$$+\{(t-\alpha)\cos\delta-(u-\beta)\sin\delta\}(x'-\alpha)=r^2\cos\delta\ , \quad (10)$$

und da der Durchschnittspunkt tu in der Peripherie des Kreises (7) liegt, so muß auch

$$(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2=r^2 \quad (11)$$

seyn. Diese beiden Gleichungen (10) und (11) reichen hin, die gesuchten Coordinaten zu bestimmen, und da die eine dieser Gleichungen vom zweiten Grade ist, so wird man im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe für jede dieser Coordinaten finden, woraus sich ergiebt, daß es im Allgemeinen zwei verschiedene Gerade giebt, welche durch den gegebenen Punkt gehen und den Kreis unter dem gegenenen Winkel schneiden.

Statt aber jene Werthe der Coordinaten zu entwickeln, kann man auch, wenn keine Werthbestimmung der Coordinaten des gesuchten Punktes gefordert ist, die Linie der Gleichung

$$\{(y'-\beta)\cos\delta-(x'-\alpha)\sin\delta\}(u-\beta)$$
$$+\{(y'-\beta)\sin\delta+(x'-\alpha)\cos\delta\}(t-\alpha)=r^2\cos\delta\ , \quad (10)$$

die offenbar eine Gerade ist, construiren. Ihre Durchschnittspunkte mit dem gegebenen Kreise (11) sind die verlangten Punkte.

Da die Gerade (10) die beiden Punkte verbindet, in welchen die beiden, den Kreis unter dem Winkel δ schneidenden, Geraden ihn treffen, so kann man sie die Durchschnittssehne des Punktes $x'y'$ und des Winkels δ nennen.

Setzt man in der Gleichung der Polare des Punktes $x'y'$ (§. 19. S. 1.) $a=b'=\cos\delta$; $b=-\sin\delta$; $c=(\alpha\sin\delta-\beta\cos\delta)$; $a'=\sin\delta$; $c'=-(\alpha\cos\delta+\beta\sin\delta)$; $a''=-(\alpha\sin\delta+\beta\cos\delta)$; $b''=(\beta\sin\delta-\alpha\cos\delta)$ und $c''=(\beta^2+\alpha^2-r^2)\cos\delta$; so kommt

$$(\cos\delta\,y'-\sin\delta\,x'+\alpha\sin\delta-\beta\cos\delta)u+(\sin\delta\,y'+\cos\delta\,x'-\alpha\cos\delta-\beta\sin\delta)t$$
$$-(\beta\cos\delta+\alpha\sin\delta)y'+(\beta\sin\delta-\alpha\cos\delta)x'+(\beta^2+\alpha^2-r^2)\cos\delta=0\ ,$$

eine Gleichung, welche mit der Gleichung (10) übereinstimmt. Daraus folgt, daß die Durchschnittssehne eines Punktes $x'y'$ und Winkels δ in Beziehung auf einen bestimmten Kreis, als die Polare dieses Punktes angesehen werden kann. Es ist indessen nicht gebräuchlich, eine Durchschnittssehne mit dem Namen Polare zu belegen. Auch muß bemerkt werden, daß,

§. 26. wenn zu einem gegebenen Syſteme vermittelſt der Berührungsſehne an einen beſtimmten Kreis ein reciprokes Syſtem conſtruirt wird, beide Syſteme die im §. 20. angegebene Lage haben, daß hingegen, wenn die Conſtruction vermittelſt der Durchſchnittsſehne eines gegebenen Kreiſes und Winkels vollzogen wird, beide Syſteme dieſe Lage nicht haben. Was ſich indeſſen unmittelbar daraus ergiebt, daß die Durchſchnittsſehnen als Polarlinien betrachtet werden können, iſt, daß die Durchſchnittsſehnen aller Punkte einer Geraden und eines beſtimmten Winkels ſich in einem und demſelben Punkte ſchneiden, und daß umgekehrt der Ort des Durchſchnittspunktes der beiden Geraden, welche einen Kreis unter einem beſtimmten Winkel ſo ſchneiden, daß die Durchſchnittsſehne durch einen feſten Punkt geht, eine gerade Linie iſt.

Aufgabe [35]. Es ſind zwei Kreiſe, C_1 und C_2, und zwei Winkel, δ_1 und δ_2, gegeben. Wenn nun beide Kreiſe eine ſolche Lage haben, daß zwei Gerade den Kreis C_1 unter dem Winkel δ_1 und den Kreis C_2 unter dem Winkel δ_2 ſchneiden können, ſo ſoll die Gleichung der dadurch entſtehenden Durchſchnittsſehne in einem der beiden Kreiſe gefunden werden.

Eine ſehr einfache geometriſche Betrachtung wird die Löſung dieſer Aufgabe ungemein erleichtern. Eine Gerade nämlich, welche den Kreis C_1, deſſen Radius r_1 ſey, unter dem Winkel δ_1 ſchneidet, wird einen concentriſchen Kreis, deſſen Radius $r_1 \cos\delta_1$ iſt, berühren; und wenn dieſe Gerade den Kreis C_2, deſſen Radius r_2 ſeyn mag, unter dem Winkel δ_2 ſchneiden ſoll, ſo wird ſie zugleich einen zweiten, dem Kreiſe C_2 concentriſchen, Kreis, deſſen Radius $r_2 \cos\delta_2$ berühren müſſen, wie aus der S. 94. gemachten Bemerkung zu ſehen iſt. Die beiden in der Aufgabe genannten Geraden ſind alſo die gemeinſchaftlichen Tangenten der beiden, mit den Radien $r_1 \cos\delta_1$ und $r_2 \cos\delta_2$ beſchriebenen, Kreiſe und gehen alſo durch den innern oder durch den äußern Aehnlichkeitspunkt dieſer letztern. (M. ſ. die Bemerkung zu Ende des §. 24.) Die verlangte Durchſchnittsſehne iſt alſo diejenige, welche zu dem einen oder dem andern dieſer beiden eben genannten Punkte gehört.

Sind demnach

$$y^2+x^2 = r_1^2 \ldots (12) \quad ; \quad (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = r_2^2 \ldots\ldots (13)$$

die Gleichungen der Kreiſe C_1, C_2, ſo ſind

$$y^2+x^2 = r_1^2 \cos\delta_1^2 \ldots (14) \quad ; \quad (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = r_2^2 \cos\delta_2^2 \ldots (15)$$

die Gleichungen der, mit den Radien $r_1 \cos\delta_1$ und $r_2 \cos\delta_2$ aus denſelben Mit-

Mittelpunkten beschriebenen Kreise. Es sind dann ferner an diesen letztern §. 26.
die Coordinaten

des innern Aehnlichkeitsp. $\ldots x_1 = \frac{\alpha r_1 \cos\delta_1}{r_1\cos\delta_1 + r_2\cos\delta_2}$; $y_1 = \frac{\beta r_1 \cos\delta_1}{r_1\cos\delta_1 + r_2\cos\delta_2}$

des äußern Aehnlichkeitsp. $\ldots x_1 = \frac{\alpha r_1 \cos\delta_1}{r_1\cos\delta_1 - r_2\cos\delta_2}$; $y_1 = \frac{\beta r_1 \cos\delta_1}{r_1\cos\delta_1 - r_2\cos\delta_2}$

Die Durchschnittssehne an den Kreis C_1 wird nun aus der Gleichung (10) gefunden, wenn man darin $\beta = \alpha = 0$, $x' = x_1$, $y' = y_1$ setzt, und dann für x_1 u. y_1 die eben gefundenen Werthe einführt. Dies giebt als Gleichung der Durchschnittssehne an den Kreis C_1 des innern Aehnlichkeitspunktes

$$(\beta\cos\delta_1 - \alpha\sin\delta_1)u + (\beta\sin\delta_1 + \alpha\cos\delta_1)t - r_1(r_2\cos\delta_2 + r_1\cos\delta_1) = 0, \quad (16)$$

und als Gleichung der Durchschnittssehne des äußern Aehnlichkeitspunktes

$$(\beta\cos\delta_1 - \alpha\sin\delta_1)u + (\beta\sin\delta_1 + \alpha\cos\delta_1)t + r_1(r_2\cos\delta_2 - r_1\cos\delta_1) = 0. \quad (17)$$

§. 27.

Zwei Kreise schneiden sich unter einem Winkel δ, wenn ihre Tangenten in ihrem Durchschnittspunkte den Winkel δ bilden. Da nun die nach den Berührungspunkten gezogenen Radien auf den Tangenten senkrecht stehen, so ist der Winkel, unter dem sich zwei Kreise schneiden, der Supplementswinkel desjenigen, den die beiden, nach einem Durchschnittspunkte gezogenen, Radien dieser Kreise einschließen.

Die folgende Aufgabe, welche die Aufgabe (32) als einen besondern Fall in sich schließt, kann auf dieselbe Weise wie diese behandelt werden. Wir werden daher die Lösung nur andeuten.

Aufgabe [36]. Es sind drei Kreise C_1, C_2, C_3 gegeben; man soll denjenigen Kreis construiren, welcher diese drei Kreise unter gegebenen Winkeln schneide.

Es seyen wie im §. 25.

$$y^2 + x^2 = r_1^2, \quad (1)$$

$$(y - \beta_2)^2 + (x - \alpha_2)^2 = r_2^2, \quad (2)$$

$$(y - \beta_3)^2 + (x - \alpha_3)^2 = r_3^2 \quad (3)$$

die Gleichungen der gegebenen, und

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2 \quad (4)$$

die des gesuchten Kreises. Ferner seyen δ_1, δ_2, δ_3 die Winkel, unter welchen der Kreis (4) respective die Kreise (1), (2), (3) schneiden soll.

§. 27. Denkt man sich nun die Mittelpunkte und einen Durchschnittspunkt des gesuchten und eines jeden der gegebenen Kreise durch gerade Linien verbunden, so hat man drei Dreiecke, in welchen eine Seite die Entfernung der Mittelpunkte, die beiden andern Seiten aber die Radien des gesuchten und eines der gegebenen Kreise sind, was unmittelbar zu den Gleichungen

$$\beta^2+\alpha^2 = r^2+2\cos\delta_1 rr_1+r_1^2 , \quad (5)$$

$$(\beta-\beta_2)^2+(\alpha-\alpha_2)^2 = r^2+2\cos\delta_2 rr_2+r_2^2 , \quad (6)$$

$$(\beta-\beta_3)^2+(\alpha-\alpha_3)^2 = r^2+2\cos\delta_3 rr_3+r_3^2 \quad (7)$$

führt. Statt aus diesen Gleichungen die unbekannten Größen α, β und r zu entwickeln führe man zwei neue Unbekannte, nämlich die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Kreise (1) und (4) ein. Werden diese Größen durch t u bezeichnet, so hat man

$$u^2+t^2 = r_1^2 , \quad (8)$$

$$(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2 = r^2 . \quad (9)$$

Aus den Gleichungen (5), (8) u. (9) ergiebt sich

$$u\beta+t\alpha = r_1(r_1+r\cos\delta_1) , \quad (10)$$

und wenn man aus dieser Gleichung (10) und der Gleichung (5) α und β entwickelt, so findet man, nach einigen Reductionen, die sich in Folge von (8) ergeben,

$$\alpha = \frac{t(r_1+r\cos\delta_1)\pm ur\sin\delta_1}{r_1} \; ; \; \beta = \frac{u(r_1+r\cos\delta_1)\mp tr\sin\delta_1}{r_1} .$$

Zieht man die Gleichungen (6) u. (7) nach einander von (5) ab, so kommt

$$2\beta_2\beta+2\alpha_2\alpha+2(r_2\cos\delta_2-r_1\cos\delta_1)r = \alpha_2^2+\beta_2^2+r_1^2-r_2^2 ,$$

$$2\beta_3\beta+2\alpha_3\alpha+2(r_3\cos\delta_3-r_1\cos\delta_1)r = \alpha_3^2+\beta_3^2+r_1^2-r_3^2 ;$$

und setzt man in diese Gleichungen die für α und β gefundenen Ausdrücke, so erhält man

$$2\{(\beta_2\cos\delta_1\pm\alpha_2\sin\delta_1)u+(\alpha_2\cos\delta_1\mp\beta_2\sin\delta_1)t+(r_2\cos\delta_2-r_1\cos\delta_1)r_1\}r = -(2\beta_2u+2\alpha_2t-\beta_2^2-\alpha_2^2-r_1^2+r_2^2)r_1 ,$$

$$2\{(\beta_3\cos\delta_1\pm\alpha_3\sin\delta_1)u+(\alpha_3\cos\delta_1\mp\beta_3\sin\delta_1)t+(r_3\cos\delta_3-r_1\cos\delta_1)r_1\}r = -(2\beta_3u+2\alpha_3t-\beta_3^2-\alpha_3^2-r_1^2+r_3^2)r_1 ,$$

woraus durch Elimination von r

$$\{2\beta_3u+2\alpha_3t-\beta_3^2-\alpha_3^2-r_1^2+r_3^2\}\{(\beta_2\cos\delta_1\pm\alpha_2\sin\delta_1)u+(\alpha_2\cos\delta_1\mp\beta_2\sin\delta_1)t+(r_2\cos\delta_2-r_1\cos\delta_1)r_1\} =$$
$$\{2\beta_2u+2\alpha_2t-\beta_2^2-\alpha_2^2-r_1^2+r_2^2\}\{(\beta_3\cos\delta_1\pm\alpha_3\sin\delta_1)u+(\alpha_3\cos\delta_1\mp\beta_3\sin\delta_1)t+(r_3\cos\delta_3-r_1\cos\delta_1)r_1\} . \quad (11)$$

Der Durchschnittspunkt tu liegt nun in den beiden Linien (8) u. (11). §. 27.
Die erstere (8) ist der gegebene Kreis mit dem Radius r_1, und da die Gleichung der letztern (11), nach Aufhebung der Parentheſen und einigen Reductionen, die sich von selbst darbieten, die Form

$$y^2+x^2+Dy+Ex+F = 0$$

annimmt, so ist diese Linie (11) ein Kreis, der aber, wegen der doppelten Vorzeichen, zweierlei Größen und Lagen hat, und dessen Construction jetzt zu suchen ist.

Setzt man zur Abkürzung

$$2\beta_2 u+2\alpha_2 t-\beta_2^2-\alpha_2^2-r_1^2+r_2^2 = A_2\ ,$$
$$2\beta_3 u+2\alpha_3 t-\beta_3^2-\alpha_3^2-r_1^2+r_3^2 = A_3\ ,$$
$$(\beta_2 cos\delta_1 \pm \alpha_2 sin\delta_1)u+(\alpha_2 cos\delta_1 \mp \beta_2 sin\delta_1)t+(r_2 cos\delta_2-r_1 cos\delta_1)r_1 = B_2\ ,$$
$$(\beta_3 cos\delta_1 \pm \alpha_3 sin\delta_1)u+(\alpha_3 cos\delta_1 \mp \beta_3 sin\delta_1)t+(r_3 cos\delta_3-r_1 cos\delta_1)r_1 = B_3\ ,$$

so ist die Gleichung (11) durch

$$A_3B_2 = A_2B_3$$

ausgedrückt, und man sieht leicht ein, daß diese Gleichung durch diejenigen vier Werthe von t und von u befriedigt wird, welche die vier Systeme

$$\left\{\begin{matrix}A_2=0\\A_3=0\end{matrix}\right\}\quad\left\{\begin{matrix}B_2=0\\B_3=0\end{matrix}\right\}\quad\left\{\begin{matrix}A_2=0\\B_2=0\end{matrix}\right\}\quad\left\{\begin{matrix}A_3=0\\B_3=0\end{matrix}\right\}$$

befriedigen, woraus denn folgt, daß die Durchschnittspunkte der Linien

$A_2=0$ u. $A_3=0$, $B_2=0$ u. $B_3=0$, $A_2=0$ u. $B_2=0$, $A_3=0$ u. $B_3=0$

in der Kreisperipherie (11) liegen. Um nun diese vier Punkte zu finden, ist es nur nöthig, die eben genannten Linien, deren Gleichungen

$$2\beta_2 u+2\alpha_2 t-\beta_2^2-\alpha_2^2-r_1^2+r_2^2 = 0\ , \qquad (12)$$
$$2\beta_3 u+2\alpha_3 t-\beta_3^2-\alpha_3^2-r_1^2+r_3^2 = 0\ , \qquad (13)$$
$$(\beta_2 cos\delta_1 \pm \alpha_2 sin\delta_1)u+(\alpha_2 cos\delta_1 \mp \beta_2 sin\delta_1)t+(r_2 cos\delta_2-r_1 cos\delta_1)r_1 = 0\ , \qquad (14)$$
$$(\beta_3 cos\delta_1 \pm \alpha_3 sin\delta_1)u+(\alpha_3 cos\delta_1 \mp \beta_3 sin\delta_1)t+(r_3 cos\delta_3-r_1 cos\delta_1)r_1 = 0 \qquad (15)$$

sind, zu construiren. Es ist aber aus §. 23. (S. 19.) ersichtlich, daß die Linie (12) die Collineationsachse der Kreise (1) und (2), und die Linie (13) die Collineationsachse der Kreise (1) und (3) ist. Ferner ist aus §. 26. (S. 17.) klar, daß die Gleichung (14), mit den untern Vorzeichen genommen, die Durchschnittssehne in dem Kreise (1) für die, die beiden Kreise (1) und (2) unter den Winkeln δ_1 und δ_2 schneidenden, durch den äußern Aehnlichkeitspunkt der mit den Radien $r_1 cos\delta_1$ und $r_2 cos\delta_2$

§. 27. beschriebenen concentrischen Kreise gehenden, Geraden, und daß die Gleichung (15), mit den untern Vorzeichen genommen, die Durchschnittssehne in dem Kreise (1) für die die beiden Kreise (1) und (3) unter den Winkeln δ_1 und δ_3 schneidenden, durch den äußern Aehnlichkeitspunkt der mit den Radien $r_1 \cos\delta_1$ und $r_3 \cos\delta_3$ beschriebenen concentrischen Kreise gehenden, Geraden ausdrückt. Auch ist leicht zu sehen, daß die Gleichungen (14) und (15), mit den obern Vorzeichen genommen, Durchschnittssehnen ausdrücken, die auf dieselbe Weise, wie die angegebenen, nur aber für Gerade gezogen sind, welche die genannten Kreise respective unter den Winkeln $\pi-\delta_1$ und $\pi-\delta_2$, $\pi-\delta_1$ und $\pi-\delta_3$ schneiden.

Unsere Analyse führt nun zu folgender Construction:

Man ziehe die Collineationsachse A_2 der Kreise C_1 und C_2, und die Collineationsachse A_3 der Kreise C_1 und C_3. Man beschreibe drei, den Kreisen C_1, C_2, C_3 concentrische, Kreise γ_1, γ_2, γ_3 respective mit den Radien $r_1 \cos\delta_1$, $r_2 \cos\delta_2$, $r_3 \cos\delta_3$. Man ziehe die gemeinschaftlichen Tangenten an den Kreisen γ_1 und γ_2, γ_1 und γ_3, welche durch die äußern Aehnlichkeitspunkte dieser Kreise gehen, und die, sich dadurch ergebenden, Durchschnittssehnen B_2, B'_2 und B_3, B'_3 in dem Kreise C_1 (von welchen die einen, B_2 u. B_3, zu den Winkeln δ_1 und δ_2, δ_1 und δ_3, die andern, B'_2 u. B'_3, zu den Winkeln $\pi-\delta_1$ und $\pi-\delta_2$, $\pi-\delta_1$ und $\pi-\delta_3$ gehören werden). Man beschreibe einen Kreis durch die Durchschnittspunkte der Geraden A_2 und A_3, B_2 und B_3, A_2 und B_2, welcher durch den Durchschnitt von A_3 und B_3 gehen wird, und nenne die Punkte, in welchen er den Kreis C_1 trifft, m_1, m_2. Man beschreibe ferner einen Kreis durch die Durchschnittspunkte der Geraden A_2 und A_3, B'_2 und B'_3, A_2 und B'_2 welcher durch den Durchschnitt von A_3 und B'_3 gehen wird, und nenne die Punkte, in welchen er den Kreis C_1 trifft, m'_1, m'_2.

Man wiederhole dieselbe Construction, indem man an die Stelle des Kreises C_1 den Kreis C_2, und an die Stelle des Kreises C_2 den Kreis C_1 setzt, wodurch man vier Punkte n_1, n_2, n_1', n_2' auf dem Kreise C_2 erhält.

Man mache die erste Construction noch einmal, indem man die Kreise C_1 und C_3 mit einander vertauscht, wodurch man zu vier Punkten p_1, p_2, p'_1, p'_2 auf dem Kreise C_3 kommt.

Beschreibt man nun durch die Punkte $m_1n_1p_1$ oder $m_2n_2p_2$ oder $m'_1n'_1p'_1$ oder $m'_2n'_2p'_2$ einen Kreis, so wird dieser die gegebenen unter den Winkeln δ_1, δ_2, δ_3, schneiden.

Linien zweiten Grades.

§. 28.

Jede Gleichung vom zweiten Grade zwiſchen den Coordinaten x, y kann auf die Form

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0 \qquad (1)$$

gebracht werden.

Wir nehmen an, daß die Coefficienten a, b, c ꝛc. der Gleichung (1) reelle (poſitive oder negative) Größen bedeuten. Dieſe Gleichung wird dann eine Linie ausdrücken, wenn zu ſtetig auf einander folgenden reellen Werthen von x ſtetig auf einander folgende reelle Werthe von y gehören; ſie wird nur einzelne Punkte ausdrücken, wenn ſie nicht für ſtetig auf einander folgende, ſondern nur für einzelne reelle Werthe von x reelle Werthe von y giebt; und ſie wird keine geometriſche Bedeutung haben (eine imaginäre Curve ausdrücken), wenn zu keinem reellen Werthe von x ein reeller Werth von y gehört.

Aufgabe [37]. *Welche Relationen müſſen zwiſchen den Coefficienten der Gleichung (1) Statt finden, wenn dieſe Gleichung keine Linie und keinen Punkt ſoll ausdrücken können?*

Löſt man die Gleichung (1) nach y auf, ſo kommt

$$y=-\frac{bx+d}{a}\pm\frac{1}{a}\sqrt{(b^2-ac)x^2+2(bd-ae)x+(d^2-af)}, \qquad (2)$$

und es werden zu jedem reellen Werthe von x imaginäre Werthe von y gehören, wenn der unter dem Wurzelzeichen ſtehende Ausdruck für jeden reellen Werth von x negativ wird. Dies iſt, nach einem bekannten Satze, der Fall, wenn entweder

$$\text{zugleich } b^2-ac=0 \;;\; bd-ae=0 \text{ und } d^2-af<0 \qquad (3)$$

oder wenn

$$\text{zugleich } b^2-ac<0 \text{ und } (bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)<0. \qquad (4)$$

Finden alſo zwiſchen den Coefficienten die Relationen (3) oder (4) Statt, ſo drückt die Gleichung (1) weder eine Linie noch einen Punkt aus.

Beiſpiel I. In der Gleichung

§. 28. $y^2+2nxy+n^2x^2+2my+2mnx+m^2+p^2=0$

werden, wenn p eine reelle Größe bedeutet, die Bedingungen (3) befriedigt, sie drückt daher weder einen Punkt noch eine Linie aus. Diese Gleichung läßt sich übrigens auf die Form $(y+nx+m)^2+p^2=0$ bringen, aus welcher ersichtlich ist, daß sie durch keine reellen Werthe von x und y befriedigt wird, weil die Summe zweier Quadrate nicht gleich Null seyn kann.

Beispiel II. In der Gleichung

$$2y^2+10xy+13x^2+1=0$$

werden die Bedingungen (4) erfüllt, sie hat daher ebenfalls keine geometrische Bedeutung, was auch wiederum daraus zu sehen, daß man sie auf die Form $(y+2x)^2+(y+3x)^2+1=0$ bringen kann.

Aufgabe [38]. Welche Relationen müssen zwischen den Coefficienten der Gleichung (1) Statt finden, wenn diese Gleichung nur einen Punkt ausdrücken soll?

Es sey, wie in der vorigen Aufgabe, die Gleichung (1) nach y aufgelöst. Wäre nun $b^2-ac>0$ oder $b^2-ac=0$, so würde es, wie bekannt, eine stetige Folge von Werthen von x geben, welche den, unter dem Wurzelzeichen der Gleichung (2) stehenden, Ausdruck positiv also y reell machen. Es ist daher eine der gesuchten Bedingungen

$$b^2-ac<0\,. \qquad (5)$$

Wäre aber außerdem $(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)>0$, so würde es, wie bekannt, immer noch eine stetige Folge von x geben, welche den genannten Ausdruck positiv machen; wäre aber $(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)<0$, so würde der Fall der vorigen Aufgabe Statt haben. Also kann nur noch

$$(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)=0 \qquad (6)$$

seyn. Werden nun beide Bedingungen (5) und (6) von den Coefficienten der Gleichung (1) erfüllt, so drückt diese wirklich nur einen Punkt aus. Denn aus (6) ergiebt sich $bd-ae=\sqrt{b^2-ac}\,.\sqrt{d^2-af}$, und dieser Werth, in die Gleichung (2) substituirt, giebt

$$y=-\frac{bx+d}{a}\pm\frac{1}{a}\sqrt{(b^2-ac)x^2+2\sqrt{b^2-ac}\cdot\sqrt{d^2-af}\,.\,x+(d^2-af)}$$

oder

$$y=-\frac{bx+d}{a}\pm\frac{1}{a}\{\sqrt{b^2-ac}\,.\,x+\sqrt{d^2-af}\}\,. \qquad (7)$$

Da aber $(bd-ae)^2$ nothwendigerweise positiv oder Null, und b^2-ac, zu- §. 28.
folge von (5), negativ ist, so muß in Folge von (6) auch d^2-af negativ oder Null seyn. In beiden Fällen wird also der in den Parentheſen eingeſchloſſene Ausdruck der Gleichung (7) für jeden reellen Werth von x imaginär werden, ausgenommen wenn $x=-\frac{\sqrt{d^2-af}}{\sqrt{b^2-ac}}$ ist. Dieſer Werth von x, für den man übrigens, weil, in Folge von (6),
$\sqrt{d^2-af}=\frac{bd-ae}{\sqrt{b^2-ac}}$ ist, $\frac{ae-bd}{b^2-ac}$ ſetzen kann, giebt, in die Gleichung (7) ſubſtituirt, $y=\frac{cd-be}{b^2-ac}$. Der einzige Punkt alſo, welchen die Gleichung (1) ausdrückt, wenn die Bedingungen (5) und (6) zu gleicher Zeit Statt finden, hat zu Coordinaten

$$x=\frac{ae-bd}{b^2-ac}\ ;\ y=\frac{cd-be}{b^2-ac}\ .$$

Beiſpiel. Die Coefficienten der Gleichung

$$4y^2-32xy+80x^2-24y+40x+85=0$$

erfüllen die Bedingungen (5) und (6). Dieſe Gleichung drückt daher nur einen Punkt aus; auch läßt ſie ſich auf die Form

$$4(y-4x-3)^2+(4x-7)^2=0$$

bringen, woraus augenſcheinlich iſt, daß nur diejenigen Werthe, welche zu gleicher Zeit $y-4x-3=0$ und $4x-7=0$ machen, d. i. $x=\frac{7}{4}$ und $y=10$, die Gleichung befriedigen.

Aufgabe [39]. Welche Relationen müſſen zwiſchen den Coefficienten der Gleichung (1) Statt finden, wenn dieſe Gleichung zwei gerade Linien ausdrücken ſoll?

Welches auch die Geraden ſeyn mögen, die die Gleichung (1) ausdrücken ſoll, ſo werden ſie ſich durch Gleichungen vom erſten Grade, alſo durch Gleichungen von der Form $y=mx+n$ darſtellen laſſen. Daher muß jetzt die Gleichung (2) ſich auf dieſe Form reduciren, das heißt, es muß der mit dem Wurzelzeichen behaftete Ausdruck ein vollſtändiges Quadrat ſeyn. Dies iſt aber nur der Fall, wenn

$$(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)=0 \qquad (8)$$

§. 28. ist, und alsdann ist

$$\text{entweder } y = \frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}x - \frac{d-\sqrt{d^2-af}}{a}$$

$$\text{oder } y = \frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}x - \frac{d+\sqrt{d^2-af}}{a}.$$

Damit aber diese letzten Gleichungen gerade Linien ausdrücken, ist noch erforderlich, daß ihre Coefficienten reell seyen; daher muß entweder $b^2-ac>0$ oder $b^2-ac=0$ seyn, und in Folge von (8) ist alsdann auch $d^2-af\geq 0$. Die gesuchten Relationen sind daher

$$(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)=0 \qquad (8)$$

$$b^2-ac\geq 0\,. \qquad (9)$$

Beispiel. Die Coefficienten der Gleichung

$$3y^2+2xy-5x^2-2y-6x-1=0$$

befriedigen die Bedingungsgleichungen (8) und (9); daher drückt diese Gleichung zwei Gerade aus. Sie läßt sich auch auf die Form

$$(y-x-1)(3y+5x+1)=0$$

bringen, so daß entweder $y-x-1=0$ oder $3y+5x+1=0$ ist, welche letztere Gleichungen diejenigen der beiden geraden Linien sind.

Faßt man die in diesem §. gewonnenen Resultate zusammen, so hat man Folgendes:

Analytische Bedingungen.			Geometrische Bedeutung der Gleichung $ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0$.
b^2-ac	$(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)$		
Negativ	Negativ		Keine reelle Linie u. kein reeller Punkt.
Negativ	Null		Ein einziger reeller Punkt.
Positiv	Null		Zwei Gerade.
Null	Null u. d^2-af	negativ	Keine reelle Linie u. kein reeller Punkt.
		positiv	Zwei parallele Gerade.
		null	Eine Gerade.

Wir müssen aber bemerken, daß diese Resultate nur so lange Anwendung finden können, als nicht $a=0$ ist, weil die Herleitung derselben voraussetzt, daß der Coefficient der Wurzelgröße in der Gleichung (2), nämlich $\frac{1}{a}$, nicht unendlich sey. Wenn nun $a=0$ ist, so kann man die Gleichung

(1) nach x aufgelöst sich denken, was darauf hinausläuft, in allen obigen Formeln x mit y, a mit c und d mit e gegenseitig zu vertauschen. Der Ausdruck $b^2 - ac$ bleibt dadurch ungeändert; für $(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)$ aber bekommt man $(be-cd)^2-(b^2-ac)(e^2-cf)$, welchen Ausdruck man in die obige Zusammenstellung einführen kann. Wenn aber außer $a = 0$ auch $c = 0$ ist, so wird es nöthig, die Betrachtung der Gleichung (1) wieder von neuem anzufangen. Man hat alsdann §. 28.

$$2bxy + 2dy + 2ex + f = 0 , \qquad (10)$$

woraus

$$y = -\frac{2ex+f}{2bx+2d} .$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß zu jedem reellen Werth von x ein reeller Werth von y gehört, und da $-\frac{2ex+f}{2bx+2d} = -\frac{e\left(x+\frac{f}{2e}\right)}{b\left(x+\frac{d}{b}\right)}$ ist, so folgt, daß die Gleichung (10) nur dann zwei gerade Linien ausdrücken werde, wenn $\frac{f}{2e} = \frac{d}{b}$ oder $bf = 2de$ ist. Die Gleichungen dieser Geraden sind alsdann $y + \frac{e}{b} = 0$ und $x + \frac{d}{b} = 0$, die Geraden selbst also den Coordinatenachsen parallel.

§. 29.

Bei den folgenden Aufgaben werden wir annehmen, daß die im vorigen §. aufgestellten Relationen zwischen den Coefficienten der Gleichung des zweiten Grades nicht Statt finden, und daß daher diese Gleichung eine krumme Linie (Curve) ausdrücke, die, nach dem Grade ihrer Gleichung, eine Linie des zweiten Grades genannt wird.

Aufgabe [40]. In einer Linie zweiten Grades sind Sehnen einer unveränderlichen Richtung parallel gezogen. Man soll den Ort des Halbirungspunktes dieser Sehnen finden.

Es sey

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0 \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung einer Linie zweiten Grades, und

§. 29. $$y = nx + p$$

die Gleichung einer Geraden, welche die bestimmte Richtung hat. Beide Linien seyen auf dieselben rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinatenachsen bezogen. Jede andere Gerade, welche jener Richtung parallel ist, hat zur Gleichung

$$y = nx + q \,, \qquad (2)$$

so daß diese letzte Gleichung alle, der gegebenen Geraden parallele, Linien ausdrückt, wenn man n unveränderlich, q aber veränderlich setzt. In den Durchschnittspunkten der Curve (1) und einer der Geraden (2) sind die Coordinaten der Curve denen der Geraden gleich; man wird also die Coordinaten dieser Durchschnittspunkte finden, wenn man aus den Gleichungen (1) u. (2) die Werthe von x und y bestimmt, welche beiden Gleichungen zugleich genügen. Da aber die eine dieser Gleichungen vom zweiten und die andere vom ersten Grade ist, so wird man im Allgemeinen zwei Paar Coordinatenwerthe finden, woraus sich ergiebt, daß im Allgemeinen die Geraden (2) die Curve (1) in zwei Punkten schneiden; und diese sind die Endpunkte der in Rede stehenden Sehnen. Setzt man den Ausdruck von y, den die Gleichung (2) unmittelbar giebt, in die Gleichung (1), so hat man zur Bestimmung der Abscissen der eben genannten Endpunkte die Gleichung

$$(an^2 + 2bn + c)x^2 + 2\{(aq + d)n + bq + e\}x + aq^2 + 2dq + f = 0 \,.$$

Nennt man diese Abscissen x' u. x'', und die Coordinaten des Halbirungspunktes der Sehnen t, u, so ist (§. 5. F. 4.) $t = \frac{1}{2}(x' + x'')$. Da nun aus der eben gefundenen Gleichung, ohne daß es nöthig ist sie aufzulösen,

$$x' + x'' = -\frac{2\{(aq + d)n + bq + e\}}{an^2 + 2bn + c}$$

gefunden wird, so hat man

$$t = -\frac{(an + b)q + dn + e}{an^2 + 2bn + c} \,; \qquad (3)$$

und da der Punkt tu in der Geraden (2) liegt, so hat man auch

$$u = nt + q \,. \qquad (4)$$

Eliminirt man die, von einer Geraden zur andern sich verändernde, Größe q zwischen den Gleichungen (3) und (4), so kommt

$$(an + b)u + (bn + c)t + dn + e = 0 \,, \qquad (5)$$

als Gleichung für den gesuchten Ort, welcher, wie man sieht, eine gerade Linie ist. §. 29.

Eine Gerade, welche alle einer und derselben Richtung parallele Sehnen einer Linie zweiten Grades halbirt, wird ein Durchmesser der Curve genannt. Der Winkel β, den ein Durchmesser (5) der Curve (1) mit der Abscissenachse bildet, ist durch die Gleichung

$$\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = -\frac{bn+c}{an+b}$$

(§. 4. F. 6.) gegebenen, wo α den Coordinatenwinkel bedeutet. Da nun $\frac{bn+c}{an+b} = \frac{b\left(n+\frac{c}{b}\right)}{a\left(n+\frac{b}{a}\right)}$ ist, so sieht man, daß $\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{b}{a}$, d. i. unabhängig von n seyn wird, wenn $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$ oder, was dasselbe ist, wenn $b^2-ac = 0$ ist. Ist also die Linie zweiten Grades so beschaffen, daß $b^2-ac = 0$ ist, so sind alle Durchmesser der Curve einander parallel. Findet aber die Gleichung $b^2-ac = 0$ nicht Statt, so schneiden sich alle Durchmesser einer Linie zweiten Grades in einem und demselben Punkte. Denn die Gleichung (5) eines Durchmessers kann auf die Form

$$(au+bt+d)n+bu+ct+e = 0 \qquad (6)$$

gebracht werden, aus welcher zu ersehen ist, daß diese Gerade durch den Durchschnitt der beiden Geraden

$$au+bt+d = 0 \quad (7) \quad ; \quad bu+ct+e = 0 \quad (8)$$

geht, das heißt durch einen Punkt, der immer derselbe ist, was auch n seyn mag. Für die Coordinaten dieses Punktes, die wir durch $\alpha'\beta'$ bezeichnen wollen, findet man aus den Gleichungen (7) und (8)

$$\alpha' = \frac{ae-bd}{b^2-ac} \quad ; \quad \beta' = \frac{cd-be}{b^2-ac}, \qquad (9)$$

welche Ausdrücke nur dann unendlich werden, wenn $b^2-ac = 0$ ist.

Weil nun jeder Durchmesser durch den Punkt $\alpha'\beta'$ geht, wenn $b^2-ac \gtrless 0$, so kann, die Gleichung eines Durchmessers durch

$$u-\beta' = m(t-\alpha') \quad \text{oder} \quad u = mt+\beta'-m\alpha'$$

ausgedrückt werden. Derjenige Durchmesser, welcher alle Sehnen halbirt,

§. 29. die jenem parallel gezogen sind, wird durch eine Gleichung von derselben Form, nämlich durch $u = m't + \beta' - m'\alpha'$ sich ausdrücken lassen, wo aber, wie aus der, in der vorigen Aufgabe gefundenen, Gleichung (5) sich ergiebt,

$$m' = -\frac{bm+c}{am+b} \quad \text{oder} \quad amm' + b(m+m') + c = 0 \qquad (10)$$

ist. Da nun diese Gleichung in Beziehung auf m und m' symmetrisch ist, so folgt, daß auch der erste dieser beiden Durchmesser alle Sehnen, welche dem zweiten parallel gezogen sind, halbiren muß. Zwei solche Durchmesser, von welchen jeder die Sehnen, die dem andern parallel sind, halbirt, heißen zusammengehörige oder conjugirte Durchmesser.

Um die beiden Durchmesser zu finden, welche die der Ordinatenachse und die der Abscissenachse parallelen Sehnen halbiren, oder, was dasselbe ist, welche dem der Ordinatenachse und dem der Abscissenachse parallelen Durchmesser conjugirt sind, braucht man in der Gleichung (5) oder (6) nur $\frac{1}{n}$ und n gleich Null zu setzen. Auf diese Weise findet man, daß die Gleichungen (7) und (8) diese beiden Durchmesser ausdrücken.

Der Mittelpunkt einer Linie zweiten Grades ist ein Punkt, der so liegt, daß er alle durch ihn gezogenen Sehnen halbirt.

Aufgabe [41]. Die Gleichung einer Linie zweiten Grades ist gegeben; man soll die Coordinaten ihres Mittelpunktes finden.

Es sey

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0 \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung, und es seyen x'y' die gesuchten Coordinaten des Mittelpunktes.

Nimmt man den Punkt x'y' zum Anfangspunkt neuer Coordinaten, so hat man, nach den Transformationsformeln (§. 3.), $x + x'$ und $y + y'$ statt x und y zu setzen. Dies giebt

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2(ay' + bx' + d)y + 2(by' + cx' + e)x + ay'^2 + 2bx'y' + cx'^2 + 2dy' + 2ex' + f = 0 . \qquad (11)$$

Jede Gerade, welche durch den neuen Anfangspunkt der Coordinaten geht, hat aber zur Gleichung $y = nx$, und eliminirt man zwischen dieser und der tansformirten Gleichung der Curve, deren letztes Glied wir zur Abkürzung durch Q bezeichnen, nach einander y und x, so kommt

$$(an^2+2bn+c)x^2+2\{(ay'+bx'+d)n+(by'+cx'+e)\}x+Q=0\,,$$
$$(an^2+2bn+c)y^2+2\{(ay'+bx'+d)n+(by'+cx'+e)\}ny+n^2Q=0\,.$$

§. 29.

Die Wurzeln dieſer Gleichungen geben offenbar die Coordinaten der Endpunkte der, durch den neuen Anfangspunkt gezogenen, Sehnen, und wenn man dieſe Wurzeln durch x_1, x_2 und y_1, y_2 bezeichnet, ſo iſt bekanntermaßen

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{(ay'+bx'+d)n+by'+cx'+e}{an^2+2bn+c}\,,$$
$$\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{(ay'+bx'+d)n+by'+cx'+e}{an^2+2bn+c}\,.n\,.$$

Da nun aber $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ und $\frac{1}{2}(y_1+y_2)$ die Coordinaten des Halbirungspunktes der Sehnen ſind (§. 5. F. 4.), und dieſer Halbirungspunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ſeyn ſoll; ſo müſſen die eben gefundenen Ausdrücke gleich Null ſeyn, und zwar für jeden Werth von n, was nur Statt findet, wenn zu gleicher Zeit

$$ay'+bx'+d=0\quad(7')\quad;\quad by'+cx'+e=0\quad(8')$$

iſt. Dieſe Gleichungen, welche mit den Gleichungen (7 u. 8) in der vorigen Aufgabe übereinſtimmen, geben für die Coordinaten des Mittelpunktes in Beziehung auf das Coordinatenſyſtem, auf welches die Gleichung (1) ſich bezieht,

$$x'=\frac{ae-bd}{b^2-ac}\quad\text{und}\quad y'=\frac{cd-be}{b^2-ac}\,.\qquad(12)$$

Die eben gefundenen Ausdrücke ſtimmen mit den, für α' und β' in der vorigen Aufgabe hergeleiteten, Ausdrücken (9) überein, woraus ſich ergiebt, daß der Durchſchnittspunkt der Durchmeſſer der Mittelpunkt der Curve iſt, was ſich auf bloß geometriſchem Wege hätte darthun laſſen. Wir haben aber mit Abſicht dieſe Aufgabe auf directem Wege gelöſt.

Wenn $b^2-ac=0$ iſt, werden beide Coordinaten des Mittelpunktes, x' u. y', unendlich. Die Curve hat alsdann keinen Mittelpunkt.

Daß $b^2-ac=0$ und zugleich $ae-bd=0$, oder $b^2-ac=0$ und zugleich $cd-be=0$ ſeyen — in welchen Fällen die eine oder die andere Coordinate des Mittelpunktes $=\frac{0}{0}$ würde — iſt gegen unſere Vorausſetzung, weil alsdann die Gleichung (1) keine Curve ausdrückt (§. 28.).

§. 29. **Aufgabe [42].** Die Gleichung

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0 \qquad (1)$$

unter der Voraussetzung, daß die Curve, welche sie ausdrückt, einen Mittelpunkt habe, durch Transformation der Coordinaten auf die Form $My^2+Nx^2+P=0$ zu bringen.

Setzt man, wie in der vorigen Aufgabe, $x+x'$ und $y+y'$ für x und y, so erhält man die Gleichung (11), in welcher die Coefficienten von y und x, also das 4te und 5te Glied, verschwinden, wenn man x' und y' so annimmt, daß $ay'+bx'+d=0$ und $by'+cx'+e=0$ werden, das heißt, wenn man ihnen die Werthe (12) giebt, die unter der gegenwärtigen Voraussetzung endlich sind. Die auf diese Weise transformirte Gleichung, welche sich auf neue, den alten parallele und durch den Mittelpunkt der Curve gehende, Coordinatenachsen bezieht, hat die Form

$$ay^2+2bxy+cx^2+Q=0\,, \qquad (13)$$

wo $Q=ay'^2+2bx'y'+cx'^2+2dy'+2ex'+f=(ay'+bx'+d)y'+(by'+cx'+e)x'+dy'+ex'+f$ oder, weil $ay'+bx'+d=0$ und $by'+cx'+e=0$, $Q=dy'+ex'+f$. Setzt man für x' und y' ihre Werthe (12), so ergiebt sich

$$Q=\frac{d(cd-be)+e(ae-bd)+f(b^2-ac)}{b^2-ac}=\frac{(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)}{a(b^2-ac)}\,.$$

Setzt man ferner, um nun auch die Richtung der Coordinatenachsen zu ändern, $\frac{\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha-\gamma)y}{\sin\alpha}$ statt x, und $\frac{\sin\beta x+\sin\gamma y}{\sin\alpha}$ statt y (§. 3. F. 3.); so kommt

$$\left.\begin{array}{l}\{a\sin^2\gamma+2b\sin(\alpha-\gamma)\sin\gamma+c\sin^2(\alpha-\gamma)\}y^2\\ +2\{a\sin\beta\sin\gamma+b[\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\sin(\alpha-\gamma)]+c\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\}xy\\ +\{a\sin^2\beta+2b\sin(\alpha-\beta)\sin\beta+c\sin^2(\alpha-\beta)\}x^2+Q\sin^2\alpha\end{array}\right\}=0\,, \qquad (14)$$

und damit das xy enthaltende Glied verschwinde, müssen β und γ so gewählt werden, daß

$$a\sin\beta\sin\gamma+b[\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\sin(\alpha-\gamma)]+c\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)=0 \qquad (15)$$

werde, was auf unendlich verschiedene Arten geschehen kann. Nachdem dies geschehen, ist, wenn man

$$a\sin^2\gamma+2b\sin(\alpha-\gamma)\sin\gamma+c\sin^2(\alpha-\gamma)=M\,,$$
$$a\sin^2\beta+2b\sin(\alpha-\beta)\sin\beta+c\sin^2(\alpha-\beta)=N\,,$$
$$Q\sin^2\alpha=P$$

§. 29.

setzt,

$$My^2+Nx^2+P=0\,, \qquad (16)$$

was verlangt wurde.

Da α der Coordinatenwinkel der alten Achsen, β der Winkel, welchen die neue Abscissenachse, und γ derjenige, welchen die neue Ordinatenachse mit der alten Abscissenachse bildet, und da $x'\,y'$ die Coordinaten des neuen Anfangspunktes sind; so ist, in Beziehung auf die alten Achsen (§. 4. S. 8.),

die Gleichung der neuen Abscissenachse $y-y'=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}(x-x')$,

die Gleichung der neuen Ordinatenachse $y-y'=\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)}(x-x')$,

welche Gleichungen man respective durch

$$y-y'=m(x-x') \quad \text{und} \quad y-y'=m'(x-x')$$

ausdrücken kann, wenn man $\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=m$ und $\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)}=m'$ setzt. Da nun die Bedingungsgleichung (15) auf die Form

$$a\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)}+b\left[\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\right]+c=0$$

gebracht werden kann, so ergiebt sich, wenn man die Größen m und m' einführt,

$$amm'+b(m+m')+c=0\,,$$

welches die Gleichung (10) ist, und woraus man sieht, daß die neuen Coordinatenachsen conjugirte Durchmesser sind.

Der Gleichung $My^2+Nx^2+P=0$ (16) kann man dadurch, daß man

$$\frac{M}{P}=-\frac{1}{B^2} \quad \text{und} \quad \frac{N}{P}=-\frac{1}{A^2}$$

setzt, die Form

$$\frac{y^2}{B^2}+\frac{x^2}{A^2}=1 \quad \text{oder} \quad A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2 \qquad (17)$$

geben.

Aufgabe [43]. Man soll die Größen A^2 und B^2 der transformirten Gleichung $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$ durch die Coefficienten a, b...f der ursprünglichen Gleichung (1) ausdrücken, unter der Voraussetzung, daß die neuen Coordinatenachsen rechtwinklig seyen.

§. 29. Wenn der neue Coordinatenwinkel ein rechter ist, so ist $\gamma-\beta=\frac{1}{2}\pi$ oder $\gamma=\frac{1}{2}\pi+\beta$, und dadurch geht die Bedingungsgleichung (15) in

$$a\sin\beta\cos\beta+b[\cos\beta\sin(\alpha-\beta)-\sin\beta\cos(\alpha-\beta)]-c\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)=0 \quad (18)$$

über, welcher, durch eine gehörige Bestimmung von β, und zwar auf doppelte Weise genügt werden kann. Dieser Gleichung (18) kann man nämlich durch eine leichte Umformung die Gestalt

$$tang^2\beta+\frac{c\cos 2\alpha-2b\cos\alpha+a}{(c\cos\alpha-b)\sin\alpha}\,.\,tang\,\beta-1=0$$

geben, woraus zu sehen ist, daß $tang\,\beta$ zwei reelle Werthe bekommt, indem das letzte Glied der Gleichung negativ ist. Aber wenn man diese Werthe durch $tang\,\beta'$ und $tang\,\beta''$ bezeichnet, so ist, zufolge derselben Gleichung, $tang\,\beta'\,.\,tang\,\beta''=-1$; die beiden neuen Abscissenachsen, welche man durch diese Bestimmung erhält, stehen also senkrecht auf einander, d. i., wenn $\beta=\beta'$ genommen wird, so ist $\gamma=\beta''$ und umgekehrt, wenn man $\beta=\beta''$ nimmt, so ist $\gamma=\beta'$, so daß beide Werthe von β nur ein einziges Coordinatensystem geben.

Setzt man nun in die durch M und N vertretenen Ausdrücke (vor. Aufg.) $\frac{1}{2}\pi+\beta$ für γ, so kommt

$$a\cos^2\beta-2b\cos(\alpha-\beta)\cos\beta+c\cos^2(\alpha-\beta)=M\,,$$
$$a\sin^2\beta+2b\sin(\alpha-\beta)\sin\beta+c\sin^2(\alpha-\beta)=N\,,$$

und wenn man diese Gleichungen nach einander addirt und ihre einzelnen Theile in einander multiplicirt, so erhält man, wenn man die Gleichung (18) dabei berücksichtigt,

$$a-2b\cos\beta+c=M+N\;;\quad(ac-b^2)\sin^2\alpha=MN\,.$$

Da nun $A^2+B^2=-\frac{(M+N)P}{MN}$, $A^2B^2=\frac{P^2}{MN}$ und $P=Q\sin^2\alpha$, so hat man, wenn man für Q den, in der vorigen Aufgabe angegebenen, Ausdruck setzt,

$$A^2+B^2=\frac{(a-2b\cos\alpha+c)\{(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)\}}{a(b^2-ac)^2}\,, \quad (19)$$

$$A^2B^2=-\frac{\{(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)\}^2\sin^2\alpha}{a^2(b^2-ac)^3}\,, \quad (20)$$

woraus A^2 und B^2 leicht gefunden werden können.

Die beiden conjugirten Durchmesser einer Linie zweiten Grades, welche senk-

senkrecht auf einander stehen, werden Achsen der Curve genannt. Unter der Länge der Achsen versteht man diejenigen Stücke derselben, welche von der Curve begrenzt werden. §. 29

Wenn, wie in der letzten Aufgabe, der Winkel der neuen Coordinaten ein rechter ist, so sind demnach die neuen Coordinatenachsen die Achsen der Curve

$$A^2y^2+B^2x^2 = A^2B^2 , \qquad (17)$$

und da diese die Abscissenachse in zwei Punkten schneidet, deren Abscissen, wie aus der Gleichung zu sehen, wenn man darin $y = 0$ setzt, gleich $+A$ und $-A$; da ferner die Ordinatenachse von dieser Curve in zwei Punkten geschnitten wird, deren Ordinaten, wie auf ähnliche Weise erhellet, gleich $+B$ und $-B$ sind; so sind die Längen der beiden Achsen gleich $2A$ und $2B$. Die Realität dieser Längen, so wie die Realität der Punkte, in welchen die Curve die Coordinatenachsen schneidet, hängt, wie man sieht, davon ab, ob A und B reelle Größen, d. i. ob A^2 und B^2 positive Größen sind. Die Gleichheit der Vorzeichen von A^2 und B^2 hängt aber wiederum von dem Zeichen von (b^2-ac) ab; denn wenn $b^2-ac < 0$ ist, so ist, in Folge der Gleichung (20), A^2B^2 eine positive Größe, und folglich sind A^2 und B^2 von demselben Zeichen *); und wenn $b^2-ac > 0$, so ist A^2B^2 negativ, und folglich A^2 und B^2 von verschiedenen Zeichen. Daß aber in dem ersten Falle, wenn nämlich $b^2-ac < 0$, A^2 und B^2 positiv, und somit A und B reell sind, ergiebt sich auf folgende Weise.

Wenn $b^2-ac < 0$, so ist auch $\frac{4(b^2-ac)}{a^2} < 0$, also um so mehr $\frac{4(b^2-ac)}{a^2} < \frac{(a-c)^2}{a^2}$, und, wenn man auf beiden Seiten $\frac{4c}{a}$ addirt, $\frac{4b^2}{a^2} < \left(\frac{a+c}{a}\right)^2$. Es sind aber jetzt auch a und c von demselben Zeichen, weil im andern Falle b^2-ac positiv wäre; demnach ist $\frac{a+c}{a}$ eine positive Größe, und da ihr Quadrat $> \frac{4b^2}{a^2}$, so ist sie selbst $> \frac{2b}{a}$, das ist

*) Dieser letzte Schluß ist allerdings nur unter der Voraussetzung zulässig, daß A^2 und B^2 keine imaginären Größen sind. Aber diese Voraussetzung ist hier wohl begründet; denn A^2 und B^2 sind reelle Größen, wenn M, N und P reell sind, und dies ist allerdings der Fall, was sich aus der bloßen Ansicht der Ausdrücke, die durch diese letztern Buchstaben bezeichnet worden, unmittelbar ergiebt.

§. 29. $\frac{a+c}{a} > \frac{2b}{a}$, und um so mehr, da $\cos\alpha < 1$, $\frac{a+c}{a} > \frac{2b\cos\alpha}{a}$ oder $\frac{a-2b\cos\alpha+c}{a} > 0$. Nun ist auch $(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)$ eine positive Größe, weil im entgegengesetzten Falle, da auch $b^2-ac<0$, die Gleichung (1) keine Curve ausdrücken würde (S. 104.), was gegen unsere Voraussetzung ist. Da nun der Ausdruck (19) von A^2+B^2, als ein Product positiver Factoren, positiv, und A^2 und B^2 von demselben Zeichen sind, so sind diese Größen selbst positiv, was eben zu zeigen war.

Wenn $b^2-ac<0$, so heißt die durch die Gleichung (1) ausgedrückte Linie zweiten Grades **Ellipse**. Die größere der beiden Achsen 2A und 2B werden wir mit 2a und die kleinere mit 2b bezeichnen. Die Gleichung (17) der Ellipse ist also

$$a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{oder} \quad b^2y^2+a^2x^2 = a^2b^2\,, \qquad (21)$$

und zwar ist bei der ersten Gleichung die größere Achse, und bei der zweiten die kleinere Achse zur Abscissenachse genommen.

Fig. 23. Die Punkte A und A', B und B', in welchen die Achsen die Ellipse, deren Mittelpunkt C ist, schneiden, heißen **Scheitel**. Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten nach einem Scheitel der größern Achse, indem man in die erste Gleichung (21) $x-a$ oder $x+a$ statt x setzt, so erhält man die transformirten Gleichungen

$$a^2y^2+b^2x^2-2b^2ax = 0 \quad \text{oder} \quad a^2y^2+b^2x^2+2b^2ax = 0\,.$$

Wenn $A=B$, das heißt, wenn die Achsen der Ellipse einander gleich sind, so ist sie ein Kreis, weil die Gleichung (17), für $A=B$, in $y^2+x^2=A^2$ übergeht. Damit aber $A=B$, also auch $A^2=B^2$ seyn könne, muß $M=N$, folglich $M+N=2M$ und $MN=M^2$, also $(M+N)^2=4(MN)$ seyn. Durch Substitution der, oben für $M+N$ und MN angegebenen Ausdrücke in diese letzte Gleichung findet man

$$(a-2b\cos\alpha+c)^2+4(b^2-ac)\sin^2\alpha = 0\,,$$

und nach einer leichten Umformung

$$\{2b-(a+c)\cos\alpha\}^2+(a-c)^2\sin^2\alpha = 0\,,$$

eine Gleichung, die nur Statt finden kann, wenn $2b-(a+c)\cos\alpha = 0$ und $a-c=0$ ist, woraus

$$c = a \quad \text{und} \quad b = a\cos\alpha$$

folgt, welches die beiden Bedingungsgleichungen sind, die Statt haben müs- §. 29.
sen, wenn die Gleichung (1) einen Kreis ausdrücken soll.

Wenn $b^2 - ac > 0$, so heißt die, durch die Gleichung (1) ausgedrückte, Linie zweiten Grades *Hyperbel*. Da alsdann, wie oben gezeigt worden, A^2 und B^2 von verschiedenen Zeichen sind, so ist eine dieser Größen positiv und die andere negativ, und also von den Größen 2A und 2B die eine reell und die andere imaginär. Wir werden die reelle mit 2a und die imaginäre mit $2b\sqrt{-1}$ bezeichnen, so daß also entweder $A^2 = a^2$ und $B^2 = -b^2$, oder $A^2 = -b^2$ und $B^2 = a^2$ ist, wo a und b reelle Größen bedeuten. Die Gleichung (17) der Hyperbel ist also

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \quad \text{oder} \quad b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2 , \qquad (22)$$

und zwar ist bei der ersten Gleichung diejenige Achse der Curve, welche diese schneidet, und bei der zweiten Gleichung diejenige, welche sie nicht schneidet, zur Abscissenachse genommen.

Die die Hyperbel schneidende Achse wird die *Hauptachse*, die andere aber die *Nebenachse* der Hyperbel genannt. Unter Länge der Nebenachse versteht man diejenige Größe, die so eben mit 2b bezeichnet worden ist. Die Durchschnittspunkte A und A' der Hyperbel und ihrer Hauptachse hei- Fig. 24.
ßen *Scheitel*.

Legt man dem x in der Gleichung

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \qquad (23)$$

einen Werth bei, der kleiner als $+a$ und größer als $-a$ ist, so wird y imaginär. Giebt man jener Größe aber einen Werth, der größer als $+a$, oder einen Werth, der kleiner als $-a$ ist, so ist y reell, was unmittelbar klar ist, wenn man $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ aus der vorstehenden Gleichung entwickelt. Die Hyperbel erstreckt sich demnach auf beiden Seiten ihrer Nebenachse ins Unendliche.

Es sey durch den Mittelpunkt C der Hyperbel, der der Anfangspunkt der Coordinaten ist, eine Gerade

$$y = nx \qquad (24)$$

gezogen. Diese schneidet die Hyperbel in Punkten, deren Coordinaten x', y' offenbar beide Gleichungen (23) und (24) befriedigen müssen. Entwickelt man die Werthe dieser Coordinaten aus den eben genannten Gleichungen, so kommt

§. 29.

$$x' = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - n^2a^2}} \quad ; \quad y' = \pm\frac{nab}{\sqrt{b^2 - n^2a^2}} ;$$

und es haben demnach x' und y' reelle Werthe, wenn $n^2a^2 < b^2$, d. i., wenn n kleiner als $+\frac{b}{a}$ und größer als $-\frac{b}{a}$, imaginäre aber, wenn n größer als $+\frac{b}{a}$, oder wenn n kleiner als $-\frac{b}{a}$ ist. In dem ersten Falle schneidet folglich die Gerade (24) die Hyperbel wirklich in zwei Punkten, in den beiden letzten Fällen findet dies nicht Statt. Errichtet man also in dem Scheitel
Fig. 24. A eine Senkrechte auf der Hauptachse, macht darauf $Ab = Ab' = b$, und zieht die Geraden Cbd, Cb'd'; so schneidet jede Gerade, welche durch C innerhalb des Winkels dCd' gezogen wird, genugsam verlängert die Hyperbel in zwei Punkten; jede Gerade aber, welche durch C innerhalb des Nebenwinkels dCδ' gezogen wird, schneidet die Hyperbel nicht. Die Geraden dδ und d'δ' schneiden die Hyperbel in unendlicher Entfernung vom Mittelpunkte; denn ihre Gleichungen sind, da $CA = a$ und $Ab = Ab' = b$,

$$y = +\frac{b}{a}x \qquad \text{und} \qquad y = -\frac{b}{a}x , \qquad (25)$$

und für sie ist $x' = \pm\frac{ab}{0} = \pm\infty$ und $y' = \pm\frac{b^2}{0} = \pm\infty$. Diese Geraden d$\delta$ und d'δ' werden die Asymptoten der Hyperbel genannt.

Jede Gerade, welche einer Asymptote parallel ist, schneidet die Hyperbel in zwei Punkten, von welchen der eine in unendlicher Entfernung vom Mittelpunkte, der andere aber in endlicher Entfernung von demselben liegt. Die Coordinaten dieses andern Durchschnittspunkts lassen sich durch die Constanten der Gleichung jener Geraden und die Achsen a u. b der Hyperbel auf rationale Weise ausdrücken. Heißt nämlich die Abscisse des Punktes, in welchem die einer Asymptote parallele Gerade die Hauptachse der Hyperbel schneidet, x', so ist die Gleichung dieser Geraden, wenn wir die erste Gleichung (25) für die jener Asymptote nehmen,

$$y = \frac{b}{a}(x - x') ,$$

und setzt man diesen Werth von y in die Gleichung (23) der Hyperbel, so kommt

$$2x'x = a^2 + x'^2 ,$$

eine Gleichung, die, in Beziehung auf x, nur vom ersten Grade ist, und aus welcher sich $x = \frac{a^2 + x'^2}{2x'}$, sodann aber, vermittelst der Gleichung jener Geraden, $y = \frac{b}{a}\left(\frac{a^2 - x'^2}{2x'}\right)$ ergiebt, so daß die Coordinaten der Durchschnittspunkte ohne Wurzelgrößen ausgedrückt sind *). §. 29.

Aufgabe [44]. Die Gleichung einer Hyperbel zu finden, deren

---

*) Daß der eine Durchschnittspunkt in unendlicher Entfernung liege, ergiebt sich auf folgende Weise. Jede Gerade, die durch den Punkt x' der Abscissenachse geht, hat zur Gleichung $y = n(x - x')$. Eliminirt man y zwischen dieser Gleichung und der Gleichung (23) der Hyperbel, so kommt

$$(n^2a^2 - b^2)x^2 - 2n^2a^2x'x + n^2a^2x'^2 + a^2b^2 = 0,$$

eine Gleichung, die allerdings vom zweiten Grade ist, und daher für x zwei Werthe giebt. Nur wenn, wie oben, $n = \pm\frac{b}{a}$ ist, wird der Coefficient des höchsten Gliedes gleich Null, und die Gleichung dadurch auf den ersten Grad erniedrigt. Eine Gleichung vom zweiten Grade aber, deren höchstes Glied verschwunden ist, hat immer noch zwei Wurzeln, von welchen eine unendlich ist. Entwickelt man nämlich die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$, welche $= \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma\alpha}}{\alpha}$ sind, in eine, nach steigenden Potenzen von α fortschreitenden, Reihe, was vermittelst der Binomialformel leicht zu bewerkstelligen ist, so kommt, wenn man diese Wurzeln durch x_1 u. x_2 bezeichnet,

$$x_1 = -\frac{\gamma}{2\beta} - \frac{\gamma^2}{8\beta^3}\alpha - \frac{\gamma^3}{16\beta^5}\alpha^2 - \ldots\ldots,$$

$$x_2 = -\frac{2\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{2\beta} + \frac{\gamma^2}{8\beta^3}\alpha + \frac{\gamma^3}{16\beta^5}\alpha^2 + \ldots\ldots.$$

Ist nun $\alpha = 0$, so erhält man, vermittelst dieser beiden Reihen, $x_1 = -\frac{\gamma}{2\beta}$ und $x_2 = \infty$, während sich die quadratische Gleichung auf $2\beta x + \gamma = 0$ reducirt, und allerdings nur die eine Wurzel x_1 zu haben scheint.

Man kann auch auf folgende Weise zu demselben Resultate gelangen. Setzt man nämlich in $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ $x = \frac{1}{z}$, so kommt, nach Wegschaffung des Nenners $\gamma z^2 + 2\beta z + \alpha = 0$, eine Gleichung, welche für z zwei Werthe giebt. In dem besondern Falle aber, in welchem $\alpha = 0$ ist, hat man für den einen Werth $z = 0$, und für den andern $z = -\frac{2\beta}{\gamma}$; und daher für $x = \frac{1}{z}$ die beiden Werthe $\frac{1}{0} = \infty$ und $-\frac{\gamma}{2\beta}$

§. 29. Haupt- und Nebenachse gegeben sind, wenn die Asymptoten derselben zu Coordinatenachsen genommen werden.

Es seyen 2a und 2b die gegebenen Längen der Haupt- und Nebenachse, so ist die Gleichung der Hyperbel in rechtwinkligen Coordinaten

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 . \qquad (23)$$

Da nun die eine Asymptote mit der Hauptachse, welche die Abscissenachse dieser Gleichung ist, einen Winkel β einschließt, dessen trigonometrische Tangente gleich $-\frac{b}{a}$, und da die andere Asymptote mit derselben Achse einen Winkel γ bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{b}{a}$, und da also

$$\sin\beta = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} , \quad \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} , \quad \sin\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} ,$$

$\cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; so hat man, nach den Transformationsformeln (§. 3. F. 7.), $\frac{a(x+y)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ für x und $\frac{b(x-y)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ für y zu setzen, um die Gleichung (23) wie verlangt zu transformiren. Diese Substitution giebt nach einigen Reductionen, die sich von selbst darbieten,

$$xy = \tfrac{1}{4}(a^2+b^2) , \qquad (26)$$

welches die verlangte Gleichung ist.

Die Gleichung der Hauptachse in Beziehung auf die neuen Coordinatenachsen ist, nach derselben Transformation, $y = x$ (was auch unmittelbar daraus klar ist, daß die Hauptachse den Asymptotenwinkel halbirt), und da diese Achse die Hyperbel in ihren Scheiteln schneidet, so findet man, vermittelst der Gleichungen (26) und $y = x$, für die neuen Coordinaten der Scheitel

$$x' = y' = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} .$$

Die Größe $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ wird die Potenz der Hyperbel genannt. Da man aus der Gleichung (26) $y = \frac{a^2+b^2}{4x}$ und $x = \frac{a^2+b^2}{4y}$ findet, so folgt, daß, wenn x wächst, y abnimmt und umgekehrt, und daß man x immer so groß annehmen kann, daß y kleiner wird, als irgend eine gegebene Größe, und umgekehrt.

Wenn in der Gleichung (17) $A^2 = -B^2$, also $A = B\sqrt{-1}$, so heißt die durch diese Gleichung ausgedrückte Hyperbel eine gleichseitige. Es ist alsdann die Länge der Hauptachse 2a derjenigen der Nebenachse 2b gleich, und statt der allgemeinen Gleichung der Hyperbel (22) hat man daher für die gleichseitige Hyperbel §. 29.

$$y^2 - x^2 = -a^2 \quad \text{oder} \quad y^2 - x^2 = a^2 , \qquad (27)$$

je nachdem die Hauptachse oder die Nebenachse zur Abscissenachse genommen wird. Damit aber $A^2 = -B^2$, also $A^2 + B^2 = 0$ seyn könne, muß der Zähler des Ausdrucks (19) gleich Null seyn, und da der zweite Factor dieses Zählers nicht Null ist, weil sonst die Gleichung (1) keine Curve ausdrücken würde (§. 28.), so muß der erste Factor, d. i.

$$a - 2b\cos\alpha + c = 0 \qquad (28)$$

seyn, welches folglich die Bedingungsgleichung ist, die Statt finden muß, wenn die Gleichung (1) eine gleichseitige Hyperbel ausdrücken soll.

§. 30.

Die Gleichung

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0 \qquad (1)$$

läßt sich, wenn $b^2 - ac = 0$ ist, nicht auf die Form $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$ bringen, weil die Coordinaten des neuen Anfangspunktes unendlich werden würden, wenn man ihr diese Form aufdringen wollte, oder mit andern Worten, weil die, durch die Gleichung (1) ausgedrückte, Curve keinen Mittelpunkt hat, wenn $b^2 - ac = 0$ ist (§. 29.). In jedem Falle aber, es mag $b^2 - ac$ positiv, negativ oder gleich Null seyn, läßt sich die Gleichung (1) auf die Form

$$Ry^2 + Sx^2 + Tx = 0 \qquad (2)$$

bringen.

Aufgabe [45]. Die Gleichung (1) durch Transformation der Coordinaten auf die Form (2) zu bringen.

Setzt man zunächst, um nur den Anfangspunkt der Coordinaten zu verlegen, $x + x'$ statt x und $y + y'$ statt y, so kommt, wie im vorigen §.,

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2(ay' + bx' + d)y + 2(by' + cx' + e)x + ay'^2 + 2bx'y' + cx'^2 + 2dy' + 2ex' + f = 0 . \qquad (3)$$

Und wählt man zu diesem neuen Anfangspunkt irgend einen Punkt der, durch

§. 30. die Gleichung (1) ausgedrückten, Curve, ſo werden die Coordinaten x' und y' dieſe Gleichung befriedigen, ſo daß

$$ay'^2+2bx'y'+cx'^2+2dy'+2ex'+f=0$$

iſt, wodurch das von x und y unabhängige Glied der Gleichung (3) alſo verſchwindet. Bezeichnet man die Werthe von $ay'+bx'+d$ und $by'+cx'+e$, welche ſich durch Subſtitution der Coordinaten deſſelben Punktes ergeben, durch d' und e', ſo hat demnach die Gleichung (3) die Form

$$ay^2+2bxy+cx^2+2d'y+2e'x=0\,. \qquad (4)$$

Jetzt transformire man, wie im vorigen §., die Gleichung (4) nach den Formeln (§. 3. F. 3.), ſo kommt

$$\left.\begin{array}{l}\{a\sin^2\gamma+2b\sin(\alpha-\gamma)\sin\gamma+c\sin^2(\alpha-\gamma)\}y^2\\ +2\{a\sin\beta\sin\gamma+b[\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\sin(\alpha-\gamma)]+c\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\}xy\\ +\{a\sin^2\beta+2b\sin(\alpha-\beta)\sin\beta+c\sin^2(\alpha-\beta)\}x^2\\ +2\{d'\sin\gamma+e'\sin(\alpha-\gamma)\}\sin\alpha\,.\,y+2\{d'\sin\beta+c'\sin(\alpha-\beta)\}\sin\alpha\,.\,x\end{array}\right\}=0\,.$$

Beſtimmt man indeſſen β und γ ſo, daß

$$a\sin\beta\sin\gamma+b[\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\sin(\alpha-\gamma)]+c\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)=0\,, \qquad (5)$$

$$d'\sin\gamma+e'\sin(\alpha-\gamma)=0 \qquad (6)$$

iſt, ſo verſchwinden die Coefficienten von xy und von y, und die Gleichung erhält dadurch die Form

$$Ry^2+Sx^2+Tx=0\,, \qquad (2)$$

was verlangt wurde.

Daß aber dieſe Beſtimmung von β und γ, welche die Winkel bedeuten, unter denen die neuen Coordinatenachſen die alte Abſciſſenachſe ſchneiden, immer zu reellen Werthen dieſer Größen führen werde, oder, mit andern Worten, daß die ſo beſtimmten neuen Coordinatenachſen immer möglich ſeyn werden, ergiebt ſich auf folgende Weiſe.

Die Gleichungen der neuen Coordinatenachſen in Beziehung auf die alten ſind nämlich $y-y'=m(x-x')$ und $y-y'=m'(x-x')$, wo x', y' die Coordinaten des neuen Anfangspunktes, $m=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$ und $m'=\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)}$ (§. 4. F. 6.). Führt man die Größen m und m' in die Gleichungen (5) und (6) ein, ſo verwandeln ſich dieſe in

$$amm'+b(m+m')+c=0 \quad \text{und} \quad d'm'+e'=0\,,$$

woraus sich §. 30.

$$m' = -\frac{e'}{d'} \quad \text{und} \quad m = \frac{be' - cd'}{bd' - ae'}$$

ergeben. Die Größen m und m' sind demnach immer reell, und die neuen Coordinatenachsen also immer möglich.

Uebrigens sieht man, daß die neue Abscissenachse ein Durchmesser der Curve ist; denn zufolge der Gleichung (2) gehören zu jedem x zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y, und die Abscissenachse halbirt also alle, der Ordinatenachse parallele, Sehnen. Auch ist klar, daß die neue Ordinatenachse dem conjugirten Durchmesser des eben genannten parallel ist, indem die obige Gleichung zwischen m und m' mit der Gleichung (10) des vorigen §. übereinstimmt, und daß diese Ordinatenachse nur einen Punkt, den Anfangspunkt der Coordinaten nämlich, mit der Curve gemein hat, indem, wenn man in (2) $x = 0$ setzt, $y = \pm 0$ wird.

Es ist leicht einzusehen, daß auch umgekehrt die Gleichung einer jeden Linie zweiten Grades die Form (2) annehmen muß, wenn man einen Durchmesser zur Abscissenachse, einen seiner Durchschnitte mit der Curve zum Anfangspunkte der Coordinaten und die, dem conjugirten Durchmesser parallele, Gerade zur Ordinatenachse macht.

Setzt man in dem Coefficienten von x^2, nämlich in

$$S = a \sin^2\beta + 2b \sin(\alpha - \beta)\sin\beta + c \sin^2(\alpha - \beta),$$

$m \sin(\alpha - \beta)$ für $\sin\beta$, und sodann für m den oben gefundenen Ausdruck $\frac{be' - cd'}{bd' - ae'}$, so kommt

$$S = -\frac{(b^2 - ac)(ae'^2 - 2bd'e' + cd'^2)\sin^2(\alpha - \beta)}{(bd' - ae')^2},$$

ein Ausdruck, der für $b^2 - ac = 0$ verschwindet.

Ist also $b^2 - ac = 0$, so nimmt die Gleichung (2) die Form

$$Ry^2 + Tx = 0 \qquad (7)$$

an. Die Linie zweiten Grades, welche durch die Gleichung (1) ausgedrückt wird, wenn $b^2 - ac = 0$, und von der wir schon wissen, daß sie keinen Mittelpunkt hat, heißt Parabel. Die Gleichung der Parabel (7), welche auf Coordinatenachsen bezogen ist, die den Winkel $(\gamma - \beta)$ einschließen, läßt sich auf rechtwinklige Coordinaten transformiren, ohne daß ihre Form geändert wird, indem man die neue Abscissenachse der alten parallel nimmt und

§. 30. den Anfangspunkt in den Punkt verlegt, in welchem diese neue Abscissenachse die Curve schneidet. Bezeichnet man nämlich jetzt den Coordinatenwinkel, auf welchen sich die Gleichung (7) bezieht, durch α und macht die Ordinatenachse senkrecht, ohne die Lage der Abscissenachse und des Anfangspunktes zu ändern, so hat man die Formeln (4) des §. 3., in welchen $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ zu setzen ist, in Anwendung zu bringen, so daß in der Gleichung (7) $x - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}y$ für x und $\frac{1}{\sin\alpha}y$ für y substituirt werden muß. Dies giebt

$$Ry^2 - T\sin\alpha\cos\alpha\, y + T\sin^2\alpha\, x = 0 .$$

Verlegt man nun die Coordinatenachsen parallel mit sich selbst, indem man $x+x'$ und $y+y'$ statt x und y setzt, so kommt

$$Ry^2 + (2Ry' - T\cos\alpha\sin\alpha)y + T\sin^2\alpha . x + Ry'^2 - T\sin\alpha\cos\alpha . y' + T\sin^2\alpha . x' = 0 ,$$

eine Gleichung, die sich auf

$$Ry^2 + T\sin^2\alpha . x = 0 \qquad (8)$$

reducirt, und also die Form (7) annimmt, wenn man x' und y' so nimmt, daß

$$2Ry' - T\sin\alpha\cos\alpha = 0 \quad \text{und} \quad Ry'^2 - T\sin\alpha\cos\alpha\, y' + T\sin^2\alpha\, x' = 0$$

werden, was immer möglich ist, indem diese letzten Gleichungen für y' und x' nur reelle Werthe geben.

Setzt man in der Gleichung (8) der Parabel $\frac{T\sin^2\alpha}{R} = -p$, so nimmt sie die einfache Gestalt

$$y^2 = px \qquad (9)$$

an. Die Abscissenachse, welche die Curve im Anfangspunkte der Coordina-
Fig. 25. ten schneidet, heißt Achse der Parabel, und dieser Anfangspunkt A der Scheitel. Ist p eine positive Größe, so ist y reell für jeden positiven Werth von x, wie groß man ihn auch nehmen mag, dagegen imaginär für jeden negativen. Umgekehrt verhält es sich, wenn p eine negative Größe ist. Die Parabel erstreckt sich daher ins Unendliche, aber nur auf einer Seite der, im Scheitel auf ihrer Achse errichteten, Senkrechten.

§. 31.

Aufgabe [46]. *Man soll die Längen und die Lage der Achsen, so wie die Coordinaten des Mittelpunktes der Linien bestimmen, welche durch folgende Gleichungen:*

§. 31.

1) $5y^2+2xy+5x^2-12y-12x=0$,
2) $y^2-2xy-x^2-y+x+1=0$,
3) $y^2-2xy+x^2-x=0$,
4) $y^2-2xy+2x^2+1=0$,
5) $y^2+2xy+2x^2+2y+12x+26=0$,
6) $2y^2-6xy+x^2+8y+2x-6=0$,

von welchen wir annehmen, daß die Coordinaten rechtwinklig seyen, ausgedrückt werden.

1) Vergleicht man die erste Gleichung mit der Gleichung

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0, \qquad (1)$$

so ist hier $a=5$, $b=1$, $c=5$, $d=-6$, $e=-6$, $f=0$. Da nun $b^2-ac=-24$, also negativ ist, so kann die gegebene Gleichung eine Ellipse ausdrücken. Die Ausdrücke (19) und (20) des §. 29. geben hier, wenn man auch noch $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ setzt, weil die gegebene Gleichung auf rechtwinklige Achsen bezogen ist, $A^2+B^2=5$ und $A^2B^2=6$, woraus man $A^2=2$ und $B^2=3$ oder $A^2=3$ und $B^2=2$ findet. Demnach sind die Längen der beiden Achsen $2a=2\sqrt{3}$ und $2b=2\sqrt{2}$; und die Gleichung der Curve in Beziehung auf ihre Achsen ist

$$3y^2+2x^2=6.$$

Die Winkel, welche die Achsen der Ellipse mit den alten Coordinatenachsen machen, können durch die S. 112. aufgestellte Gleichung

$$tang^2\beta+\frac{c\cos 2\alpha-2b\cos\alpha+a}{(c\cos\alpha-b)\sin\alpha}.tang\beta-1=0$$

gefunden werden, welche dadurch, daß $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, sich auf

$$tang^2\beta-\frac{a-c}{b}tang\beta-1=0 \qquad (2)$$

reducirt, und, durch Substitution der Werthe von a, b u. c, $tang^2\beta-1=0$, also $tang\beta=\pm 1$ und $\beta=\pm\frac{1}{4}\pi$ giebt.

Die Coordinaten des Mittelpunktes findet man aus den Gleichungen (12) des §. 29., und zwar $x'=1$ und $y'=1$. Die Gleichungen der Achsen der Ellipse in Beziehung auf das alte Coordinatensystem sind demnach

$$y=x \quad \text{und} \quad y+x=2.$$

2) Vergleicht man die zweite gegebene Gleichung mit der Gleichung (1), so ist $a=1$, $b=-1$, $c=-1$, $d=-\frac{1}{2}$, $e=\frac{1}{2}$, $f=1$.

§. 31. Da nun $b^2 - ac = 2$, also positiv ist, so kann diese zweite Gleichung eine Hyperbel bedeuten. Die Ausdrücke (19) u. (20) des §. 29. geben hier $A^2 + B^2 = 0$ und $A^2B^2 = -\frac{9}{32}$, woraus $A^2 = \frac{3}{4\sqrt{2}}$ und $B^2 = -\frac{3}{4\sqrt{2}}$, und die Längen der Haupt- und Nebenachse $2a = 2b = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{2}}$ gefunden werden. Die Gleichung der Curve auf diese ihre Achsen bezogen, ist demnach

$$y^2 - x^2 = -\frac{3}{4\sqrt{2}},$$

und die Hyperbel eine gleichseitige, was auch daraus hervorgeht, daß hier $a - 2b\cos\alpha + c = 0$ ist (§. 29. G. 28.).

Die obige Gleichung (2) giebt im gegenwärtigen Falle $tang^2\beta + 2tang\beta - 1 = 0$, woraus $tang\beta = -1 \pm \sqrt{2}$ sich ergiebt; und für die Coordinaten des Mittelpunktes findet man aus (§. 29. G. 12.) $x' = 0$ und $y' = \frac{1}{2}$. Die Gleichungen der beiden Achsen der Curve in Beziehung auf das alte Coordinatensystem sind demnach

$$y + (1+\sqrt{2})x = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad y + (1-\sqrt{2})x = \tfrac{1}{2}.$$

3) Vergleicht man die dritte der gegebenen Gleichungen mit der Gleichung (1), so ist $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 0$, $e = -\frac{1}{2}$, $f = 0$. Da nun $b^2 - ac = 0$, so kann die Gleichung eine Parabel ausdrücken.

Die Gleichung (2) giebt hier $tang^2\beta - 1 = 0$, woraus $\beta = \pm\frac{1}{4}\pi$ und demnach $sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Um nun die gegebene Gleichung zu transformiren, hat man, zufolge der Transformationsformeln (§. 3. F. 7.), $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \beta'$ für y und $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \alpha'$ für x zu setzen, wenn man außer der Richtung der Coordinatenachsen zugleich den Anfangspunkt ändern will. Dies giebt $y^2 + \frac{\beta' - \alpha' + \frac{1}{4}}{2\sqrt{2}}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{(\beta'-\alpha')^2 - \alpha'}{2} = 0$, so daß, wenn man $\beta' - \alpha' + \frac{1}{4} = 0$ und $(\beta' - \alpha')^2 - \alpha' = 0$ setzt, woraus sich $\alpha' = \frac{1}{16}$ und $\beta' = -\frac{3}{16}$ ergeben, die Gleichung der Curve sich auf

$$y^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}x$$ §. 31.

reducirt. Die Coordinaten des Scheitels der Parabel sind, wie so eben gefunden, $x = \frac{1}{16}$ und $y = -\frac{3}{16}$, und die Gleichung ihrer Achse ist demnach $y + \frac{3}{16} = tang\beta\left(x - \frac{1}{16}\right)$, oder, wenn man für β seinen Werth $\frac{1}{4}\pi$ setzt,

$$y = x - \frac{1}{4}.$$

4) Vergleicht man die vierte der gegebenen Gleichungen mit der Gleichung (1), so ist $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$, $d = 0$, $e = 0$, $f = 1$. Da hier $b^2 - ac = -1$ ist, so könnte die Gleichung die einer Ellipse seyn. Die Ausdrücke (19) und (20) des §. 29. geben aber $A^2 + B^2 = -3$ und $A^2B^2 = 1$, woraus $A^2 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ und $B^2 = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ oder umgekehrt; und die Achsen der Ellipse sind daher $2a = \sqrt{6+2\sqrt{5}}.\sqrt{-1}$ und $2b = \sqrt{6-2\sqrt{5}}.\sqrt{-1}$, also imaginär. Diese Achsen existiren also nicht, und die gegebene Gleichung hat demnach keine geometrische Bedeutung, was wir nach §. 28., und ohne die Längen der Achsen zu suchen, hätten finden können, indem hier $b^2 - ac = -1$ also negativ, und $(bd-ae)^2 - (b^2-ac)(d^2-af) = -1$ also ebenfalls negativ ist.

5) Für die fünfte der gegebenen Gleichungen findet man $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 1$, $e = 6$, $f = 26$. Da hier $b^2 - ac = -1$, so könnte diese fünfte Gleichung eine Ellipse ausdrücken. Die Ausdrücke (19) und (20) des §. 29. aber geben $A^2 + B^2 = 0$ und $A^2B^2 = 0$, woraus $A^2 = 0$ und $B^2 = 0$; und es sind demnach die Achsen der Ellipse $2a = 0$ und $2b = 0$. Die gegebene Gleichung drückt daher nur einen Punkt (den Mittelpunkt der vorgeblichen Ellipse) aus, was sich auch aus §. 28. unmittelbar ergiebt, indem hier nicht nur $b^2 - ac$ negativ ist, sondern auch $(bd-ae)^2 - (b^2-ac)(d^2-af) = 0$. Für die Coordinaten dieses Punktes findet man nach §. 28. (Aufg. 38.), oder auch, wenn er als Mittelpunkt angesehen wird, nach §. 29. (Aufg. 41.)

$$x' = \frac{ae-bd}{b^2-ac} = -5 \quad ; \quad y' = \frac{cd-be}{b^2-ac} = 4.$$

§. 31. 6) Für die sechste der gegebenen Gleichungen ist $a=2$, $b=-3$, $c=1$, $d=4$, $e=1$, $f=-6$. Da hier $b^2-ac=7$, so könnte die Gleichung eine Hyperbel ausdrücken. Die Ausdrücke (19) und (20) des §. 29. geben aber $A^2+B^2=0$ und $A^2B^2=0$, woraus $A^2=0$ und $B^2=0$; und es sind demnach die Achsen der Hyperbel $2a=0$ und $2b=0$. Eine Hyperbel aber, deren Achsen verschwunden sind, fällt mit ihren Asymptoten zusammen; daher drückt die sechste Gleichung zwei gerade Linien aus, was sich auch aus dem §. 28. unmittelbar ergiebt, indem b^2-ac positiv und $(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)=0$ ist. Für die Gleichungen dieser Geraden in Beziehung auf die alten Coordinatenachsen findet man

$$y-\frac{3-\sqrt{7}}{2}x+2-\sqrt{7}=0 \quad ; \quad y-\frac{3+\sqrt{7}}{2}x+2+\sqrt{7}=0 .$$

§. 32.

Die Gleichungen der Linien zweiten Grades, welche einen Mittelpunkt haben, können, wie im §. 29. gezeigt worden, immer auf die Form

$$A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$$

gebracht werden, wenn man zwei conjugirte Durchmesser zu Coordinatenachsen nimmt. Daß dies auf unendlich verschiedene Weise geschehen kann, erhellet sowohl daraus, daß jede Linie zweiten Grades, die einen Mittelpunkt hat, unendliche viele conjugirte Durchmesser habe, als aus der Gleichung (15) des angeführten §., welche auf unendlich verschiedene Arten befriedigt werden kann. Die Längen zweier conjugirten Durchmesser, die Winkel, welche sie mit den Achsen der Curve und mit einander bilden, und die Längen dieser Achsen hängen so von einander ab, daß, wenn drei von diesen Stücken gegeben sind, jedes andere daraus gefunden werden kann.

Aufgabe [47]. Die Relationen zu finden, welche zwischen zwei conjugirten Durchmessern einer Ellipse und Hyperbel, zwischen dem von ihnen eingeschlossenen Winkel und zwischen den Achsen dieser Curven Statt haben.

Es sey

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \qquad (1)$$

die Gleichung einer Ellipse, welche auf die Achsen dieser Curve sich bezieht. Da jeder Durchmesser der Curve durch deren Mittelpunkt gehet, so werden die Gleichungen von zwei conjugirten Durchmessern, die mit der größern Achse die Winkel β und γ bilden,

$$y = tang\beta\, x \quad \text{und} \quad y = tang\gamma\, x \qquad (2)$$ §. 32

seyn. Zwischen den Winkeln β und γ aber findet eine Relation Statt, welche aus der Gleichung (10) des §. 29. sich unmittelbar ergiebt, wenn man in derselben $m = tang\beta$, $m' = tang\gamma$, $a = a^2$, $b = 0$ und $c = b^2$ setzt, wodurch man

$$a^2 tang\beta\, tang\gamma + b^2 = 0 \qquad (3)$$

erhält. Die beiden Durchmesser schneiden die Ellipse in Punkten, deren Coordinaten x', y' und x'', y'' aus den Gleichungen (1) und (2), nämlich

$$x'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 tang^2\beta + b^2} \quad ; \quad y'^2 = \frac{a^2b^2 tang^2\beta}{a^2 tang^2\beta + b^2},$$

$$x''^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 tang^2\gamma + b^2} \quad ; \quad y''^2 = \frac{a^2b^2 tang^2\gamma}{a^2 tang^2\gamma + b^2},$$

gefunden werden. Bezeichnet man nun die Längen der (im Mittelpunkt der Curve halbirten) Durchmesser (2) respective durch $2a'$ und $2b'$, so ist (§. 2.)

$$a'^2 = x'^2 + y'^2 \quad ; \quad b'^2 = x''^2 + y''^2,$$

oder durch Substitution der Werthe von x'^2, y'^2, x''^2 und y''^2, nach einer leichten Umformung,

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 sin^2\beta + b^2 cos^2\beta} \quad ; \quad b'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 sin^2\gamma + b^2 cos^2\gamma}, \qquad (4)$$

wodurch die Relation eines jeden Durchmessers, des Winkels, den er mit der größern Achse bildet, und der beiden Achsen ausgedrückt wird.

Vermittelst der Gleichung (3) erhält man aus diesen Ausdrücken (4)

$$a'^2 = \frac{a^4 sin^2\gamma + b^4 cos^2\gamma}{a^2 sin^2\gamma + b^2 cos^2\gamma} \quad ; \quad b'^2 = \frac{a^4 sin^2\beta + b^4 cos^2\beta}{a^2 sin^2\beta + b^2 cos^2\beta}, \qquad (5)$$

wodurch ein jeder Durchmesser vermittelst der beiden Achsen und des Winkels, den sein conjugirter Durchmesser mit der größern Achse bildet, ausgedrückt ist.

Multiplicirt man die beiden Gleichungen (4) in einander, so kommt

$$a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{a^4 sin^2\beta\, sin^2\gamma + a^2b^2(sin^2\beta\, cos^2\gamma + cos^2\beta\, sin^2\gamma) + b^4 cos^2\beta\, cos^2\gamma},$$

oder, nach einer leichten Umformung,

$$a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{(a^2 sin\beta\, sin\gamma + b^2 cos\beta\, cos\gamma)^2 + a^2b^2 sin^2(\gamma - \beta)}.$$

Da nun aber, in Folge der Gleichung (3), $a^2 sin\beta\, sin\gamma + b^2 cos\beta\, cos\gamma = 0$ ist,

§. 32. so hat man

$$a'^2b'^2 = \frac{a^2b^2}{\sin^2(\gamma-\beta)},$$

oder

$$a'b'\sin(\gamma-\beta) = ab. \qquad (6)$$

Addirt man den Ausdruck (4) von a'^2 und den Ausdruck (5) von b'^2, so ist

$$a'^2+b'^2 = \frac{a^4\sin^2\beta+a^2b^2+b^4\cos^2\beta}{a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta},$$

oder, wenn man die Division vollführt,

$$a'^2+b'^2 = a^2+b^2. \qquad (7)$$

Da $(\gamma-\beta)$ der Winkel ist, welchen die beiden conjugirten Durchmesser einschließen, so drücken die Gleichungen (6) und (7) folgende Sätze aus.

In einer Ellipse ist das Parallelogramm, welches entsteht, wenn man die Endpunkte irgend zweier conjugirten Durchmesser verbindet, dem Rhombus gleich, dessen Eckpunkte die Scheitel der Curve sind.

In einer Ellipse ist die Summe der Quadrate irgend zweier conjugirten Durchmesser der Summe der Quadrate der Achsen gleich.

In diesen beiden Sätzen sind die, für die Ellipse verlangten, Relationen enthalten. Um für die Hyperbel die analogen Beziehungen zu finden, ist es nicht nöthig, die Rechnung von Neuem anzufangen; denn die Gleichung einer, auf ihre Achsen bezogenen, Hyperbel

$$a^2y^2-b^2x^2 = -a^2b^2$$

entsteht aus der Gleichung (1) einer Ellipse, wenn man $b\sqrt{-1}$ statt b setzt. Macht man dieselbe Substitution in der Gleichung $a'^2b'^2 = \frac{a^2b^2}{\sin^2(\gamma-\beta)}$, so kommt $a'^2b'^2 = -\frac{a^2b^2}{\sin^2(\gamma-\beta)}$. Da nun $a'^2b'^2$ eine negative Größe ist, so muß eine der beiden Größen a'^2 und b'^2 negativ und die andere positiv, also eine der beiden Größen a' und b' imaginär, die andere aber reell seyn. Bezeichnet man die reelle durch a' und die imaginäre durch $b\sqrt{-1}$, so ist nunmehr in den Gleichungen (6) und (7) nicht nur $b\sqrt{-1}$ für b, son-

sondern auch $b\sqrt{-1}$ für b' zu setzen, welches giebt §. 32.

$$a'b'\sin(\gamma-\beta) = ab \quad ; \quad a'^2-b'^2 = a^2-b^2 ,$$

zwei Gleichungen, durch welche die verlangten Relationen auch für die Hyperbel ausgedrückt sind.

Aufgabe [48]. Die Grundlinie eines Dreiecks und das Product der Tangenten der Winkel an der Grundlinie sind gegeben. Man soll den Ort des Scheitels finden.

Es sey die Länge der gegebenen Grundlinie gleich 2c, und das gegebene Product der Tangenten gleich n.

Man nehme die Grundlinie zur Abscissenachse und die Senkrechte in ihrem Halbirungspunkte zur Ordinatenachse. Wenn nun die Winkel an der Grundlinie durch β und β' bezeichnet werden, so hat man

$$tang\beta\, tang\beta' = n ,$$

und da die Seite des Dreiecks, welche durch den, auf der negativen Seite der Abscissenachse liegenden, Endpunkt der Grundlinie geht, einen der beiden Winkel β und β', die andere, durch den, auf der positiven Seite liegenden, Endpunkt gehende, Seite aber den Nebenwinkel des andern Winkels mit der Abscissenachse bildet, so sind die Gleichungen dieser beiden Seitenlinien

$$y = tang\beta(x+c) \quad ; \quad y = -tang\beta'(x-c) ,$$

aus welchen man, wenn β und β' bekannt wären, die Coordinaten des Scheitels finden könnte. Multiplicirt man diese Gleichungen in einander, so kommt $y^2 = -tang\beta\, tang\beta'(x^2-c^2)$ oder, wenn man für $tang\beta\, tang\beta'$, in Folge der obigen Gleichung, n setzt,

$$y^2+nx^2 = nc^2 ,$$

welches die Gleichung des gesuchten Ortes ist. Dieser ist demnach eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem n positiv oder negativ ist. Bringt man die Gleichung auf die Form

$$\frac{y^2}{nc^2}+\frac{x^2}{c^2} = 1 ,$$

so ergiebt sich leicht, daß, wenn $n>0$, die Achsen der Ellipse gleich $2c\sqrt{n}$ und 2c sind, und daß die Grundlinie des Dreiecks die größere oder kleinere Achse ist, je nachdem $n<1$ oder $n>1$; ferner, daß, wenn $n<0$, die Grundlinie des Dreiecks die Hauptachse der Hyperbel ist. In jedem Falle sind also die Endpunkte der Grundlinie zwei Scheitel der Curve. — Wenn

§. 32. $n = 1$, d. i. wenn die Seiten des Dreiecks senkrecht auf einander stehen, ist die Curve ein Kreis. — Wenn $n = -1$, d. i. wenn der Unterschied der Winkel an der Grundlinie ein rechter, ist die Curve eine gleichseitige Hyperbel.

Es folgt unmittelbar aus der Lösung dieser Aufgabe, daß die Sehnen, welche von irgend einem Punkte einer Ellipse nach den Endpunkten ihrer größern Achse gezogen werden, mit dieser Achse solche Winkel bilden, daß das Product ihrer Tangenten $= -\frac{b^2}{a^2}$; daß diejenigen Sehnen, welche von irgend einem ihrer Punkte nach den Endpunkten der kleinern Achse gezogen werden, mit dieser Achse solche Winkel bilden, daß das Product ihrer Tangenten $= -\frac{a^2}{b^2}$; daß endlich diejenigen Sehnen, welche von irgend einem Punkte der Hyperbel nach den beiden Scheiteln der Curve gezogen werden, mit der Hauptachse Winkel bilden, deren Tangenten-Product $= \frac{b^2}{a^2}$. Bezeichnet man die Winkel, welche zwei, von einem Punkte der Ellipse oder Hyperbel nach den Endpunkten der größern oder Hauptachse gezogene, Sehnen mit diesen Achsen bilden, durch β und β', so hat man also

für die Ellipse $a^2 tang\beta tang\beta' + b^2 = 0$,
für die Hyperbel $a^2 tang\beta tang\beta' - b^2 = 0$,

zwei Gleichungen, von denen die erste mit der Gleichung (3) übereinstimmt, und daraus ergiebt sich Folgendes. Zieht man durch einen Endpunkt A der größern Achse einer Ellipse eine Gerade, welche einem gegebenen Durchmesser parallel ist, und die die Ellipse in einem zweiten Punkt P schneiden mag, und verbindet man diesen Punkt P mit dem andern Endpunkt A' der größern Achse, so ist die Verbindungslinie A'P dem conjugirten Durchmesser des gegebenen parallel. Und hierdurch ist ein Mittel gegeben, um zwei conjugirte Durchmesser einer gegebenen Ellipse zu construiren, die einen gegebenen Winkel bilden sollen. — Eine ähnliche Construction findet bei der Hyperbel Statt.

§. 33.

Aufgabe [49]. Ein Punkt und eine Gerade sind gegeben; man soll den Ort desjenigen Punktes finden, dessen Entfernungen von dem gegebenen Punkte und der gegebenen Geraden ein ebenfalls gegebenes Verhältniß zu einander haben.

Man nehme den gegebenen Punkt zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten, und es sey §. 33.

$$ay+bx+1=0$$

die Gleichung der gegebenen Geraden in Beziehung auf dieses Coordinatensystem, $1:n$ aber das gegebene Verhältniß.

Sind nun x, y die Coordinaten eines Punktes aus dem gesuchten Orte, so ist dessen Entfernung vom Anfangspunkte gleich $\sqrt{y^2+x^2}$ (§. 2.), und seine Entfernung von der gegebenen Geraden gleich $\frac{ay+bx+1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (§. 7. F. 6.). Daher hat man zufolge der Aufgabe

$$n\sqrt{y^2+x^2}=\frac{ay+bx+1}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

oder, wenn man quadrirt und den Nenner fortschafft,

$$n^2(a^2+b^2)(y^2+x^2)=(ay+bx+1)^2 \qquad (1)$$

oder

$$\{a^2-n^2(a^2+b^2)\}y^2+2abxy+\{b^2-n^2(a^2+b^2)\}x^2+2ay+2bx+1=0 \qquad (2)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, welcher daher eine Linie zweiten Grades und zwar, je nachdem $(1-n^2)n^2(a^2+b^2)^2$ positiv, negativ, oder gleich Null, eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel ist (§. 29. u. 30.). Das Zeichen dieses Ausdrucks hängt aber, da n^2 und $(a^2+b^2)^2$ immer positiv sind, nur von dem Werthe von $(1-n^2)$ ab, welcher wiederum positiv, negativ oder gleich Null ist, je nachdem $n<1$, $n>1$ oder $n=1$. Es ist also der gesuchte Ort

wenn $n<1$ eine Hyperbel,
wenn $n>1$ eine Ellipse,
wenn $n=1$ eine Parabel.

Soll der Ort eine gleichseitige Hyperbel seyn, so muß die Bedingungsgleichung (28) des §. 29., in welcher noch $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ zu setzen ist, Statt haben; es muß also dann $(1-2n^2)(a^2+b^2)=0$, folglich $n=\frac{1}{\sqrt{2}}$, oder das Verhältniß $1:n$ dasjenige der Diagonale eines Quadrats zu seiner Seite seyn.

Nimmt man die Coordinatenachsen so an, daß die Ordinatenachse der gegebenen Geraden parallel ist, so ist die Gleichung dieser Linie $x+q=0$,

§. 32. $n = 1$, d. i. wenn die Seiten des Dreiecks senkrecht auf einander stehen, ist die Curve ein Kreis. — Wenn $n = -1$, d. i. wenn der Unterschied der Winkel an der Grundlinie ein rechter, ist die Curve eine gleichseitige Hyperbel.

Es folgt unmittelbar aus der Lösung dieser Aufgabe, daß die Sehnen, welche von irgend einem Punkte einer Ellipse nach den Endpunkten ihrer größern Achse gezogen werden, mit dieser Achse solche Winkel bilden, daß das Product ihrer Tangenten $= -\frac{b^2}{a^2}$; daß diejenigen Sehnen, welche von irgend einem ihrer Punkte nach den Endpunkten der kleinern Achse gezogen werden, mit dieser Achse solche Winkel bilden, daß das Product ihrer Tangenten $= -\frac{a^2}{b^2}$; daß endlich diejenigen Sehnen, welche von irgend einem Punkte der Hyperbel nach den beiden Scheiteln der Curve gezogen werden, mit der Hauptachse Winkel bilden, deren Tangenten-Product $= \frac{b^2}{a^2}$. Bezeichnet man die Winkel, welche zwei, von einem Punkte der Ellipse oder Hyperbel nach den Endpunkten der größern oder Hauptachse gezogene, Sehnen mit diesen Achsen bilden, durch β und β', so hat man also

$$\text{für die Ellipse} \quad a^2 tang\beta tang\beta' + b^2 = 0,$$
$$\text{für die Hyperbel} \quad a^2 tang\beta tang\beta' - b^2 = 0,$$

zwei Gleichungen, von denen die erste mit der Gleichung (3) übereinstimmt, und daraus ergiebt sich Folgendes. Zieht man durch einen Endpunkt A der größern Achse einer Ellipse eine Gerade, welche einem gegebenen Durchmesser parallel ist, und die die Ellipse in einem zweiten Punkt P schneiden mag, und verbindet man diesen Punkt P mit dem andern Endpunkt A' der größern Achse, so ist die Verbindungslinie A'P dem conjugirten Durchmesser des gegebenen parallel. Und hierdurch ist ein Mittel gegeben, um zwei conjugirte Durchmesser einer gegebenen Ellipse zu construiren, die einen gegebenen Winkel bilden sollen. — Eine ähnliche Construction findet bei der Hyperbel Statt.

§. 33.

Aufgabe [49]. Ein Punkt und eine Gerade sind gegeben; man soll den Ort desjenigen Punktes finden, dessen Entfernungen von dem gegebenen Punkte und der gegebenen Geraden ein ebenfalls gegebenes Verhältniß zu einander haben.

Man nehme den gegebenen Punkt zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten, und es sey §. 33.

$$ay+bx+1=0$$

die Gleichung der gegebenen Geraden in Beziehung auf dieses Coordinatensystem, $1:n$ aber das gegebene Verhältniß.

Sind nun x, y die Coordinaten eines Punktes aus dem gesuchten Orte, so ist dessen Entfernung vom Anfangspunkte gleich $\sqrt{y^2+x^2}$ (§. 2.), und seine Entfernung von der gegebenen Geraden gleich $\frac{ay+bx+1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (§. 7. F. 6.). Daher hat man zufolge der Aufgabe

$$n\sqrt{y^2+x^2}=\frac{ay+bx+1}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

oder, wenn man quadrirt und den Nenner fortschafft,

$$n^2(a^2+b^2)(y^2+x^2)=(ay+bx+1)^2 \qquad (1)$$

oder

$$\{a^2-n^2(a^2+b^2)\}y^2+2abxy+\{b^2-n^2(a^2+b^2)\}x^2+2ay+2bx+1=0 \qquad (2)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, welcher daher eine Linie zweiten Grades und zwar, je nachdem $(1-n^2)n^2(a^2+b^2)^2$ positiv, negativ, oder gleich Null, eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel ist (§. 29. u. 30.). Das Zeichen dieses Ausdrucks hängt aber, da n^2 und $(a^2+b^2)^2$ immer positiv sind, nur von dem Werthe von $(1-n^2)$ ab, welcher wiederum positiv, negativ oder gleich Null ist, je nachdem $n<1$, $n>1$ oder $n=1$. Es ist also der gesuchte Ort

wenn $n<1$ eine Hyperbel,
wenn $n>1$ eine Ellipse,
wenn $n=1$ eine Parabel.

Soll der Ort eine gleichseitige Hyperbel seyn, so muß die Bedingungsgleichung (28) des §. 29., in welcher noch $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ zu setzen ist, Statt haben; es muß also dann $(1-2n^2)(a^2+b^2)=0$, folglich $n=\frac{1}{\sqrt{2}}$, oder das Verhältniß $1:n$ dasjenige der Diagonale eines Quadrats zu seiner Seite seyn.

Nimmt man die Coordinatenachsen so an, daß die Ordinatenachse der gegebenen Geraden parallel ist, so ist die Gleichung dieser Linie $x+q=0$,

§. 33. wo q die Entfernung der Geraden von dem Anfangspunkt bedeutet. Alsdann findet man ſtatt der Gleichung (2), oder aus ihr, indem man $a = 0$ und $b = \frac{1}{q}$ ſetzt,

$$n^2y^2 + (n^2 - 1)x^2 - 2qx = q^2 , \qquad (3)$$

eine Gleichung, welche noch immer eine Hyperbel, Ellipſe oder Parabel ausdrückt, je nachdem $n < 1$, $n > 1$ oder $n = 1$ iſt, und die ſich ohne Weiteres wieder auf die Form $n^2(y^2 + x^2) = (x + q)^2$ bringen läßt. Führt man den Radius vector $u = \sqrt{y^2 + x^2}$ (§. 3. F. 11.) ein, ſo kommt

$$nu = \pm(x + q) , \qquad (4)$$

eine Gleichung, die allerdings unmittelbar hätte hergeleitet werden können, und die beſonders deshalb merkwürdig iſt, weil ſie den Radius vector einer Linie zweiten Grades als eine lineare Function der Abſciſſe darſtellt.

Transformirt man die Gleichung (3), indem man $x - \frac{q}{n+1}$ ſtatt x ſetzt, ſo kommt

$$n^2y^2 + (n^2 - 1)x^2 - 2nqx = 0 . \qquad (5)$$

Es ſey nun erſtens $n = 1$, ſo verſchwindet das zweite Glied dieſer Gleichung (5), welche, wie ſchon bemerkt, eine Parabel ausdrückt, und wenn man $2q = p$ ſetzt, ſo kommt

$$y^2 = px . \qquad (6)$$

Da nun der neue Anfangspunkt der Coordinaten der Scheitel der Parabel iſt (§. 30. G. 9.), und die Abſciſſe des gegebenen Punktes $\frac{q}{n+1} = \frac{q}{2} = \frac{p}{4}$, die Entfernung der gegebenen Geraden von dieſem Punkte aber $q = \frac{1}{2}p$ iſt; ſo halbirt der Scheitel der Parabel die Entfernung der gegebenen Geraden von dem gegebenen Punkte, welcher der Brennpunkt der Parabel genannt wird. Die gegebene Gerade heißt die Directrix (Leitlinie) und die Größe p der Parameter der Parabel. Die Ordinate im Brennpunkte errichtet, welche alſo zur Abſciſſe $\frac{1}{2}p$ gehört, iſt zufolge der Gleichung (6) gleich $\pm\frac{1}{2}p$.

Es ſey zweitens $n > 1$. Man ſetze $\frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{b^2}{a^2}$ und $\frac{q}{n} = \frac{b^2}{a}$, woraus $n = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$; $q = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, ſo kommt durch Subſtitution in (5)

$$a^2y^2+b^2x^2-2b^2ax=0\,, \qquad (7)$$ §. 33.

welches die Gleichung der Ellipse ist, in der die größere Achse zur Abscissenachse und ein Scheitel zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen worden (§. 29. S. 114.). Da nun die Abscisse des gegebenen Punktes $\frac{q}{n+1}$ ist, so hat man für den Abstand dieses Punktes, welcher ebenfalls Brennpunkt genannt wird, von dem einen Scheitel der Ellipse, durch Substitution der Werthe von q und n, $\frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}}$, oder, wenn man Zähler und Nenner mit $a-\sqrt{a^2-b^2}$ multiplicirt, $a-\sqrt{a^2-b^2}$. Zieht man, um den Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkte zu finden, diesen Ausdruck von a ab, so ergiebt sich $\sqrt{a^2-b^2}$. Dieser Abstand, welcher durch e bezeichnet werden soll, wird die Excentricität der Ellipse genannt. Die Entfernung der gegebenen Geraden, welche Directrix der Ellipse heißt, vom Mittelpunkte der Curve ist $q+e$ oder, durch Substitution, $\frac{a^2}{e}$; und daraus folgt, daß die Excentricität, die Hälfte der größern Achse und die Entfernung der Directrix vom Mittelpunkte der Ellipse drei Größen sind, die in stetiger Proportion stehen.

Wenn man $\frac{2b^2}{a}$ durch p bezeichnet, so giebt die Gleichung (7)

$$y^2=px-\frac{b^2}{a^2}x^2\,,$$

und die Ordinate im Brennpunkte errichtet, welche also zur Abscisse $a-\sqrt{a^2-b^2}$ gehört, ist demnach $\pm\frac{1}{2}p$. Deshalb wird p, oder die Größe $\frac{2b^2}{a}$, der Parameter der Ellipse genannt.

Es sey drittens $n<1$. Man setze $\frac{n^2-1}{n^2}=-\frac{b^2}{a^2}$ und $\frac{q}{n}=\frac{b^2}{a}$, woraus $n=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $q=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, so kommt durch Substitution in (5)

$$a^2y^2-b^2x^2-2b^2ax=0\,, \qquad (8)$$

welches die Gleichung der Hyperbel ist, in der, wie man leicht einsieht, die Hauptachse zur Abscissenachse und ein Scheitel zum Anfangspunkte der Coor-

§. 33. dinaten genommen worden. Man findet den Abstand des gegebenen Punktes, welcher gleichfalls Brennpunkt heißt, von diesem Scheitel der Curve gleich $\sqrt{a^2+b^2}-a$, und vom Mittelpunkte gleich $\sqrt{a^2+b^2}$, welche letztere Größe die Excentricität der Hyperbel heißt und durch e bezeichnet wird. Ferner findet man für den Abstand der gegebenen Geraden von dem Mittelpunkte der Hyperbel $e-q=\frac{a^2}{e}$. Die Länge $\frac{2b^2}{a}$ heißt der Parameter der Hyperbel.

Es ist übrigens leicht einzusehen, daß, während der Parabel nur ein Brennpunkt und eine Directrix zukommt, die Ellipse sowohl, als die Hyperbel deren zwei hat, welche zu beiden Seiten des Mittelpunktes und symmetrisch gegen die Scheitel liegen, so daß, wenn die Abscisse des einen Brennpunktes vom Mittelpunkt an gerechnet e ist, die des andern Brennpunktes $-e$, und die Entfernung beider Brennpunkte von einander 2e seyn wird.

Die Gleichung einer Curve, in Polarcoordinaten ausgedrückt, heißt ihre Polargleichung.

Aufgabe [50]. Die Polargleichungen der Parabel, Ellipse und Hyperbel zu finden, wenn ein Brennpunkt zum Pol angenommen wird.

I. Aus der Gleichung (4) ergiebt sich unmittelbar, wenn man $u\cos t$ für x setzt (§. 3. F. 10.),

$$(n\mp\cos t)u=\pm q\ . \qquad (9)$$

Setzt man hierin $n=1$, und demgemäß auch $q=\frac{1}{2}p$ (vor. Aufg.), so kommt

die Polargleichung der Parabel $(1\mp\cos t)u=\pm\frac{1}{2}p\ .$ (10)

Setzt man $n=\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{a}{e}$ und $q=\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{b^2}{e}$, so kommt

die Polargleichung der Ellipse $(a\mp e\cos t)u=\pm b^2\ .$ (11)

Setzt man $n=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{e}$ und $q=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b^2}{e}$, so kommt

die Polargleichung der Hyperbel $(a\mp e\cos t)u=\pm b^2\ .$ (12)

II. Diese drei Gleichungen lassen sich auch direct, ohne die Lösung der vorigen Aufgabe zu Hülfe zu nehmen, und zwar folgendermaßen finden.

Man transformire die Gleichungen der drei Curven

$$y^2=px\ ;\quad a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2\ ;\quad a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2\ ;$$

§. 33.

so daß der Anfangspunkt der neuen Coordinaten in einen Brennpunkt fällt, indem man für die erste Curve $x+\frac{1}{4}p$, für die zweite $x-e$, wo $e=\sqrt{a^2-b^2}$, und für die dritte $x+e$, wo $e=\sqrt{a^2+b^2}$, statt x setzt, so kommt

$$y^2=p(x+\tfrac{1}{4}p)\ ;\ a^2y^2+b^2(x-e)^2=a^2b^2\ ;\ a^2y^2-b^2(x+e)^2=-a^2b^2.$$

Substituirt man nun $u\sin t$ und $u\cos t$ für y und x (§. 3. F. 10.), so kommt

$$\sin^2t\,.\,u^2-p\cos t\,.\,u-\tfrac{1}{4}p^2=0\ ,$$
$$(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)u^2-2b^2e\cos t.u+b^2(e^2-a^2)=0\ ,$$
$$(a^2\sin^2t-b^2\cos^2t)u^2-2b^2e\cos t.u-b^2(e^2-a^2)=0\ ,$$

oder, wenn man für $\sin^2t$ überall $1-\cos^2t$ setzt, und darauf Rücksicht nimmt, daß in der zweiten Gleichung $e^2=a^2-b^2$, und in der dritten $e^2=a^2+b^2$ ist,

$$(1-\cos^2t)u^2-p\cos t.u-\tfrac{1}{4}p^2=0\ ,$$
$$(a^2-e^2\cos^2t)u^2-2b^2e\cos t.u-b^4=0\ ,$$
$$(a^2-e^2\cos^2t)u^2-2b^2e\cos t.u-b^4=0\ ,$$

drei Gleichungen, die auch wie folgt geschrieben werden können:

$$\{(1-\cos t)u-\tfrac{1}{2}p\}\{(1+\cos t)u+\tfrac{1}{2}p\}=0\ , \qquad (13)$$
$$\{(a-e\cos t)u-b^2\}\{(a+e\cos t)u+b^2\}=0\ , \qquad (14)$$
$$\{(a-e\cos t)u-b^2\}\{(a+e\cos t)u+b^2\}=0\ , \qquad (15)$$

und, wie man sieht, mit den obigen Gleichungen (10, 11 u. 12) übereinstimmen.

Man überzeugt sich leicht, und es verdient bemerkt zu werden, daß die zweiten Factoren der Gleichungen (13, 14, 15) in die ersten übergehen und umgekehrt, wenn man u und t mit $-u$ und $t+\pi$ vertauscht.

Es darf auch nicht übersehen werden, daß man zu ähnlichen Gleichungen für die Ellipse und Hyperbel gekommen wäre, wenn man für die erstere Curve nicht $x-e$, sondern $x+e$ statt x, und für die letztere nicht $x+e$, sondern $x-e$ statt x gesetzt, d. i. den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem andern Brennpunkte verlegt hätte.

Daß die Gleichung (11) der Ellipse und die Gleichung (12) der Hyperbel übereinstimmen, hat nichts Befremdendes, denn in der ersten ist $e<a$ und in der zweiten ist $e>a$. Alle Linien zweiten Grades lassen sich in der einen Polargleichung (9) oder besser in

$$(1-m\cos t)u=r \qquad (16)$$

zusammenfassen, und zwar ist diese letzte Gleichung, in welcher m eine bloße

§. 33. Verhältnißzahl bedeutet, die

einer Parabel,	wenn	$m = 1$,
einer Ellipse,	wenn	$m < 1$,
eines Kreises,	wenn	$m = 0$,
einer Hyperbel,	wenn	$m > 1$,
einer gleichseitigen Hyperbel,	wenn	$m = \sqrt{2}$.

Aufgabe [51]. Es ist die Grundlinie eines Dreiecks gegeben; man soll den Ort des Scheitels finden, und zwar

erstens, wenn die Summe der Seiten — zweitens, wenn die Differenz der Seiten

eine gegebene Länge hat.

Es sey die Länge der Grundlinie gleich $2e$. Man nehme diese Linie zur Abscissenachse und die Senkrechte in ihrem Halbirungspunkte zur Ordinatenachse. Sind nun x, y die Coordinaten des Scheitels und u, u' die Längen der Seiten eines auf der gegebenen Grundlinie errichteten Dreiecks, so hat man, da die Coordinaten der Endpunkte der Grundlinie 0 u. e und 0 u. $-e$ sind,

$$u^2 = y^2+(x+e)^2 \quad \text{und} \quad u'^2 = y^2+(x-e)^2 ,$$

und daraus

$$u^2-u'^2 = (u+u')(u-u') = 4ex , \qquad (17)$$

$$u^2+u'^2 = 2y^2+2x^2+2e^2 . \qquad (18)$$

I. Wenn nun die gegebene Summe der Seiten durch $2a$ bezeichnet wird, so ist für den ersten Ort

$$u+u' = 2a , \qquad (19)$$

und also nach (17)

$$2a(u-u') = 4ex . \qquad (20)$$

Entwickelt man aus (19) u. (20) u u. u', so kommt

$$u = a+\frac{ex}{a} \; ; \quad u' = a-\frac{ex}{a} \; ;$$

und, wenn man diese Ausdrücke in die Gleichung (18) setzt,

$$a^2y^2+(a^2-e^2)x^2 = a^2(a^2-e^2) . \qquad (21)$$

II. Wenn nun die gegebene Differenz der Seiten durch $2a$ bezeichnet wird, so ist für den zweiten Ort

$$u-u' = 2a , \qquad (19')$$

und also nach (17)

$$2a(u+u') = 4ex . \qquad (20')$$

Entwickelt man aus (19') u. (20') u u. u', so kommt

$$u = a+\frac{ex}{a} \; ; \quad u' = -a+\frac{ex}{a} \; ;$$

und, wenn man diese Ausdrücke in die Gleichung (18) setzt,

$$a^2y^2+(a^2-e^2)x^2 = a^2(a^2-e^2) . \qquad (21')$$

Da aber die gegebene Summe der Seiten größer als die Grundlinie, d. i. da $2a > 2e$ seyn muß, so wird $a^2 - e^2$ eine positive Größe seyn; und wenn man diese gleich $+b^2$ setzt, wird b immer reell seyn. Dadurch bekommt die Gleichung (21) die Form

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 ,$$

woraus man sieht, daß der erste gesuchte Ort eine Ellipse ist, deren größere Achse der gegebenen Summe der Seiten und deren Excentricität der halben Grundlinie gleichkommt.

Da aber die gegebene Differenz der Seiten kleiner als die Grundlinie, d. i. da $2a < 2e$ seyn muß, so wird $a^2 - e^2$ eine negative Größe seyn; und wenn man diese gleich $-b^2$ setzt, wird b immer reell seyn. Dadurch bekommt die Gleichung (21′) die Form

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 ,$$

woraus man sieht, daß der zweite gesuchte Ort eine Hyperbel ist, deren Hauptachse der gegebenen Differenz der Seiten und deren Excentricität der halben Grundlinie gleichkommt. §. 33.

Aufgabe [12]. Es soll der Ort des Scheitels derjenigen Dreiecke gefunden werden, welche auf einer gegebenen Grundlinie errichtet sind, und in welchen die Differenz der Winkel an der Grundlinie eine gegebene Größe hat.

Man nehme die gegebene Grundlinie und die Senkrechte in ihrem Halbirungspunkte zu Coordinatenachsen.

Ist nun $2g$ die Länge der gegebenen Grundlinie und δ die gegebene Differenz der Winkel an der Grundlinie, so sind die Gleichungen der beiden Seiten des Dreiecs, wie in der Aufgabe (48)

$$y = tang\beta(x+g) \quad \text{und} \quad y = -tang\beta'(x-g) ,$$

wo β u. β' die Winkel an der Grundlinie bezeichnen. Es soll aber, der Aufgabe zufolge, $\delta = \beta - \beta'$, also $tang\,\delta = \frac{tang\beta - tang\beta'}{1 + tang\beta\, tang\beta'}$ seyn, und setzt man hierin de, aus den vorigen Gleichungen sich ergebenden, Ausdrücke für $tang\beta$ und $tang\beta'$, nämlich $\frac{y}{x+g}$ und $-\frac{y}{x-g}$, so kommt

$tang\delta = -\frac{2xy}{y^2 - x^2 + g^2}$, oder, wenn man $\frac{sin\,\delta}{cos\,\delta}$ für $tang\delta$ setzt, und den Nenner wegschafft,

$$sin\delta\, y^2 + 2cos\delta\, xy - sin\delta\, x^2 + sin\delta\, g^2 = 0$$

als Gleichung ür der gesuchten Ort. Vergleicht man sie mit der allgemei-

§. 33. nen Gleichung der Linie zweiten Grades (§. 29. G. 1.), so findet man $b^2 - ac = \sin^2\delta + \cos^2\delta$, also $b^2 - ac = 1$, und $a - b\cos\alpha + c = 0$ (§. 29. G. 28.). Der gesuchte Ort ist demnach eine gleichseitige Hyperbel. Um die Lage der Hauptachse und der Asymptoten dieser Curve aufzufinden, transformiren wir die erhaltene Gleichung auf neue, ebenfalls rechtwinklige Coordinatenachsen, indem wir $\cos\beta x - \sin\beta y$ statt x und $\sin\beta x + \cos\beta y$ statt y setzen. Dies giebt

$$\{\sin\delta(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - 2\cos\delta\sin\beta\cos\beta\}y^2 + 2\{\sin\delta\sin\beta\cos\beta + \cos\delta(\cos^2\beta - \sin^2\beta)\}xy - \{\sin\delta(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - 2\cos\delta\sin\beta\cos\beta\}x^2 + \sin\delta g^2 = 0 ,$$

oder, nach einer Reduction,

$$\sin(\delta - 2\beta)y^2 + 2\cos(\delta - 2\beta)xy - \sin(\delta - 2\beta)x^2 + \sin\delta g^2 = 0 ,$$

wo β den Winkel bezeichnet, den die neue Abscissenachse mit der alten bildet. Bestimmt man nun diesen Winkel so, daß das zwite Glied, oder so, daß das erste und dritte Glied dieser letzten Gleichung verschwindet, so drückt sie die Curve auf ihre Achsen oder auf ihre Asymptoten bezogen aus. Nimmt man also $\beta = \frac{1}{2}(\delta - \frac{1}{2}\pi)$, so ist $\sin(\delta - 2\beta) = \sin\frac{1}{2}\pi = 1$; $\cos(\delta - 2\beta) = \cos\frac{1}{2}\pi = 0$; und die Gleichung reducrt sich auf

$$y^2 - x^2 = -\sin\delta . g^2 \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{\sin\delta g^2} - \frac{x^2}{\sin\delta g^2} = -1 .$$

Nimmt man aber $\beta = \frac{1}{2}\delta$, so ist $\sin(\delta - 2\beta) = \sin 0 = 0$; $\cos(\delta - 2\beta) = \cos 0 = 1$; und die Gleichung reducirt sich auf

$$xy + \tfrac{1}{2}\sin\delta g^2 = 0 .$$

Es ergiebt sich hieraus, daß der Mittelpunkt der Hyperbel der Halbirungspunkt der Grundlinie ist, daß ihre Hauptachse mit dieser Grundlinie den Winkel $\frac{1}{2}(\delta - \frac{1}{2}\pi)$ bildet, daß die Längen beider Achsen gleich $g\sin\frac{1}{2}\delta$ sind, und daß die Asymptoten respective die Winkel $\frac{1}{2}\delta$ und $\frac{1}{2}(\delta - \pi)$ mit der Grundlinie machen.

Aufgabe [53]. Der Flächeninhalt und die Lage zweier Seiten eines Dreiecks sind gegeben. Von dem Durchschnitspunkte A dieser Linien ist nach dem Punkte Q, welcher die dritte Seite des Dreiecks in einem gegebenen Verhältnisse theilt, eine Gerade AQ gezogen, und auf dieser Geraden ist ein Punkt P so bestimmt, daß er diese Linie nach einem ebenfalls gegebenen Verhältnisse theilt. Man soll den Ort des Punktes P finden.

Es sey q^2 der gegebene Flächeninhalt, α der Winkel, welcher von den

gegebenen Richtungen der beiden Seiten des Dreiecks gebildet wird, $m:n$ §. 33.
das erste, und $m':n'$ das zweite gegebene Verhältniß.

Nimmt man die Richtungen der beiden ersten Seiten des Dreiecks zu Coordinatenachsen, so ist der Punkt A der Anfangspunkt der Coordinaten, die Abscisse des einen Endpunktes und die Ordinate des andern Endpunktes der dritten Seite sind gleich Null, und bezeichnet man die Ordinate des erstgenannten und die Abscisse des zuletzt genannten Endpunktes durch y' und x', so ist der Flächeninhalt des Dreiecks

$$q^2 = \tfrac{1}{2}x'y'\sin\alpha \ .$$

Die Coordinaten des Punktes Q sind (§. 5. F. 5.)

$$x_1 = \frac{nx'}{n \pm m} \ ; \ y_1 = \frac{my'}{m \pm n} \ ,$$

und die Coordinaten x, y des Punktes P ergeben sich aus den Formeln (3) des §. 5., wenn man für x', y' die Coordinaten x_1, y_1 von Q und für x'', y'' die Coordinaten von A, nämlich 0 setzt, und m, n mit m', n' vertauscht,

$$x = \frac{n'x_1}{n' \pm m'} \ ; \ y = \frac{n'y_1}{n' \pm m'} \ .$$

Vermittelst der vorigen beiden Gleichungen erhält man zunächst

$$x = \frac{nn'x'}{(n \pm m)(n' \pm m')} \ ; \ y = \frac{mn'y'}{(m \pm n)(n' \pm m')} \ ;$$

woraus

$$x' = \frac{(n \pm m)(n' \pm m')x}{nn'} \ ; \ y' = \frac{(m \pm n)(n' \pm m')y}{mn'}$$

gefunden wird, welche Ausdrücke, in die zuerst aufgestellte Gleichung gesetzt,

$$\pm(n \pm m)^2(n' \pm m')^2 \sin\alpha . xy = 2mnn'^2q^2$$

als Gleichung des gesuchten Ortes geben, welcher, wie man sieht, eine Hyperbel ist, deren Asymptoten mit den Richtungen der beiden ersten Seiten der Dreiecke zusammen fallen.

Um aus der gefundenen Gleichung den Ort des Punktes Q abzuleiten, braucht man nur $m' = 0$ zu setzen. Dies giebt

$$\pm(n \pm m)^2 \sin\alpha . xy = 2mnq^2 \ .$$

Ist Q der Halbirungspunkt der dritten Dreiecksseite, so hat man $m = n$ zu setzen und das obere Vorzeichen gelten zu lassen (§. 5. Aufg. 7.), woraus

$$2\sin\alpha . xy = q^2 \qquad (22)$$

sich ergiebt.

§. 33. Soll endlich P der Punkt seyn, in welchem sich die drei von den Ecken nach den Halbirungspunkten der gegenüber liegenden Seiten des Dreiecks gezogenen Geraden schneiden, so muß man in der zuerst gefundenen Gleichung $n = m$, $n' = 2m'$ setzen und nur das obere Zeichen gelten lassen (§. 8. Aufg. 13.). Dies giebt

$$9 \sin\alpha . xy = 2q^2 .$$

Aufgabe [54]. Zwei sich schneidende Gerade und ein Punkt P sind der Lage nach gegeben. Um den Punkt P dreht sich eine andere Gerade und schneidet die gegebenen Linien in den Punkten B, C. Man soll den Ort des Punktes p finden, welcher die BC so theilt, daß $pC = PB$ ist.

Man nehme die beiden gegebenen Geraden zu Coordinatenachsen, und nenne die Coordinaten des gegebenen Punktes a, b. Liegt nun der Punkt B auf der Abscissenachse, der Punkt C auf der Ordinatenachse, und wird die Abscisse von B mit x', die Ordinate von C mit y' bezeichnet, so ist die Gleichung der Geraden BC (§. 4. S. 14.)

$$\frac{y}{y'} + \frac{x}{x'} = 1 .$$

Da aber diese Gerade durch den Punkt P geht, dessen Coordinaten a, b sind, so hat man auch

$$\frac{b}{y'} + \frac{a}{x'} = 1 .$$

Sind nun x, y die Coordinaten des Punktes p der Geraden BC, so hat man ferner, weil $pC = PB$ seyn soll (§. 2. S. 4.),

$$(y-y')^2 + 2\cos\alpha\, x(y-y') + x^2 = b^2 + 2\cos\alpha\,(a-x')b + (a-x')^2 ,$$

wenn α der Winkel ist, den die gegebenen Geraden einschließen. Eliminirt man nun zwischen diesen drei Gleichungen die veränderlichen Größen x', y', indem man die ersten beiden auf die Form

$$y\frac{1}{y'} + x\frac{1}{x'} = 1 \quad \text{und} \quad b\frac{1}{y'} + a\frac{1}{x'} = 1$$

bringt, daraus $\frac{1}{y'}$ und $\frac{1}{x'}$ entwickelt, was $\frac{1}{y'} = \frac{x-a}{bx-ay}$, $\frac{1}{x'} = \frac{y-b}{ay-bx}$, also $y' = \frac{bx-ay}{x-a}$, $x' = \frac{ay-bx}{y-b}$ giebt, woraus $y-y' = \frac{(y-b)x}{x-a}$, $a-x' = \frac{(x-a)b}{y-b}$ folgt, und diese Werthe in die dritte der obigen Glei-

chungen setzt, so kommt §. 33.

$$\frac{(y-b)^2x^2}{(x-a)^2}+2\cos\alpha\frac{(y-b)x^2}{(x-a)}+x^2=b^2+2\cos\alpha\frac{(x-a)b^2}{(y-b)}+\frac{(x-a)^2b^2}{(y-b)^2},$$

oder

$$\frac{x^2}{(x-a)^2}\{(y-b)^2+2\cos\alpha(y-b)(x-a)+(x-a)^2\}$$

$$=\frac{b^2}{(y-b)^2}\{(y-b)^2+2\cos\alpha(y-b)(x-a)+(x-a)^2\},$$

also, wenn man die gleichen Factoren auf beiden Seiten wegläßt, und die Nenner fortschafft,

$$x^2(y-b)^2-b^2(x-a)^2=0,$$

als Gleichung für den gesuchten Ort. Diese Gleichung vom vierten Grade läßt sich aber in zwei Factoren vom zweiten Grade, nämlich in

$$\{x(y-b)+b(x-a)\}\{x(y-b)-b(x-a)\}=0$$

zerlegen. Der erste Factor, welcher sich auf

$$xy-ab=0$$

reducirt, drückt eine Hyperbel aus, welche die gegebenen Geraden zu Asymptoten hat, und die durch den gegebenen Punkt geht, weil $x=a$ und $y=b$ ihre Gleichung befriedigen. Sie ist der Ort des Punktes p, wenn dieser Punkt zugleich mit dem Punkte P auf der BC selbst, oder wenn p und P auf den Verlängerungen von BC liegen sollen. — Der zweite Factor kann durch Transformation, nämlich dadurch, daß man $y+2b$ statt y setzt, d. h. die neue Abscissenachse der alten parallel nimmt, auf die Form

$$xy+ab=0$$

gebracht werden, und drückt also ebenfalls eine Hyperbel aus. Diese Hyperbel ist der Ort des Punktes p, wenn von den beiden Punkten p und P der eine auf BC selbst, der andere aber auf ihrer Verlängerung liegen soll. Man sieht leicht ein, daß auch diese Hyperbel durch den Punkt P geht, denn seine Coordinaten sind in Beziehung auf die neuen Achsen a und $-b$, welche die Gleichung befriedigen, und daß sie die neuen Achsen zu Asymptoten hat, welche den Asymptotenwinkel $\pi-\alpha$ bilden.

Aus der Lösung dieser Aufgabe kann man folgenden, die Hyperbel betreffenden, Satz herleiten.

Jede Sehne BC einer Hyperbel, wird von den Asympto- Fig. 24.

§. 33. ten ſo geſchnitten, daß die, zwiſchen den Aſymptoten und der Curve liegenden, Stücke PB u. pC der Sehne oder ihrer Verlängerungen einander gleich ſind.

Aufgabe [55]. Die Endpunkte B und C einer in Länge gegebenen geraden Linie BC bewegen ſich auf zwei andern, der Lage nach gegebenen Geraden AX und AY. Man ſoll die Curve finden, welche ein beſtimmter Punkt P der erſten Linie bei dieſer Bewegung beſchreibt.

Wir nennen die unveränderlichen Abſtände des Punktes P von B und C, b und a, ſo daß alſo die gegebene Länge von BC gleich $a+b$ iſt, wenn P auf BC ſelbſt, und gleich $a-b$, wenn P auf der Verlängerung von BC liegt. Wir nehmen nun die feſten Geraden AX, AY zu Coordinatenachſen, und bezeichnen AB und AC durch x' und y', die Coordinaten von P aber durch x und y, und den Winkel XAY durch α. Da P ein Punkt der Geraden BC iſt, ſo hat man (§. 4. S. 14.)

$$\frac{y}{y'}+\frac{x}{x'}=1\ ;$$

ferner, da $PC=a$ und $PB=b$ (§. 2. S. 4.)

$$(y-y')^2+2\cos\alpha\,x(y-y')+x^2=a^2\ ,$$
$$y^2+2\cos\alpha\,y(x-x')+(x-x')^2=b^2\ .$$

Eliminirt man nun zwiſchen dieſen drei Gleichungen x' und y', ſo kommt

$$a^2y^2\pm 2ab\cos\alpha\,xy+b^2x^2=a^2b^2\ ,$$

welches die Gleichung des geſuchten Ortes iſt.

Oder, da $BC=a\pm b$ iſt, ſo hat man (§. 2.)

$$y'^2-2x'y'\cos\alpha+x'^2=(a\pm b)^2\ ;$$

und da $PC:PB=a:b$ ſeyn ſoll, ſo iſt auch (§. 5. S. 5.)

$$x=\frac{bx'}{b\pm a}\ ;\ y=\frac{ay'}{a\pm b}\quad\text{und}\quad x'=\frac{b\pm a}{b}x\ ;\ y'=\frac{a\pm b}{a}y\ .$$

Durch Subſtitution dieſer Werthe erhält man, wie vorher,

$$a^2y^2\pm 2ab\cos\alpha\,xy+b^2x^2=a^2b^2\ .$$

Von den beiden Zeichen des zweiten Gliedes dieſer Gleichung iſt das obere zu nehmen, wenn der Punkt P auf der Verlängerung von BC, das untere aber, wenn er auf BC ſelbſt liegt. In beiden Fällen iſt die geſuchte Curve eine Ellipſe; denn der Ausdruck b^2-ac (§. 29.) erhält hier den Werth $-a^2b^2\sin^2\alpha$, und iſt alſo immer negativ.

Wenn AX und AY sich rechtwinklig schneiden, ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\cos\alpha = 0$ §. 33.
und also die Gleichungen der Curve $a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2$, deren Achsen alsdann 2a und 2b sind. Wenn außerdem P der Halbirungspunkt von BC ist, so hat man $a = b$ und das untere Vorzeichen zu nehmen; der Ort des Punktes P ist alsdann ein Kreis, dessen Radius gleich a ist.

Aufgabe [56]. Die Größe und die Scheitelpunkte zweier Winkel sind gegeben; der Durchschnittspunkt eines Schenkels des einen und eines Schenkels des andern Winkels bewegt sich auf einer gegebenen Geraden. Es soll der Ort des Durchschnittspunktes der beiden andern Schenkel gefunden werden.

Wir nehmen die gerade Verbindungslinie der gegebenen Scheitelpunkte zur Abscissenachse, und den Punkt, in welchem sie von der gegebenen Geraden geschnitten wird, zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten. Die Gleichung der gegebenen Geraden ist alsdann

$$y = hx ,$$

wo h die trigonometrische Tangente des Winkels bedeutet, welchen diese Gerade mit der Verbindungslinie der Scheitelpunkte bildet. Wir bezeichnen ferner die Abscissen dieser Scheitel durch a_1 , a_2 , und die Tangenten der Winkel durch α_1 , α_2 .

Sind nun die Gleichungen der beiden Schenkel dieser Winkel, welche sich auf der Linie $y = hx$ schneiden sollen,

$$y = m_1(x-a_1) \quad \text{und} \quad y = m_2(x-a_2) ,$$

so müssen m_1 und m_2 solche Werthe haben, daß man für x und y dieselben Werthe erhält, man mag nun diese Größen aus $y = hx$ und der ersten Gleichung oder aus $y = hx$ und der zweiten Gleichung bestimmen. Daraus ergiebt sich die Relation

$$\frac{m_1-h}{a_1m_1} = \frac{m_2-h}{a_2m_2} .$$

Sollen ferner die Gleichungen der beiden andern Schenkel

$$y = n_1(x-a_1) \quad \text{und} \quad y = n_2(x-a_2)$$

seyn, so muß (§. 6. Aufg. 8.)

$$\frac{m_1-n_1}{1+m_1n_1} = \alpha_1 \quad \text{und} \quad \frac{m_2-n_2}{1+m_2n_2} = \alpha_2$$

seyn, woraus

§. 33.

$$m_1 = \frac{n_1 + \alpha_1}{1 - \alpha_1 n_1} \quad \text{und} \quad m_2 = \frac{n_2 + \alpha_2}{1 - \alpha_2 n_2}$$

folgt. Diese Ausdrücke, in die obige Bedingungsgleichung substituirt, geben

$$\frac{(1+\alpha_1 h)n_1 + \alpha_1 - h}{a_1(n_1 + \alpha_1)} = \frac{(1+\alpha_2 h)n_2 + \alpha_2 - h}{a_2(n_2 + \alpha_2)} .$$

Aus den Gleichungen der zuletzt genannten beiden Schenkel, deren Durchschnittspunkt gesucht wird, erhält man aber

$$n_1 = \frac{y}{x - a_1} \; ; \; n_2 = \frac{y}{x - a_2} ,$$

und, wenn man diese Ausdrücke in die vorige Gleichung setzt,

$$\frac{(1+\alpha_1 h)y - (h - \alpha_1)(x - a_1)}{a_1[y + \alpha_1(x - a_1)]} = \frac{(1+\alpha_2 h)y - (h - \alpha_2)(x - a_2)}{a_2[y + \alpha_2(x - a_2)]} ,$$

oder, nach Wegschaffung der Nenner,

$$a_2\{y + \alpha_2(x - a_2)\}\{(1+\alpha_1 h)y - (h - \alpha_1)(x - a_1)\} = a_1\{y + \alpha_1(x - a_1)\}\{(1+\alpha_2 h)y - (h - \alpha_2)(x - a_2)\} ,$$

als die Gleichung für den gesuchten Ort, der, wie man sieht, im Allgemeinen eine Linie zweiten Grades ist.

Da die gefundene Gleichung befriedigt wird, wenn man $y = 0$ und $x = a_1$, und wenn man $y = 0$ und $x = a_2$ setzt, so folgt, daß die Curve durch die gegebenen Scheitelpunkte beider Winkel geht.

Aufgabe [57]. Es sind vier gerade Linien der Lage nach gegeben, auf welche, von einem Punkte P aus, Perpendikel gefällt werden. Das Verhältniß des Rechtecks, welches unter zwei dieser Senkrechten enthalten ist, zu dem Rechtecke, welches unter den beiden übrigen enthalten ist, ist gegeben. Es soll der Ort des Punktes P gefunden werden.

Es seyen

$$a_1 y + b_1 x + 1 = 0 \; ; \; a_2 y + b_2 x + 1 = 0 \; ; \; a_3 y + b_3 x + 1 = 0 \; ; \; a_4 y + b_4 x + 1 = 0$$

die Gleichungen der vier gegebenen Geraden in rechtwinkligen Coordinaten, und $1 : n$ das gegebene Verhältniß des Rechtecks, welches unter den Senkrechten enthalten ist, die vom Punkte xy auf die ersten beiden Geraden gefällt werden, zu dem Rechtecke enthalten unter den Senkrechten, die von demselben Punkte xy auf die letzten beiden Geraden herabgelassen werden.

Da nun diese Senkrechten respective durch

$\frac{a_1y+b_1x+1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$; $\frac{a_2y+b_2x+1}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$; $\frac{a_3y+b_3x+1}{\sqrt{a_3^2+b_3^2}}$; $\frac{a_4y+b_4x+1}{\sqrt{a_4^2+b_4^2}}$ §. 33.

ausgedrückt sind (§. 7. F. 6.), so hat man

$$\frac{(a_3y+b_3x+1)(a_4y+b_4x+1)}{\sqrt{a_3^2+b_3^2}\sqrt{a_4^2+b_4^2}} = n\cdot\frac{(a_1y+b_1x+1)(a_2y+b_2x+1)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}},$$

oder, wenn man den Ausdruck $\frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}{n\sqrt{a_3^2+b_3^2}\sqrt{a_4^2+b_4^2}}$ durch $-\lambda$ bezeichnet,

$$(a_1y+b_1x+1)(a_2y+b_2x+1)+\lambda(a_3y+b_3x+1)(a_4y+b_4x+1)=0,$$

welches also die Gleichung des gesuchten Ortes ist. Dieser Ort ist somit im Allgemeinen eine Linie zweiten Grades, welche durch die Punkte geht, in denen sich die 1ste u. 3te, die 1ste u. 4te, die 2te u. 3te, die 2te u. 4te gegebene Gerade schneiden; denn die gefundene Gleichung ist vom zweiten Grade und wird befriedigt von denjenigen Werthen von x und y, welche den Gleichungen eines jeden Paares der eben genannten Geraden genugthun.

Man kann leicht einsehen, daß, wenn von P aus nach den gegebenen Linien vier Gerade gezogen werden, die sie unter gegebenen Winkeln schneiden, und welche Gerade eine solche Größe haben, daß das Rechteck unter zweien von ihnen dem Rechtecke unter den beiden übrigen gleich ist, der Ort des Punktes P ebenfalls eine Linie zweiten Grades seyn werde. Hieraus kann man die Beantwortung der, in der folgenden Aufgabe enthaltenen, Frage ohne Weiteres ableiten; wir werden diese Aufgabe aber direct lösen.

Aufgabe [58]. Es sind vier gerade Linien der Lage nach gegeben. Man soll den Ort des Punktes P finden, der so liegt, daß die, von ihm aus einer gegebenen Richtung parallel gezogene, Gerade, welche die vier gegebenen Linien in A, B, C, D schneiden möge, dergestalt getheilt wird, daß man habe PA×PB : PC×PD = 1:m, wo m eine gegebene Zahl bedeutet.

Wir nehmen die rechtwinkligen Coordinaten so an, daß die Abscissenachse der gegebenen Richtung parallel sey, und in Beziehung auf ein solches Coordinatensystem seyen

$y = a_1x+b_1$; $y = a_2x+b_2$; $y = a_3x+b_3$; $y = a_4x+b_4$

die Gleichungen der gegebenen geraden Linien. Ist nun

§. 34. Daß die Gleichung (4) vom zweiten Grade ist, erhellet aus der bloßen Ansicht, und daß die Curve durch die genannten Punkte geht, folgt daraus, daß die Gleichung (4) von denjenigen Werthen von x und y befriedigt wird, welche einem der folgenden Systeme

$$\left\{\begin{matrix} M = 0 \\ P = 0 \end{matrix}\right\} \; ; \; \left\{\begin{matrix} M = 0 \\ Q = 0 \end{matrix}\right\} \; ; \; \left\{\begin{matrix} N = 0 \\ P = 0 \end{matrix}\right\} \; ; \; \left\{\begin{matrix} N = 0 \\ Q = 0 \end{matrix}\right\}$$

Genüge leisten.

Es kann aber λ immer so bestimmt werden, daß die durch die Gleichung (4) ausgedrückte Curve noch durch einen gegebenen fünften Punkt geht. Denn setzt man die Coordinaten dieses gegebenen Punktes für x und y in die Gleichung (4), so erhält man zur Bestimmung von λ eine Gleichung, welche, in Beziehung auf λ, offenbar nur vom ersten Grade ist, und also für diese Größe immer einen reellen Werth giebt.

Welche Linie zweiten Grades es auch seyn mag, die durch die genannten vier Durchschnittspunkte geht, so kann ihre Gleichung immer durch $MN + \lambda PQ = 0$ ausgedrückt werden. Denn nimmt man irgend einen Punkt dieser Curve und bestimmt λ so, daß die genannte Gleichung die Curve ausdrückt, welche durch diesen fünften Punkt geht, so wird sie auch die Gleichung jener Linie zweiten Grades seyn, und zwar deshalb, weil durch fünf Punkte nur *eine* solche Curve möglich ist.

Vermittelst dieser Art eine Linie zweiten Grades, die vier bestimmte Punkte enthält, auszudrücken, lassen sich viele Sätze auf eine sehr einfache Art beweisen.

Lehrsatz [12]. Wenn man in eine Linie zweiten Grades ein Viereck einschreibt, und von einem Punkte der Curve Perpendikel auf dessen Seiten fällt, so ist das Verhältniß des Productes der beiden Perpendikel, welche auf die Seiten des geraden Ranges gefällt sind, zu dem Producte der beiden Perpendikel, welche auf die Seiten des ungeraden Ranges herabgelassen sind, ein constantes, d. h. immer dasselbe, wo auch der Punkt auf der Curve genommen seyn mag.

Es seyen $M = 0$ und $N = 0$ die Gleichungen der Seiten des geraden, $P = 0$ und $Q = 0$ die Gleichungen der Seiten ungeraden Ranges, wo M, N, P, Q die oben angegebenen Bedeutungen haben. Die Linie zweiten Grades, in welcher das Viereck eingeschrieben ist, läßt sich dann durch die Gleichung

$$MN + \lambda PQ = 0 \qquad (4)$$

ausdrücken. Nun ist, wenn man die Perpendikel, welche von einem Punkte xy auf die vier Geraden $M=0$, $N=0$, $P=0$, $Q=0$ gefällt werden können, respective durch m, n, p, q bezeichnet (§. 7. Aufg. 12.), §. 34.

$$m=\frac{M}{\sqrt{1+a_1^2}}\;;\; n=\frac{N}{\sqrt{1+a_2^2}}\;;\; p=\frac{P}{\sqrt{1+a_3^2}}\;;\; q=\frac{Q}{\sqrt{1+a_4^2}}\;.$$

Für die Punkte xy, welche auf der Curve (4) liegen, findet aber zwischen M, N, P und Q die durch die Gleichung (4) ausgedrückte Relation Statt. Eliminirt man also vermittelst der letzten Gleichungen die vier eben genannten Ausdrücke, so kommt

$$\sqrt{1+a_1^2}.\sqrt{1+a_2^2}.mn=\lambda\sqrt{1+a_3^2}.\sqrt{1+a_4^2}.pq$$

oder

$$mn:pq=\lambda\sqrt{1+a_3^2}.\sqrt{1+a_4^2}:\sqrt{1+a_1^2}.\sqrt{1+a_2^2}\;.$$

Da nun das letzte Verhältniß sich nicht ändert, so lange die Curve und die Geraden dieselben bleiben, so ist auch das erste Verhältniß constant.

Man sieht leicht ein, daß nicht nur die Perpendikel, sondern auch die Geraden, welche, von einem Punkte der Curve nach den Seiten des Vierecks gezogen, diese unter gegebenen Winkeln treffen, ähnliche Verhältnisse bilden. (Vergl. vor. §. Aufg. 57.)

Lehrsatz [13]. Wenn man in eine Linie zweiten Grades beliebig viele Vierecke einschreibt, deren drei erste Seiten durch dieselben drei feste, in gerader Linie liegende, Punkte gehen, so gehen die vierten Seiten aller dieser Vierecke durch einen und denselben, in der nämlichen geraden Linie liegenden, Punkt.

Dieser Satz läßt sich aus dem vorhergehenden ableiten; er kann aber auch wie folgt bewiesen werden.

Es sey

$$y^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \qquad (5)$$

die Gleichung der Linie zweiten Grades und zwar auf ein Coordinatensystem bezogen, dessen Ordinatenachse durch die drei gegebenen Punkte geht, und es seyen b_1, b_2, b_3 die Ordinaten dieser Punkte.

Die Gleichungen der vier Seiten eines eingeschriebenen Vierecks, von welchen die drei ersten durch die genannten drei Punkte gehen, sind durch die Gleichungen

$$y-\alpha_1x-b_1=0\;;\; y-\alpha_2x-b_2=0\;;\; y-\alpha_3x-b_3=0\;;\; y-\alpha_4x-\beta=0$$

§. 34. auszudrücken, und die Curve (5) als eine Linie zweiten Grades, welche durch die Punkte geht, in welchen die erste und dritte jener Geraden von der zweiten und vierten geschnitten wird, kann demnach auch unter der Form

$$(y-\alpha_1 x-b_1)(y-\alpha_3 x-b_3)+\lambda(y-\alpha_2 x-b_2)(y-\alpha_4 x-\beta)=0 \quad (6)$$

dargestellt werden. Da nun aber die Gleichungen (5) und (6) identisch seyn müssen, so werden folgende fünf Gleichungen

$$(1+\lambda)B=-(\alpha_1+\alpha_3)-\lambda(\alpha_2+\alpha_4)\ ;\ (1+\lambda)C=\alpha_1\alpha_3+\lambda\alpha_2\alpha_4\ ;$$
$$(1+\lambda)D=-(b_1+b_3)-\lambda(b_2+\beta)\ ;\ (1+\lambda)E=\alpha_1 b_3+\alpha_3 b_1+\lambda(\alpha_2\beta+\alpha_4 b_2);$$
$$(1+\lambda)F=b_1 b_3+\lambda b_2\beta$$

zwischen den sechs Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta, \lambda$ Statt finden, so daß, wenn einer dieser Größen, z. B. dem α_1, ein bestimmter Werth beigelegt wird, die übrigen fünf Größen ebenfalls bestimmte Werthe erhalten, was damit übereinstimmt, daß, wenn man die erste Seite eines einzuschreibenden Vierecks, dessen drei erste Seiten durch bestimmte Punkte gehen sollen, bestimmt hat, die drei übrigen Seiten dadurch ebenfalls bestimmt sind. Wenn man nun aber λ zwischen der dritten und fünften Gleichung eliminirt, so kommt

$$(b_1 b_3-F)(D+b_2+\beta)+(b_1+b_3+D)(F-b_2\beta)=0\ ,$$

eine Gleichung, die in Beziehung auf β vom ersten Grade ist, und aus welcher diese Größe einen einzigen bestimmten Werth erhält, der, wie man sieht, nur von den, als gegeben zu betrachtenden, Größen D, F, b_1, b_2, b_3 abhängt. Dieser Werth von β ist also von α_1, α_2 oder α_3 ganz unabhängig, und bleibt immer derselbe, welchen Werth man auch der einen, beliebig anzunehmenden, Größe, z. B. α_1, beilegen mag. Es ist aber β die Ordinate des Punktes, in welchem die vierte Seite des Vierecks die Ordinatenachse schneidet, weil die Gleichung dieser vierten Seite für $x=0$ $y=\beta$ giebt; folglich schneidet die vierte Seite des Vierecks die Ordinatenachse, d. i. die Gerade, welche die drei festen Punkte enthält, immer in demselben Punkte.

Lehrsatz [14]. *Wenn man in eine Linie zweiten Grades beliebig viele Vierecke einschreibt, deren drei erste Seiten dreien gegebenen festen Richtungen parallel sind, so sind auch die vierten Seiten einer unveränderlichen Richtung parallel.*

Dieser Satz läßt sich wie der vorige erweisen; wir werden deshalb den Beweis nur andeuten.

Es sey wieder

$$y^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \quad (5)$$

die Gleichung der Linie zweiten Grades auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogen, und $y = a_1x$; $y = a_2x$; $y = a_3x$ drei, durch den Anfangspunkt der Coordinaten den gegebenen Richtungen parallel laufende Gerade. Die vier Seiten des Vierecks, von welchen die drei ersten diesen Richtungen parallel sind, werden alsdann durch die Gleichungen §. 34.

$$y-a_1x-\beta_1=0 \; ; \; y-a_2x-\beta_2=0 \; ; \; y-a_3x-\beta_3=0 \; ; \; y-\alpha x-\beta_4=0$$

ausgedrückt werden können; und die Gleichung (5) wird auch unter der Form

$$(y-a_1x-\beta_1)(y-a_3x-\beta_3)+\lambda(y-a_2x-\beta_2)(y-\alpha x-\beta_4)=0 \quad (7)$$

darzustellen seyn. Das Identificiren der Gleichungen (5) und (7) giebt nun fünf Relationen für die unbestimmten Größen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \alpha$ und λ, von welchen die beiden ersten, nämlich

$$(1+\lambda)B = -(a_1+a_3)-\lambda(a_2+\alpha) \; ; \; (1+\lambda)C = a_1a_3+\lambda a_2\alpha \; ,$$

durch Elimination von λ, die Gleichung

$$(a_1a_3-C)(B+a_2+\alpha)+(a_1+a_3+B)(C-a_2\alpha)=0$$

geben. Aus dieser Gleichung erhält α einen einzigen von $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ unabhängigen Werth, und daher ist die vierte Seite immer einer unveränderlichen Richtung parallel.

Aus den beiden vorigen Sätzen läßt sich der folgende herleiten.

Lehrsatz [15]. Wenn man in eine Linie zweiten Grades beliebig viele Polygone von einer und derselben geraden Anzahl ($2n$) Seiten einschreibt, so aber, daß die ersten ($2n-1$) Seiten durch eben so viele, in gerader Linie liegende, feste Punkte gehen (oder eben so vielen unveränderlichen Richtungen parallel sind); so werden auch die letzten Seiten aller dieser Vielecke durch einen festen, in derselben Geraden liegenden, Punkt gehen (oder einer unveränderlichen Richtung parallel seyn).

Denn betrachtet man zunächst nur eingeschriebene Sechsecke, und zieht darin die Diagonalen, welche mit den sechsten Seiten keinen Endpunkt gemein haben, so bilden sie mit den 2ten, 3ten und 4ten Seiten Vierecke, in welchen drei Seiten durch drei feste, in gerader Linie liegende, Punkte gehen (oder drei gegebenen Richtungen parallel sind); daher werden diese Diagonalen, als vierte Seiten der Vierecke durch einen festen Punkt der Geraden gehen (oder einer unveränderlichen Richtung parallel seyn). Diese Diagonalen bilden aber auch mit den 1sten, 5ten und 6ten Seiten Vierecke, in

§. 34. welchen drei Seiten, nämlich die Diagonalen, wie eben bewiesen, die 1sten und 5ten Seiten, wie vorausgesetzt, durch drei feste, mit den früher genannten in gerader Linie liegende, Punkte gehen (oder gegebenen Richtungen parallel sind). Es werden also auch die vierten Seiten dieser Vierecke oder, was dasselbe ist, die sechsten Seiten der Sechsecke durch einen festen, mit den fünf andern in gerader Linie liegenden, Punkt gehen (oder einer unveränderlichen Richtung parallel seyn).

Auf dieselbe Weise wie hier aus dem, für das Viereck bewiesenen, Satze derselbe Satz für das Sechseck abgeleitet worden, kann er aus diesem für das Achteck u. s. f. erwiesen werden.

Lehrsatz [16]. Wenn man in eine Linie zweiten Grades ein Sechseck einschreibt und die einander gegenüberstehenden Seiten bis zu ihren Durchschnitten verlängert, so liegen diese drei Durchschnittspunkte in gerader Linie.

Wir bezeichnen die Gleichungen zweier beliebig gewählten, sich gegenüberstehenden Seiten des Sechsecks durch

$$M = 0 \quad \text{und} \quad N = 0 , \tag{8}$$

und die Gleichungen der beiden Diagonalen, welche die Endpunkte dieser Seiten verbinden, durch

$$P = 0 \quad \text{und} \quad Q = 0 . \tag{9}$$

Da nun diese Diagonalen die genannten Seiten auf der Curve schneiden, so wird die Gleichung dieser Linie zweiten Grades unter der Form

$$MN + \lambda PQ = 0 \tag{10}$$

dargestellt werden können.

Was nun erstens die beiden Seiten des Sechsecks betrifft, die respective durch die Durchschnitte von $M = 0$ und $P = 0$ und von $N = 0$ und $Q = 0$ gehen; so wird jede Gerade, die den erstern Durchschnittspunkt enthält, durch

$$hM + \lambda P = 0 , \tag{11}$$

und jede Gerade, die den letztern Durchschnittspunkt enthält, durch

$$kN + hQ = 0 \tag{12}$$

ausgedrückt werden können (§. 9.), in welchen Gleichungen h und k zwei willkührliche constante Factoren bedeuten. Wenn aber diese Geraden zwei, sich auf der Curve schneidende, Seiten des Sechsecks seyn sollen, werden die Constanten h und k nicht mehr von einander unabhängig seyn; denn eli-

minirt man h zwiſchen (11) und (12), ſo kommt $-kMN+\lambda PQ=0$, §. 34.
und dieſe Gleichung gehört einer Curve an, auf welcher ſich die Gerade (11) und (12) ſchneiden (weil die Werthe von x u. y, welche $kN=-hQ$ und zugleich $M=-\frac{\lambda}{h}P$ machen, dieſe Gleichung befriedigen). Da nun dieſe Gleichung eine Linie zweiten Grades ausdrückt, welche nur dann mit der Curve (10) zuſammenfällt, wenn $-k=1$ iſt, ſo ſind es die Gleichungen

$$hM+\lambda P=0\,,$$
$$N-hQ=0\,,$$

durch welche die beiden in Rede ſtehenden Seiten des Sechsecks ausgedrückt werden müſſen.

Auf dieſelbe Weiſe findet man, daß die beiden Seiten des Sechsecks, welche reſpective durch die Durchſchnitte von $M=0$ und $Q=0$, und von $N=0$ und $P=0$ gehen, durch die Gleichungen

$$h'M+\lambda Q=0\,,$$
$$N-h'P=0$$

auszudrücken ſind.

Die drei Paare ſich gegenüberſtehender Seiten ſind demnach durch folgende Gleichungsſyſteme

$$\left\{\begin{matrix}M=0\\N=0\end{matrix}\right\}\,;\quad\left\{\begin{matrix}hM+\lambda P=0\\N-h'P=0\end{matrix}\right\}\,;\quad\left\{\begin{matrix}h'M+\lambda Q=0\\N-hQ=0\end{matrix}\right\}$$

darzuſtellen. Die Coordinaten des Durchſchnittspunktes eines jeden dieſer Linien-Paare befriedigen aber die Gleichung

$$hh'M+\lambda N=0\,, \qquad (13)$$

weil die Werthe von M und N, welche ein jedes Gleichungsſyſtem giebt, dieſe Gleichung (13) befriedigen. Es liegen folglich die Durchſchnittspunkte in der Linie (13), welche, wie man ſieht, eine Gerade iſt.

Aus dieſem Satze vom eingeſchriebenen Sechseck, welcher gewöhnlich der Pascal'ſche genannt wird, läßt ſich eine Menge anderer Sätze ableiten, wobei wir aber nicht verweilen können. Indeſſen darf nicht unbemerkt bleiben, daß dieſelben ſechs Punkte einer Linie zweiten Grades die Eckpunkte von ſechzig eingeſchriebenen Sechsecken ſeyn können.

Aufgabe [60]. Es ſind vier Punkte gegeben; man ſoll den Ort

§. 34. **der Mittelpunkte aller Linien zweiten Grades, welche durch die gegebenen Punkte gelegt werden können, finden.**

Man nehme die Verbindungslinie von zwei der gegebenen Punkte zur Abscissenachse und die Verbindungslinie der beiden andern Punkte zur Ordinatenachse. Nennt man nun die Abscissen der beiden, in der Abscissenachse liegenden Punkte α und α', die Ordinaten der beiden, in der Ordinatenachse liegenden, β und β'; so hat man zur Bestimmung der Coefficienten der Gleichung

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0\ ,$$

einer Linie zweiten Grades, welche durch die vier gegebenen Punkte geht (Aufg. 59.), folgende vier Gleichungen

$$a\beta^2+2d\beta+f=0\quad;\quad c\alpha^2+2e\alpha+f=0\ ;$$
$$a\beta'^2+2d\beta'+f=0\quad;\quad c\alpha'^2+2e\alpha'+f=0\ ,$$

und zur Bestimmung der Coordinaten des Mittelpunktes der Curve, wenn diese durch x, y bezeichnet werden (§. 29. G. 7', 8'),

$$ay+bx+d=0\quad;\quad by+cx+e=0\ .$$

Eliminirt man zunächst a und d zwischen den drei, auf der linken Seite stehenden Gleichungen, ferner c und e zwischen den drei auf der rechten Seite befindlichen; so kommt

$$2\beta\beta'bx+\{2y-(\beta'+\beta)\}f=0\quad;\quad 2\alpha\alpha'by+\{2x-(\alpha'+\alpha)\}f=0\ ,$$

aus welchen beiden Gleichungen durch Elimination von b oder f

$$\beta\beta'x\{2x-(\alpha'+\alpha)\}=\alpha\alpha'y\{2y-(\beta'+\beta)\}$$

als Gleichung des gesuchten Ortes hervorgeht, der also, wie man sieht, eine Linie zweiten Grades ist.

Die gefundene Gleichung wird befriedigt, wenn man

$$1)\begin{Bmatrix}x=0\\y=0\end{Bmatrix}\text{ oder }2)\begin{Bmatrix}x=0\\y=\frac{1}{2}(\beta'+\beta)\end{Bmatrix}\text{ oder }3)\begin{Bmatrix}x=\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha)\\y=\frac{1}{2}(\beta'+\beta)\end{Bmatrix}$$

setzt. Die Curve geht demnach 1) durch den Anfangspunkt der Coordinaten, also, da auch die andern Verbindungslinien der gegebenen Punkte hätten zu Coordinatenachsen genommen werden können, durch die Durchschnittspunkte der gegenüberstehenden Seiten und der beiden Diagonalen des, durch die vier gegebenen Punkte bestimmten, Vierecks; sie geht 2) durch den Halbirungspunkt der Entfernung zwischen zwei von den gegebenen Punkten, also durch die sechs Halbirungspunkte der vier Seiten und der beiden Dia-

gonalen des genannten Vierecks; und sie geht 3) durch den Durchschnitts- §. 34.
punkt zweier Geraden, von welchen die eine durch den Halbirungspunkt der Entfernung der, in der Abscissenachse liegenden, Punkte der Ordinatenachse parallel gezogen ist, und die andere, durch die Mitte der Entfernung der, in der Ordinatenachse liegenden, Punkte der Abscissenachse parallel läuft; sie geht folglich durch die zwei Punkte, in welchen sich die Geraden schneiden, die gegenüberstehenden Seiten des Vierecks parallel durch die Halbirungspunkte derselben gezogen sind, und durch den Durchschnitt zweier Geraden, welche den Diagonalen parallel durch deren Halbirungspunkte gehen.

Der Mittelpunkt des Ortes der Mittelpunkte wird leicht aufgefunden; denn bringt man die Gleichung dieses Ortes auf die Form

$$\alpha\alpha' y^2 - \beta\beta' x^2 - \tfrac{1}{2}\alpha\alpha'(\beta'+\beta)y + \tfrac{1}{2}\beta\beta'(\alpha'+\alpha)x = 0 ,$$

so erhält man die Coordinaten des Mittelpunktes (§. 29. F. 12.)

$$x' = \tfrac{1}{4}(\alpha'+\alpha) \quad ; \quad y' = \tfrac{1}{4}(\beta'+\beta) .$$

Dieser Punkt ist demnach die Mitte der Entfernung der Halbirungspunkte zweier gegenüberstehenden Seiten des, durch die vier gegebenen Punkte bestimmten, Vierecks.

Aufgabe [61]. Man soll den Ort der Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln finden, welche durch drei gegebene Punkte gehen.

Wir nehmen einen der gegebenen Punkte zum Anfangspunkte, und die beiden Geraden, welche von ihm aus nach den beiden übrigen Punkten gezogen werden können, zu Coordinatenachsen. Nennen wir die Abscisse des, in der Abscissenachse liegenden, Punktes α', und die Ordinate des, in der Ordinatenachse befindlichen β', so haben wir zur Bestimmung der Coefficienten der Gleichung

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0 ,$$

einer Linie zweiten Grades, welche durch die drei gegebenen Punkte gehen soll (Aufg. 59.), folgende drei Gleichungen

$$f = 0 \quad ; \quad a\beta'^2 + 2d\beta' + f = 0 \quad ; \quad c\alpha'^2 + 2e\alpha' + f = 0 ,$$

von welchen die erste die beiden letzten sogleich auf

$$a\beta' + 2d = 0 \quad ; \quad c\alpha' + 2e = 0$$

reducirt, und zur Bestimmung der Coordinaten des Mittelpunktes haben wir (§. 29. G. 7', 8')

$$ay + bx + d = 0 \quad ; \quad by + cx + e = 0 .$$

§. 34. Die Elimination von d und e zwiſchen dieſen vier Gleichungen giebt

$$(2y-\beta')a+2xb=0 \quad ; \quad (2x-\alpha')c+2yb=0 ,$$

und wenn wir zwiſchen dieſen beiden letzten Gleichungen und der Bedingungsgleichung

$$a-2b\cos\alpha+c=0 ,$$

die erfüllt werden muß, wenn die Curve eine gleichſeitige Hyperbel ſeyn ſoll (§. 29. S. 28.), a und c eliminiren, ſo kommt

$$2y^2+4xy\cos\alpha+2x^2-(\beta'+2\alpha'\cos\alpha)y-(\alpha'+2\beta'\cos\alpha)x+\alpha'\beta'\cos\alpha=0 ,$$

als die Gleichung des geſuchten Ortes. Es gehört aber dieſe Gleichung einem Kreiſe an, der durch die Halbirungspunkte des Dreiecks geht, deſſen Eckpunkte die gegebenen drei Punkte ſind; denn vergleicht man ſie mit der Gleichung (1) des §. 29., ſo iſt $a=2$, $b=2\cos\alpha$, $c=2$, alſo $a=c$ und $b=a\cos\alpha$, welches die Bedingungen waren, unter welchen die Gleichung einen Kreis ausdrückte; und ſetzt man

$$\left\{\begin{matrix}x=\frac{1}{2}\alpha'\\ y=0\end{matrix}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{matrix}x=0\\ y=\frac{1}{2}\beta'\end{matrix}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{matrix}x=\frac{1}{2}\alpha'\\ y=\frac{1}{2}\beta'\end{matrix}\right\} ,$$

ſo wird die Gleichung befriedigt.

Durch die Löſung dieſer Aufgabe iſt zugleich der folgende Satz bewieſen.

Schreibt man in eine gleichſeitige Hyperbel irgend ein Dreieck ein, halbirt die Seiten deſſelben und legt durch die Halbirungspunkte einen Kreis, ſo geht dieſer durch den Mittelpunkt der Curve.

§. 35.

Eine gerade Linie ſchneidet eine Linie zweiten Grades im Allgemeinen in zwei Punkten, deren Coordinaten, da ſie ſowohl die Gleichung der Geraden als die der Curve befriedigen müſſen, durch Entwickelung der Werthe von x und y aus den Gleichungen der beiden Linien gefunden werden können. Sind die beiden Werthe von x, welche man, nach der Elimination von y, findet, reell, ſo ſind die Werthe von y ebenfalls reell, weil zwiſchen x und y eine Gleichung vom erſten Grade, die der geraden Linie nämlich, Statt findet; und dann exiſtiren zwei Durchſchnittspunkte. Sind aber jene Werthe von x imaginär, ſo ſind, aus dem angeführten Grunde, die Werthe von y ebenfalls imaginär, und dann exiſtirt kein Durchſchnittspunkt. Iſt von den beiden Werthen von x einer unendlich, der andere aber endlich, ſo

existirt nur ein Durchschnittspunkt, ein zweiter liegt in unendlicher Entfer- §. 35.
nung vom Anfangspunkte der Coordinaten. (Dies findet bei der Hyperbel Statt, wenn die Gerade einer Asymptote parallel ist (§. 29.), und derselbe Fall tritt bei der Parabel ein, wenn die Gerade der Achse parallel oder, mit andern Worten, wenn die Gerade ein Durchmesser der Parabel ist.) Sind endlich die beiden Werthe von x einander gleich, so sind es auch die beiden Werthe von y, weil die Substitution der gleichen Werthe von x in die Gleichung der geraden Linie gleiche Werthe für y giebt; und alsdann fallen beide Durchschnittspunkte in einen Punkt zusammen. Die gerade Linie heißt dann die Berührungslinie oder Tangente der Curve in diesem Punkte *).

Aufgabe [62]. Die Gleichung einer Linie zweiten Grades und die Coordinaten eines Punktes derselben sind gegeben. Man soll die Gleichung der Tangente in diesem Punkte finden.

Es sey

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0 \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung der Curve in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten und x', y' die gegebenen Coordinaten des Punktes.

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Punkte $x'y'$ ohne die Richtung der Achsen zu ändern, indem man $t+x'$ statt x, und $u+y'$ statt y setzt (§. 3.), so kommt

$$au^2+2but+ct^2+2(ay'+bx'+d)u+2(by'+cx'+e)t=0\,, \qquad (2)$$

indem

$$ay'^2+2bx'y'+cx'^2+2dy'+2ex'+f=0 \qquad (3)$$

ist, weil der gegebene Punkt $x'y'$ in der Curve liegt.

---

*) Wenn die Gleichungen einer Linie zweiten Grades und einer Geraden gegeben sind, so wird man, nach der Elimination von y zwischen diesen Gleichungen, beurtheilen können, ob die Gerade die Curve berühre oder nicht. Giebt nämlich diese Elimination eine Gleichung in x, die zwei gleiche Wurzeln hat, so ist die Gerade eine Tangente; giebt diese aber eine Gleichung, die ungleiche Wurzeln hat, so ist sie es nicht. Wenn aber die gegebene Gerade der Ordinatenachse parallel ist, ihre Gleichung also die Form $x=g$ hat, so schneidet sie die Curve zwar in zwei (reellen oder imaginären) Punkten, die offenbar dieselbe Abscisse haben, aber sie berührt sie im Allgemeinen nicht, weil die Ordinaten dieser Punkte nicht dieselben zu seyn brauchen; aber in diesem Falle ist auch keine Elimination von y nöthig oder nur möglich, um die Abscissen der Durchschnittspunkte zu bestimmen, welche vielmehr gegeben ($=g$) sind.

§. 35. Jede Gerade, welche durch den gegebenen Punkt, d. i. durch den Anfangspunkt der neuen Coordinaten geht, hat zur Gleichung

$$u = nt , \qquad (4)$$

und eliminirt man u zwischen den Gleichungen (2) und (4), so erhält man

$$(an^2+2bn+c)t^2+2[(ay'+bx'+d)n+(by'+cx'+e)]t = 0 ,$$

eine Gleichung, aus welcher t zwei Werthe erhält, von denen der eine gleich Null ist, was auch n seyn mag. Soll nun aber die Gerade (4) die Curve berühren, so muß der andere Werth von t dem ersten gleich, also ebenfalls Null seyn, was nur Statt findet, wenn

$$(ay'+bx'+d)n+by'+cx'+e = 0$$

ist, woraus man n bestimmen kann, und wenn man den Werth in die Gleichung (4) setzt,

$$(ay'+bx'+d)u+(by'+cx'+e)t = 0 ,$$

als Gleichung der Berührungslinie in Beziehung auf das neue Coordinatensystem, erhält. Substituirt man hierin, um wieder zu den alten Achsen zurückzukehren, $x-x'$ für t und $y-y'$ für u, so kommt

$$(ay'+bx'+d)y+(by'+cx'+e)x-(ay'^2+2bx'y'+cx'^2+dy'+ex') = 0 ,$$

oder, weil, in Folge von (3), $-(ay'^2+2bx'y'+cx'^2) = 2dy'+2ex'+f$,

$$(ay'+bx'+d)y+(by'+cx'+e)x+dy'+ex'+f = 0 , \qquad (5)$$

welches die verlangte Gleichung ist.

Für die, auf ihre Achsen oder Durchmesser bezogenen, Gleichungen der Parabel, Ellipse und Hyperbel nimmt die Gleichung der Tangente in einem Punkte x'y' folgende Formen an:

für die Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ ist,

$$y'y = \tfrac{1}{2}p(x+x') , \qquad (6)$$

für die Ellipse, deren Gleichung $a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2$ ist,

$$a^2y'y+b^2x'x = a^2b^2 , \qquad (7)$$

für die Hyperbel, deren Gleichung $a^2y^2-b^2x^2 = -a^2b^2$ ist,

$$a^2y'y-b^2x'x = -a^2b^2 . \qquad (8)$$

Die Senkrechte auf der Tangente in ihrem Berührungspunkte p wird die Normale im Punkte p genannt. Insbesondere heißen die Stücke der Tangente und Normale, welche von dem Berührungspunkte und der Abscissenachse begrenzt werden, Tangente und Normale des Punktes p. Die

Stücke der Abſciſſenachſe, welche von der Ordinate einerſeits und von der Tangente und Normale andererſeits begrenzt werden, heißen Subtangente und Subnormale. §. 35.

Aufgabe [63]. Die Ausdrücke für die Längen der Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale eines Punktes der, auf ihre Achſen bezogenen, Ellipſe, Hyperbel und Parabel zu finden.

Die Gleichungen der Ellipſe, Hyperbel und Parabel, auf deren Achſen bezogen, alſo in rechtwinkligen Coordinaten, ſeyen:

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \quad ; \quad a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2 \quad ; \quad y^2=px \; ;$$

ſo hat man für die Gleichungen der Berührungslinie in einem Punkte $x'y'$ dieſer Curven (vor. Aufg.)

$$a^2y'y+b^2x'x=a^2b^2 \; ; \; a^2y'y-b^2x'x=-a^2b^2 \; ; \; y'y=\tfrac{1}{2}p(x+x') \; ;$$

und folglich für die Gleichungen der Normale in demſelben Punkte, nach §. 6. Aufg. 9.,

$$b^2x'(y-y')-a^2y'(x-x')=0 \; ; \; b^2x'(y-y')+a^2y'(x-x')=0 \; ; \; p(y-y')+2y'(x-x')=0 \, .$$

Setzt man nun in dieſe ſechs Gleichungen $y=0$, ſo findet ſich, wenn die Abſciſſen des Durchſchnittspunktes der Tangente und Normale mit der Abſciſſenachſe reſpective durch x_t und x_n bezeichnet werden,

$$x_t=\frac{a^2}{x'} \quad ; \quad x_t=\frac{a^2}{x'} \quad ; \quad x_t=-x' \quad ,$$

$$x_n=\frac{(a^2-b^2)}{a^2}.x' \quad ; \quad x_n=\frac{a^2+b^2}{a^2}x' \quad ; \quad x_n=x'+\tfrac{1}{2}p \, .$$

Nun iſt aber allgemein die

$$\text{Tangente}=\sqrt{y'^2+(x'-x_t)^2} \quad ; \quad \text{Normale}=\sqrt{y'^2+(x'-x_n)^2} \; ;$$

$$\text{Subtangente}=x_t-x' \quad ; \quad \text{Subnormale}=x_n-x' \; *).$$

Daher, und weil der Punkt $x'y'$ in der Curve liegt, hat man für die geſuchten Längen folgende Ausdrücke:

---

*) Die Subtangente und Subnormale liegen von der Ordinate aus nach der poſitiven oder negativen Seite der Abſciſſen hin, je nachdem die beiden obigen Ausdrücke poſitiv oder negativ ſind. Wenn man ſtatt ihrer $x'-x_t$ und $x'-x_n$ nimmt, ſo verhält es ſich mit der Lage dieſer Linien umgekehrt.

§. 35.

	Für die Ellipse.	Für die Hyperbel.	Für die Parabel.
Subnormale	$-\frac{b^2}{a^2}x'$	$\frac{b^2}{a^2}x'$	$\frac{1}{2}p$
Subtangente	$\frac{a^2-x'^2}{x'}=\frac{a^2y'^2}{b^2x'}$	$\frac{a^2-x'^2}{x'}=-\frac{a^2y'^2}{b^2x'}$	$-2x'$
Normale	$\frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}$	$\frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}$	$\sqrt{y'^2+\frac{1}{4}p^2}$
Tangente	$\frac{y'}{b^2x'}\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}$	$\frac{y'}{b^2x'}\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}$	$\sqrt{y'^2+4x'^2}$

Jeder von diesen Ausdrücken kann benutzt werden, um die Tangente und die Normale in einem Punkte der Curve zu construiren, wenn die Lage der Achsen und die constanten Größen, welche in den Ausdrücken vorkommen, bekannt sind. So kann man z. B. an die Parabel eine Tangente legen, indem man von dem gegebenen Berührungspunkte eine Senkrechte auf die Achse fällt, das Stück der letztern, welches von dem Fuße der Senkrechten und dem Scheitel der Curve begrenzt wird, auf der Verlängerung der Achse vom Scheitel an abschneidet, und den so bestimmten Endpunkt dieser Verlängerung mit dem gegebenen Punkte der Parabel verbindet. Die Richtigkeit dieser Construction folgt aus dem Ausdruck für die Subtangente.

Nächst diesem Ausdrucke für die Subtangente und dem für die Subnormale der Parabel, aus welchem letztern man sieht, daß diese Länge für alle Punkte der Parabel dieselbe ist, ist der Ausdruck $\frac{a^2-x'^2}{x'}$ für die Länge der Subtangente der Ellipse und Hyperbel merkwürdig, weil er von der Größe der kleinern oder Nebenachse, so wie von der Ordinate unabhängig ist. Alle Ellipsen oder Hyperbeln, deren Mittelpunkte und größere oder Hauptachsen zusammenfallen, haben daher für Punkte, deren Abscissen dieselben sind, gleiche Subtangenten, was auch immer die kleinern oder Nebenachsen für eine Größe haben mögen.

Es darf übrigens nicht unbemerkt gelassen werden, daß die Form der Ausdrücke für die Subtangente der drei Curven sich nicht ändert, wenn diese nicht auf die Achsen, sondern auf conjugirte Durchmesser bezogen werden.

Aufgabe [64]. Von einem Punkte aus, dessen Coordinaten gegeben

den sind, ist eine Tangente an eine Linie zweiten Grades, deren Gleichung ebenfalls gegeben ist, gezogen. Man soll die Coordinaten des Berührungspunktes finden. §. 35.

Es sey wieder

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0 \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung der Curve, und es seyen t, u die Coordinaten des gegebenen Punktes. Wären die Coordinaten des Berührungspunktes x', y' bekannt, so wäre die Gleichung der Tangente (Aufg. 62.)

$$(ay'+bx'+d)y+(by'+cx'+e)x+dy'+cx'+f=0\ ; \qquad (5)$$

und da sie durch den Punkt tu gehen soll, so müssen diese Coordinaten die Gleichung befriedigen, so daß

$$(ay'+bx'+d)u+(by'+cx'+e)t+dy'+cx'+f=0$$

oder

$$(au+bt+d)y'+(bu+ct+e)x'+du+et+f=0$$

seyn muß. Da nun aber der gesuchte Berührungspunkt auch in der gegebenen Curve liegt, so werden seine Coordinaten nicht nur die so eben gefundene Gleichung, sondern auch die Gleichung dieser Curve befriedigen. Wenn man also die Accente von den Coordinaten des gesuchten Punktes wegläßt, so hat man, zur Bestimmung dieser Coordinaten x, y, die Gleichung

$$(au+bt+d)y+(bu+ct+e)x+du+et+f=0 \qquad (9)$$

und die Gleichung der Curve (1), wodurch die Aufgabe gelöst ist.

Diese Lösung der Aufgabe giebt zu mehreren wichtigen Bemerkungen Veranlassung.

Zunächst sieht man, daß von den beiden Gleichungen (1) und (9), welche x und y bestimmen, die eine (1) vom zweiten, und die andere (9) vom ersten Grade ist, daß also im Allgemeinen entweder zwei verschiedene, reelle Werthe für x und y oder kein reeller Werth für diese Größen gefunden werden wird, d. h., daß entweder zwei Tangenten oder keine Tangente von dem gegebenen Punkte tu aus an die Curve gelegt werden können. (Wir sagen im Allgemeinen, denn wenn der Punkt tu auf der Curve gegeben wäre, so würden für x und y einfache reelle Werthe, nämlich t und u selbst gefunden werden, weil alsdann der gegebene Punkt auch der Berührungspunkt und auch nur eine Tangente möglich wäre.)

Ferner leuchtet ein, daß die Gleichung (9) diejenige Gerade ausdrückt, welche die Berührungspunkte der, vom Punkte tu aus, an die Curve geleg-

§. 35. ten Tangenten verbindet; denn sie muß von den Coordinaten dieser Berührungspunkte befriedigt werden. Diese Gerade wird daher, wenn zwei Tangenten möglich sind, die Berührungssehne der beiden Tangenten vom Punkte tu genannt.

Ferner ist ersichtlich, daß in jedem Falle, es mögen nämlich von dem gegebenen Punkte tu aus Tangenten an die Curve (1) gelegt werden können oder nicht, die Gerade (9) als Polare des Punktes tu betrachtet werden kann, und daß die dadurch entstehenden reciproken Systeme die in §. 20. angegebene Lage haben; denn setzt man in die Gleichung (3) des §. 20. a, b, c u. s. w. für A, B, C u. s. w., so erhält man die obige Gleichung (9). Weil die Constanten in der Gleichung (9), wenn diese als Gleichung der Polare des Punktes tu betrachtet wird, eben diejenigen Größen sind, welche die Beziehung der beiden reciproken Systeme individualisiren, wird die Linie zweiten Grades, deren Gleichung (1) dieselben Constanten enthält, die Directrix dieser reciproken Systeme genannt.

Daraus, daß die Berührungssehne der beiden, von einem Punkte aus gezogenen Tangenten als Polare dieses Punktes betrachtet werden kann, ergiebt sich der folgende

Lehrsatz [17]. Wenn der Scheitel eines Winkels sich auf einer Geraden bewegt, während die Schenkel desselben eine Linie zweiten Grades berühren, wobei die Größe des Winkels im Allgemeinen sich ändert, so drehen sich die Berührungssehnen um einen und denselben Punkt, den Pol jener Geraden; und umgekehrt, wenn eine Sehne einer Linie zweiten Grades sich um einen festen Punkt dreht, so schneiden sich die Tangenten in den Endpunkten der Sehne auf einer und derselben Geraden, der Polarlinie des festen Punktes.

Die Coordinaten der Brennpunkte einer auf ihre Achsen bezogenen Ellipse, deren Gleichung $a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2$ ist, sind $u=0$ und $t=\pm e'$, wo e' die Excentricität bedeutet (§. 33.). Die Gleichung der Polare eines Punktes tu in Beziehung auf diese Ellipse, d. h. wenn diese Curve zur Directrix genommen wird, ist

$$a^2uy+b^2tx = a^2b^2 ,$$

wie sich dies aus der Gleichung (9) ergiebt, wenn man $a=a^2$; $b=0$; $c=b^2$; $d=0$; $e=0$ und $f=-a^2b^2$ setzt. Substituirt man für t und u die genannten Coordinaten des Brennpunktes, so kommt $\pm ex=a^2$. Die Polaren der Brennpunkte stehen also senkrecht auf der größern Achse

und ſchneiden dieſe in einem Punkte, deſſen Abſciſſe gleich $\pm\frac{a^2}{e}$ iſt; folglich iſt die Polare des Brennpunktes eine Directrix der Ellipſe (§. 33. S. 133.). Aehnliche Reſultate erhält man für die Hyperbel und Parabel. Daher der folgende §. 35.

Lehrſatz [18]. Zieht man durch den Brennpunkt einer Linie zweiten Grades eine Sehne und in den Endpunkten derſelben Tangenten an dieſe Curve, ſo ſchneiden ſich dieſe letztern auf der Directrix der Curve.

Bezeichnen α', β' die Coordinaten des Mittelpunktes der Curve (1), ſo iſt

$$y-\beta' = n(x-\alpha')$$

die Gleichung eines Durchmeſſers, und

$$(ay+bx+d)n+by+cx+e = 0$$

diejenige des conjugirten Durchmeſſers (§. 29.). Soll der letztere durch den Punkt tu gehen, ſo muß

$$(au+bt+d)n+bu+ct+e = 0$$

ſeyn; und eliminirt man n zwiſchen der erſten und letzten dieſer drei Gleichungen, ſo kommt

$$(au+bt+d)(y-\beta')+(bu+ct+e)(x-\alpha') = 0 \qquad (10)$$

als Gleichung für den conjugirten Durchmeſſer desjenigen, der durch den Punkt tu geht. Da nun die beiden Gleichungen (9) und (10) offenbar zwei parallele Gerade ausdrücken, ſo folgt:

Die Polare eines Punktes tu in Beziehung auf eine Linie zweiten Grades iſt dem conjugirten Durchmeſſer desjenigen parallel, welcher durch dieſen Punkt tu gezogen werden kann.

Aufgabe [65]. An eine Linie zweiten Grades, deren Gleichung gegeben iſt, iſt eine Tangente gezogen, die einer Geraden, deren Gleichung ebenfalls gegeben iſt, parallel läuft. Man ſoll die Coordinaten des Berührungspunktes finden.

Es ſey wieder

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f = 0 \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung der Curve, und

$$y = nx+p \qquad (11)$$

§. 35 sey die gegebene Gleichung der Geraden. Wären die Coordinaten des Berührungspunktes x', y' bekannt, so wäre die Gleichung der Tangente (Aufg. 62.)

$$(ay'+bx'+d)y+(by'+cx'+e)x+dy'+ex'+f=0\ ; \quad (5)$$

und da sie der Geraden (11) parallel seyn soll, so muß

$$-\frac{by'+cx'+e}{ay'+bx'+d}=n \quad \text{oder} \quad (ay'+bx'+d)n+by'+cx'+e=0$$

seyn. Da nun aber der gesuchte Berührungspunkt auch in der gegebenen Curve liegt, so werden seine Coordinaten nicht nur die so eben gefundene Gleichung, sondern auch die Gleichung dieser Curve befriedigen. Wenn man also die Accente von den Coordinaten des gesuchten Punktes wegläßt, so hat man zur Bestimmung dieser Coordinaten x, y die Gleichung

$$(ay+bx+d)n+by+cx+e=0 \quad (12)$$

und die Gleichung (1) der Curve, wodurch die Aufgabe gelöst ist.

Man sieht, wie in der vorigen Aufgabe, daß im Allgemeinen zwei Tangenten an eine Linie zweiten Grades gelegt werden können, die einer gegebenen Geraden parallel sind, und daß die Gleichung (12) eine gerade Linie ausdrückt, die die beiden Berührungspunkte enthält. Diese Berührungssehne ist, wie aus §. 29. erhellet, der conjugirte Durchmesser desjenigen, welcher der gegebenen Geraden parallel ist. Da nun jeder Durchmesser der Ellipse diese Curve in zwei Punkten, jeder Durchmesser der Parabel sie nur in einem Punkte und ein Durchmesser der Hyperbel diese Curve in zwei Punkten oder gar nicht schneidet; so folgt, daß an eine Ellipse immer zwei, an eine Parabel immer nur eine, und an eine Hyperbel entweder zwei oder keine Tangenten gelegt werden können, die einer gegebenen Richtung parallel sind.

§. 36.

Folgende Sätze lassen sich leicht erweisen.

Lehrsatz [19]. Wenn in irgend einem Punkte einer Ellipse oder Hyperbel eine Tangente gezogen wird, und wenn irgend zwei conjugirte Durchmesser zu Coordinatenachsen genommen werden; so ist

1) das Rechteck enthalten unter der Ordinate des Berührungspunktes und derjenigen Ordinate der Tangente, welche im Mittelpunkte der Curve errichtet wird;
2) das Rechteck enthalten unter den Ordinaten der Tangente, welche in den Endpunkten des zur Abscissenachse genommenen Durchmessers errichtet werden;

dem Quadrate der Hälfte des zur Ordinatenachse genommenen Durch- §. 36.
messers gleich.

Es sey

$$a'^2y^2 \pm b'^2x^2 = \pm a'^2b'^2$$

die Gleichung der, auf zwei conjugirte Durchmesser bezogenen, Ellipse oder Hyperbel (§. 29.), worin $2a'$ und $2b'$ die Längen dieser Durchmesser bezeichnen (§. 32.), und es seyen ferner x', y' die Coordinaten eines Punktes dieser Curve; so ist die Gleichung der Tangente im Punkte $x'y'$ (vor. §.)

$$a'^2y'y \pm b'^2x'x = \pm a'^2b'^2 .$$

Bezeichnet man nun die Ordinate dieser Geraden, welche im Mittelpunkte der Curve errichtet wird, durch y'', und diejenigen, welche in den Durchschnitten der Abscissenachse mit der Curve aufgerichtet werden, durch y_1, y_2; so ergiebt sich aus der letzten Gleichung, wenn man darin nach einander $x = 0$, $x = +a'$ und $x = -a'$ setzt,

$$y'' = \pm\frac{b'^2}{y'} \quad ; \quad y_1 = \pm\frac{b'^2(a'-x')}{a'y'} \quad ; \quad y_2 = \pm\frac{b'^2(a'+x')}{a'y'} \quad ;$$

woraus unmittelbar

1) $y'y'' = b'^2$, und

2) $y_1y_2 = \frac{b'^4(a'^2-x'^2)}{a'^2y'^2}$ oder, wenn man für $a'^2y'^2$ den aus der gegebenen Gleichung hergenommenen Ausdruck $\pm b'^2(a'^2-x'^2)$ setzt,

$$y_1y_2 = b'^2$$

folgt, w. z. e. w.

Lehrsatz [20]. Wenn in irgend einem Punkte einer Ellipse oder Hyperbel eine Tangente gezogen wird, so ist das unter den beiden, von den Brennpunkten auf die Tangente gefällten, Senkrechten enthaltene Rechteck dem Quadrate auf der Hälfte der kleinern oder Nebenachse gleich.

Es sey

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$$

die Gleichung der Ellipse oder Hyperbel in Beziehung auf die Achsen der Curve und x', y' die Coordinaten eines Punktes derselben. Die Gleichung der Tangente in diesem Punkte ist alsdann (§. 35. S. 7, 8)

$$a^2y'y \pm b^2x'x = \pm a^2b^2 \; ;$$

und wenn man die Perpendikel, welche von den beiden Brennpunkten auf

§. 36. dieſe Gerade gefällt werden, durch p' und p'' bezeichnet, ſo hat man, da die Coordinaten dieſer Punkte reſpective $y=0$, $x=e$ und $y=0$, $x=-e$ ſind, (§. 7. S. 6)

$$p' = \frac{b^2(x'e-a^2)}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}} \quad ; \quad p'' = \frac{b^2(x'e+a^2)}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}},$$

alſo $p'p'' = \frac{b^4(x'^2e^2-a^4)}{a^4y'^2+b^4x'^2}$, oder, wenn man für $a^4y'^2$, in Folge der Gleichung der Curve, $\pm(a^4b^2-a^2b^2x'^2)$, und für e^2 ſeinen Werth $a^2 \mp b^2$ ſetzt,

$$p'p'' = \pm b^2$$

w. z. e. w.

§. 37.

Aufgabe [66]. Von irgend einem Punkte aus ſind zwei Tangenten an eine Ellipſe oder Hyperbel, und zwei Gerade nach den Brennpunkten gezogen. Es ſoll 1) das Verhältniß der Winkel, welche dieſe Geraden mit den Tangenten bilden, und 2) das Verhältniß der Winkel, welche eine dieſer Geraden mit zwei, von dem Brennpunkte nach den Berührungspunkten gezogenen, Leitſtrahlen machen, gefunden werden.

Es ſey

$$a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2$$

die Gleichung einer auf ihre Achſen bezogenen Ellipſe. Bezeichnet man die Coordinaten der Berührungspunkte zweier Tangenten durch x', y' und x'', y'', ſo ſind die Gleichungen dieſer Tangenten (§. 35. S. 7)

$$a^2y'y+b^2x'x = a^2b^2 \quad (1) \quad \text{und} \quad a^2y''y+b^2x''x = a^2b^2 . \quad (2)$$

Die Gleichungen zweier Geraden, welche durch den Durchſchnittspunkt dieſer Tangenten gehen, ſind (§. 9.)

$$a^2(y'+\lambda'y'')y+b^2(x'+\lambda'x'')x-(1+\lambda')a^2b^2 = 0 , \quad (3)$$
$$a^2(y''+\lambda''y')y+b^2(x''+\lambda''x')x-(1+\lambda'')a^2b^2 = 0 , \quad (4)$$

wo λ' und λ'' zwei noch unbeſtimmte Factoren bedeuten. Soll aber die erſte dieſer Geraden den Brennpunkt, deſſen Coordinaten $y=0$ und $x=e$, und die zweite den Brennpunkt, deſſen Coordinaten $y=0$ und $x=-e$ ſind, enthalten; ſo müſſen die Gleichungen (3) und (4) reſpective von dieſen Coordinaten befriedigt werden, ſo daß alſo

$(a^2-ex'')\lambda'+a^2-ex' = 0$ (5) und $(a^2+ex')\lambda''+a^2+ex'' = 0$. (6)

I. Bezeichnet man die Winkel, welche die Geraden (1) u. (3) und die Geraden (2) u. (4) einschließen, durch β' und β'', so findet sich aus den Gleichungen dieser Linien (§. 6. Aufg. 8.) §. 37.

$$tang\beta' = \frac{\lambda' a^2 b^2 (x'y'' - x''y')}{a^4(y'^2 + \lambda' y'y'') + b^4(x'^2 + \lambda' x'x'')} ,$$

$$tang\beta'' = \frac{\lambda'' a^2 b^2 (x'y'' - x''y')}{a^4(y''^2 + \lambda'' y'y'') + b^4(x''^2 + \lambda'' x'x'')} ,$$

folglich ist

$$\frac{tang\beta'}{tang\beta''} = \frac{\lambda'\{a^4(y''^2 + \lambda'' y'y'') + b^4(x''^2 + \lambda'' x'x'')\}}{\lambda''\{a^4(y'^2 + \lambda' y'y'') + b^4(x'^2 + \lambda' x'x'')\}} .$$

Da nun aber die Punkte $x'y'$ und $x''y''$ in der Ellipse liegen, so ist

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2 \quad \text{und} \quad a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2 ; \qquad (7)$$

und wenn man die Werthe von $a^2y'^2$ und $a^2y''^2$, welche sich hieraus ergeben, in den eben gefundenen Ausdruck setzt, so kommt, mit Rücksicht darauf, daß $a^2 - b^2 = e^2$ ist,

$$\frac{tang\beta'}{tang\beta''} = \frac{b^2\lambda'(a^4 - e^2x''^2) + \lambda'\lambda''(a^4y'y'' + b^4x'x'')}{b^2\lambda''(a^4 - e^2x'^2) + \lambda'\lambda''(a^4y'y'' + b^4x'x'')} .$$

Die Gleichungen (5) u. (6) geben aber die Relation

$$(a^4 - e^2x''^2)\lambda' = (a^4 - e^2x'^2)\lambda'' ,$$

und dadurch wird der Zähler des letzten Ausdrucks dem Nenner gleich, so daß also

$$\frac{tang\beta'}{tang\beta''} = 1 \quad \text{oder} \quad tang\beta' = tang\beta'', \text{ folglich } \beta' = \beta''$$

ist, welches auch immer die Berührungspunkte der Tangenten seyn mögen.

II. Die Gleichungen der beiden Leitstrahlen, welche von dem Brennpunkte, dessen Coordinaten $y = 0$ u. $x = e$, nach den Berührungspunkten $x'y'$ und $x''y''$ gezogen werden, sind (§. 4. Aufg. 6.)

$$y = \frac{y'}{x' - e}(x - e) \qquad (8) \qquad \text{und} \qquad y = \frac{y''}{x'' - e}(x - e) . \qquad (9)$$

Bezeichnet man nun die Winkel, welche die Geraden (3) und (8) und die Geraden (3) und (9) einschließen, durch γ' und γ'', so ist (§. 6. Aufg. 8.)

$$tang\gamma' = \frac{a^2y'^2 + b^2x'^2 - b^2ex' + \lambda'(a^2y'y'' + b^2x'x'' - b^2ex'')}{(a^2 - b^2)x'y' - a^2ey' + \lambda'(a^2x'y'' - b^2x''y' - a^2ey'')} ,$$

$$tang\gamma'' = \frac{a^2y'y'' + b^2x'x'' - b^2ex' + \lambda'(a^2y''^2 + b^2x''^2 - b^2ex'')}{-a^2x''y' + b^2x'y'' + a^2ey' - \lambda'([a^2 - b^2]y''x'' - a^2ey'')} ,$$

§. 37. oder, mit Rücksicht auf die Gleichungen (7) und darauf, daß $a^2 - b^2 = e^2$,

$$tang\gamma' = \frac{b^2(a^2 - ex') + \lambda'(a^2y'y'' + b^2x'x'' - b^2ex'')}{ey'(ex' - a^2) + \lambda'(a^2x'y'' - b^2x''y' - a^2ey'')},$$

$$tang\gamma'' = \frac{a^2y'y'' + b^2x'x'' - b^2ex' + \lambda'b^2(a^2 - ex'')}{-a^2x''y' + b^2x'y'' + a^2ey' + \lambda'ey''(a^2 - ex'')}.$$

Setzt man nun in den Ausdruck von $tang\gamma'$, zufolge der Gleichung (5), $-(a^2 - ex'')\lambda'$ statt $a^2 - ex'$, und in den Ausdruck von $tang\gamma''$, zufolge derselben Gleichung, $-(a^2 - ex')$ statt $(a^2 - ex'')\lambda'$, so kommt, immer mit Rücksicht auf die vorher erwähnten Gleichungen,

$$tang\gamma' = \frac{a^2y'y'' + b^2x'x'' - a^2b^2}{a^2[x'y'' - x''y' + e(y' - y'')]} \text{ und } tang\gamma'' = \frac{a^2y'y'' + b^2x'x'' - a^2b^2}{a^2[x'y'' - x''y' + e(y' - y'')]},$$

und also ist $tang\gamma' = tang\gamma''$, folglich auch $\gamma' = \gamma''$.

Zu einem gleichen Resultate würde man auch gelangt seyn, wenn man statt der Winkel zwischen den Geraden (3) u. (8) und (3) u. (9) diejenigen zwischen den Linien (4) u. (8) und (4) u. (9) in Rechnung gebracht hätte.

Für die Hyperbel darf die Rechnung nicht von Neuem angefangen werden, da es hinreicht, überall b^2 mit $-b^2$ zu vertauschen. Das Ergebniß ist also für diese Curve das nämliche.

Die Sätze, welche in den Resultaten dieser Lösung enthalten sind, lauten folgendermaßen.

I. Von den beiden geraden Linien, welche den Durchschnittspunkt zweier Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel mit den Brennpunkten verbinden, macht die eine mit der einen Tangente einen eben so großen Winkel als die andere mit der andern Tangente.

II. Die geraden Linien, welche von einem Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel nach den Berührungspunkten zweier Tangenten gezogen werden, bilden mit der, von demselben Brennpunkte nach dem Durchschnittspunkte dieser Tangenten gezogenen, Geraden gleiche Winkel.

Aus dem ersten Satze folgt als Corollar (wenn man nämlich von den beiden Tangenten die eine sich an der Curve so lange fortbewegen läßt, bis sie mit der andern zusammen fällt, wobei denn die beiden Berührungspunkte

mit dem Durchschnittspunkte der Tangenten zusammenfallend gedacht werden müssen) der bekannte Satz: §. 37.

In einer Ellipse (oder Hyperbel) bilden die, von den Brennpunkten nach dem Berührungspunkte einer Tangente gezogenen Leitstrahlen (oder deren Verlängerungen) mit der Tangente und Normale gleiche Winkel.

Aufgabe [67]. Von irgend einem Punkte aus sind zwei Tangenten an eine Parabel, eine Gerade nach dem Brennpunkte und ein Durchmesser dieser Curve gezogen. Es soll, 1) das Verhältniß der Winkel, welche die nach dem Brennpunkte gezogene Gerade und der genannte Durchmesser mit den Tangenten bilden, und 2) das Verhältniß der Winkel, welche diese Gerade mit den, vom Brennpunkte nach den Berührungspunkten gezogenen, Leitstrahlen macht, gefunden werden.

Es sey die, auf die Achse der Parabel bezogene, Gleichung dieser Curve in rechtwinkligen Coordinaten

$$y^2 = px .$$

Bezeichnet man die Coordinaten der Berührungspunkte zweier Tangenten durch x', y' und x'', y'', so sind die Gleichungen dieser Tangenten (§. 35. G. 6)

$$2y'y - px - px' = 0 \quad (10) \quad \text{und} \quad 2y''y - px - px'' = 0 . \quad (11)$$

Die Gleichung einer Geraden, welche durch den Durchschnitt dieser Tangenten geht, ist (§. 9.)

$$2(y' + \lambda y'')y - p(1+\lambda)x - p(x' + \lambda x'') = 0 , \quad (12)$$

wo λ einen noch unbestimmten Factor bedeutet. Soll aber diese Gerade auch durch den Brennpunkt, dessen Coordinaten $y = 0$ und $x = \frac{1}{4}p$, gehen, so muß

$$\tfrac{1}{4}(1+\lambda)p + (x' + \lambda x'') = 0 \quad \text{oder} \quad (p + 4x'')\lambda + p + 4x' = 0 \quad (13)$$

seyn.

I. Bezeichnet man den Winkel, welchen die Geraden (10) und (12) einschließen, durch β', und denjenigen, welchen die Gerade (11) mit dem genannten Durchmesser oder, was dasselbe ist, mit der Achse der Parabel bildet, durch β'', so findet sich (§. 6. Aufg. 8.)

$$tang\beta' = \frac{2\lambda p(y' - y'')}{4y'^2 + p^2 + \lambda(4y'y'' + p^2)} \quad \text{und} \quad tang\beta'' = \frac{p}{2y''} .$$

Da nun aber, weil $x'y'$ ein Punkt der Parabel ist, $y'^2 = px'$, so verwan-

§. 37. delt ſich der erſte Ausdruck in $tang\beta' = \frac{2\lambda p(y'-y'')}{p(4x'+p)+\lambda(4y'y''+p^2)}$, oder, wenn man für λ den Werth aus (13) ſetzt, in $tang\beta' = \frac{p}{2y''}$. Es iſt alſo

$$tang\beta' = tang\beta'', \text{ folglich } \beta' = \beta'',$$

welches auch immer die Berührungspunkte ſeyn mögen.

II. Die Gleichungen der beiden Leitſtrahlen, welche von dem Brennpunkte nach den Berührungspunkten $x'y'$, $x''y''$ gezogen werden, ſind (§. 4. Aufg. 6.)

$$y = \frac{4y'}{4x'-p}(x-\tfrac{1}{4}p) \quad (14) \quad \text{und} \quad y = \frac{4y''}{4x''-p}(x-\tfrac{1}{4}p). \quad (15)$$

Bezeichnet man die Winkel, welche von den Geraden (12) u. (14) und von den Geraden (12) u. (15) gebildet werden, durch γ' und γ'', ſo iſt, mit Rückſicht auf die Gleichungen $y'^2 = px'^2$ und $y''^2 = px''^2$ (§. 6. Aufg. 8.),

$$tang\gamma' = \frac{p(p+4x')+\lambda[8y'y''+p(p-4x')]}{2y'(p+4x')+\lambda[4py'-2y''(p-4x')]},$$

$$tang\gamma'' = \frac{8y'y''+p(p-4x'')+\lambda p(p+4x'')}{2y'(p-4x'')-4py''-2\lambda y''(p+4x'')}.$$

Setzt man nun in den Ausdruck von $tang\gamma'$, zufolge der Gleichung (13), $-(p+4x'')\lambda$ ſtatt $p+4x'$, und in den von $tang\gamma''$, zufolge derſelben Gleichung, $-(p+4x')$ ſtatt $(p+4x'')\lambda$, ſo kommt

$$tang\gamma' = \frac{4y'y''-2p(x'+x'')}{4(x''y'-x'y'')+p(y''-y')} \text{ und } tang\gamma'' = \frac{4y'y''-2p(x'+x'')}{4(x''y'-x'y'')+p(y''-y')},$$

und alſo iſt $tang\gamma' = tang\gamma''$, folglich $\gamma' = \gamma''$.

Aus dieſer Löſung ergiebt ſich demnach:

I. Die Gerade, welche von dem Durchſchnittspunkte zweier Tangenten nach dem Brennpunkte der Parabel gezogen wird, bildet mit einer dieſer Tangenten einen eben ſo großen Winkel als der Durchmeſſer mit der andern Tangente.

II. Die Gerade, welche von dem Brennpunkte der Parabel nach dem Durchſchnittspunkte zweier Tangenten gezogen wird, halbirt den Winkel, welchen die beiden, vom Brennpunkte nach den Berührungspunkten gezogenen, Leitſtrahlen einſchließen.

Und als Corollar: §. 37.

Der durch den Berührungspunkt der Tangente einer Parabel nach dem Brennpunkt gezogene Leitstrahl und eine durch den Berührungspunkt der Achse parallel laufende Gerade bilden mit der Tangente und Normale gleiche Winkel.

Es läßt sich eine Menge anderer Sätze aus den in diesem §. gewonnenen ableiten, worauf wir hier nicht eingehen können, und nur als Beispiel das Folgende anführen.

Es seyen b, c, d die Berührungspunkte von drei, an einer Linie zweiten Grades gelegten, Tangenten, die sich in den Punkten g, h, k schneiden, und es sey F ein Brennpunkt der Curve. Dann ist, nach den aufgeführten Sätzen, Winkel $dFh = \frac{1}{2}dFc$ und $dFg = \frac{1}{2}dFb$, folglich $dFh + dFg = \frac{1}{2}(dFc + dFb)$ oder $hFg = \frac{1}{2}bFc$. Läßt man nun den Berührungspunkt d sich auf der Curve fortbewegen, während die Berührungspunkte b und c fest bleiben, so verändert sich die Lage der Berührungslinie in d, folglich auch die Lage der Durchschnitte h, g; der Winkel bFc aber bleibt ungeändert, und da nun dennoch immer $hFg = \frac{1}{2}bFc$ ist, so folgt: Fig. 25.

Nimmt man dasjenige Stück einer Tangente an einer Linie zweiten Grades, welches von zwei andern Tangenten begrenzt wird, zur Grundlinie und einen Brennpunkt der Curve zum Scheitel eines Dreiecks, so ist der Winkel am Scheitel immer derselbe, wie auch die erste Tangente gezogen seyn mag, wenn nur die beiden andern Tangenten nicht geändert werden.

Es sey ferner durch einen Brennpunkt einer Linie zweiten Grades eine Sehne, und es seyen in den Endpunkten derselben Tangenten an die Curve gelegt, welche sich auf der Directrix der Curve schneiden müssen (§. 35. Lehrs. 18.). Zieht man nun von dem Durchschnittspunkte der beiden Tangenten nach demselben Brennpunkte eine Gerade, so wird sie mit den beiden, nach den Berührungspunkten gezogenen, Leitstrahlen gleiche Winkel machen, also, da diese eine gerade Linie (die gezogene Sehne) bilden, senkrecht auf der Sehne stehen. Da ferner der, auf der Directrix befindliche, Durchschnittspunkt der beiden Tangenten der Pol der Berührungssehne ist, so wird auch die Polare irgend eines Punktes dieser Sehne durch denselben Punkt der Directrix gehen. Faßt man diese Resultate, die offenbar auch in der Umkehrung wahr sind, zusammen, so folgt:

§. 37. **Wenn man von einem beliebigen Punkte p nach einem Brennpunkte einer Linie zweiten Grades eine Gerade zieht, und auf derselben in demselben Brennpunkte eine Senkrechte errichtet, so schneidet diese die Polare des Punktes p auf der Directrix der Curve.**

Es verursacht keinen großen Aufwand von Rechnung, wenn man diesen letzten Satz analytisch erweisen will. Denn wenn ein Brennpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten, und die durch ihn gezogene Achse der Curve zur Abscissenachse genommen wird, so ist die Gleichung dieser Curve in rechtwinkligen Coordinaten (§. 33. S. 3.)

$$n^2y^2+(n^2-1)x^2-2qx-q^2=0\ ,$$

wo $-q$ die Abscisse des Punktes ist, in welchem die Directrix die Abscissenachse schneidet. Sind nun x', y' die Coordinaten eines beliebigen Punktes p, so ist die Gleichung seiner Polarlinie, wie man aus der Gleichung (9) des §. 35. leicht findet,

$$n^2y'y+n^2x'x-(x'+q)(x+q)=0\ .$$

Die Gleichung der, durch den Brennpunkt (Anfangspunkt der Coordinaten) und den Punkt $x'y'$ gehenden, Geraden aber ist $x'y=y'x$, und folglich diejenige der Senkrechten im Brennpunkte

$$y'y+x'x=0\ ,$$

und um den Durchschnittspunkt dieser Linie und der Polarlinie zu finden, müßte man x u. y aus den beiden Gleichungen dieser Geraden entwickeln. Es reducirt sich aber die erste Gleichung vermittelst der letzten auf

$$x+q=0\ ,$$

welches die Gleichung der Directrix ist (§. 33.), und es schneiden sich daher beide Geraden auf dieser Linie.

§. 38.

Aufgabe [68]. Die Schenkel eines Winkels von gegebener Größe berühren eine gegebene Linie zweiten Grades. Es soll der Ort des Scheitels gefunden werden.

Welches auch die gegebene Linie zweiten Grades seyn mag, so kann ihre Gleichung, wenn man eine Achse der Curve zur Abscissenachse, und deren Durchschnitt mit der Curve zum Anfangspunkte der Coordinaten annimmt, immer in rechtwinkligen Coordinaten durch die Gleichung (§. 30.

S. 2) $Ry^2+Sx^2+Tx=0$, oder, wenn man durch R dividirt und $\frac{S}{R}=m$, $\frac{T}{R}=2n$ setzt, durch §. 38.

$$y^2+mx^2+2nx=0 \qquad (1)$$

dargestellt werden. Es sey δ der gegebene Winkel.

Soll nun eine Gerade, deren Gleichung

$$y=ax+b \qquad (2)$$

ist, die Curve (1) berühren, so muß die Gleichung

$$(m+a^2)x^2+2(n+ab)x+b^2=0,$$

welche das Resultat der Elimination von y zwischen den Gleichungen (1) und (2) ist, zwei gleiche Wurzeln haben (§. 35.). Damit dies Statt finde, muß bekanntermaßen

$$(n+ab)^2-b^2(m+a^2)=0 \qquad (3)$$

seyn. Man hat daher $mb^2-2nab+n^2=0$ als Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten a und b der Gleichung $y=ax+b$, wenn diese eine Tangente der Curve (1) ausdrücken soll *).

Sind demnach

$$y=ax+b \quad (2) \quad \text{und} \quad y=a'x+b' \quad (4)$$

die Gleichungen der beiden, die Curve berührenden Schenkel des gegebenen Winkels, so hat man die Bedingungsgleichungen

$$mb^2-2nab+n^2=0 \quad (5) \; ; \; mb'^2-2na'b'+n^2=0, \quad (6)$$

und außerdem (§. 6. Aufg. 8.)

---

*) Man kann zu derselben Bedingungsgleichung (3) auch auf folgende Weise gelangen. Sind nämlich x', y' die Coordinaten des Berührungspunktes, so ist die Gleichung der Tangente, wie man aus der allgemeinen Gleichung der Berührungslinie (§. 35. S. 5) findet, wenn man sie für den gegenwärtigen Fall particularisirt,

$$y'y+(mx'+n)x+nx'=0,$$

und soll diese Gleichung mit der Gleichung (2) identisch seyn, so muß

$$-\frac{mx'+n}{y'}=a \quad \text{und} \quad -\frac{nx'}{y'}=b$$

seyn. Da nun aber der Berührungspunkt $x'y'$ ein Punkt der Geraden (2) seyn soll, so hat man auch

$$y'=ax'+b';$$

und durch Elimination von x' u. y' zwischen den drei zuletzt genannten Gleichungen ergiebt sich die obige Bedingungsgleichung (3).

§. 38.

$$tang\delta = \frac{a'-a}{1+aa'} . \qquad (7)$$

Eliminirt man b und b' zwiſchen den Gleichungen (2) u. (5), (4) u. (6), ſo erhält man

$$\left.\begin{aligned}(mx^2+2nx)a^2-2(mxy+ny)a+my^2-n^2 &= 0 ,\\ (mx^2+2nx)a'^2-2(mxy+ny)a'+my^2-n^2 &= 0 ,\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

zwei Gleichungen, welche für a und a' dieſelben Ausdrücke geben. Da nun aber a' nicht gleich a ſeyn kann, wenn die Geraden (2) und (4) nicht parallel ſind, wie vorausgeſetzt wird, oder, mit andern Worten, wenn δ in der Gleichung (7) nicht 0 oder π iſt; ſo muß, wenn die eine der beiden Wurzeln der Gleichungen (8) für a genommen wird, die andere für a' genommen werden. Dieſe Gleichungen geben nun für das Product und das Quadrat der Differenz beider Wurzeln a u. a', nach bekannten Regeln,

$$aa' = \frac{my^2-n^2}{mx^2+2nx} \quad \text{und} \quad (a'-a)^2 = \frac{4n^2(y^2+mx^2+2nx)}{(mx^2+2nx)^2} ,$$

und wenn man dieſe Ausdrücke in die Gleichung (7), oder in die aus ihr hervorgehende Gleichung

$$(a'-a)^2 = tang^2\delta(1+aa')^2$$

ſetzt, ſo kommt

$$4n^2(y^2+mx^2+2nx) = tang^2\delta\{m(y^2+x^2)+2nx-n^2\}^2 , \qquad (9)$$

welches die Gleichung des geſuchten Ortes iſt.

Wir ordnen dieſe Gleichung nach y, ſetzen $\frac{sin\delta}{cos\delta}$ für $tang\delta$ und zur Abkürzung $sin\delta = p$, $cos\delta = q$; alsdann haben wir

$$\begin{aligned}m^2p^2y^4+2\{mp^2(mx^2+2nx-n^2)-2n^2q^2\}y^2 \\ +p^2(mx^2+2nx-n^2)^2-4n^2q^2(mx^2+2nx) = 0 ,\end{aligned} \qquad (10)$$

eine Gleichung, die, wie man ſieht, im Allgemeinen vom vierten Grade iſt. Es muß nun unterſucht werden, ob und wann dieſe Gleichung zwei Linien zweiten Grades ausdrückt. Dies wird offenbar der Fall ſeyn, wenn ſich ihr erſter Theil in zwei Factoren vom zweiten Grade zerlegen läßt, die in Beziehung auf x und y rational ſind. Bezeichnet man nun die Coefficienten von y und das von y unabhängige Glied der Reihe nach durch A, 2B und C, ſo iſt

$$Ay^4+2By^2+C = 0 ,$$

und dieſe Gleichung kann bekanntermaßen wie folgt

$$A\left\{y^2+\frac{B}{A}+\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A}\right\}\cdot\left\{y^2+\frac{B}{A}-\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A}\right\}=0$$ §. 38.

zerlegt werden. Sollen aber diese Factoren auch in Beziehung auf x rational seyn, so muß B^2-AC ein vollständiges Quadrat seyn, und setzt man an die Stelle von A, B, C die durch sie vertretenen Ausdrücke, so hat man daher als Bedingung, daß sich die Gleichung (10) in zwei rationale Gleichungen vom zweiten Grade zerlegen lasse, wiederum die Bedingung, daß der Ausdruck

$$4n^2q^2\{m^2p^2(m-1)x^2+2mnp^2(m-1)x+mn^2p^2+n^2q^2\}$$

ein vollständiges Quadrat sey. Diese Bedingung besteht aber, wie bekannt, darin, daß

entweder $n^2q^2=0$,

oder $m^2n^2p^4(m-1)^2-m^2n^2p^2(m-1)(mp^2+q^2)=0$

sey; und daher müssen die Größen m, n, p, q so beschaffen seyn, daß eine von diesen letzten Gleichungen befriedigt wird, wenn die erwähnte Zerlegung möglich seyn soll. Die erste dieser Gleichungen wird aber nur befriedigt, wenn $n=0$ oder wenn $q=0$ ist, und die zweite Gleichung, welche auch $m^2n^2p^2(1-m)(p^2+q^2)=0$ oder, weil $p^2+q^2=sin^2\delta+cos^2\delta=1$, $m^2n^2p^2(1-m)=0$ geschrieben werden kann, wird befriedigt, wenn $m=0$, oder $m=1$, oder $n=0$, oder $p=0$ ist. Es ist demnach die erwähnte Zerlegung nur möglich, wenn eine der folgenden Bedingungen

1) $n=0$; 2) $p=0$; 3) $m=1$; 4) $m=0$; 5) $q=0$

erfüllt wird.

Daß die erste Bedingung erfüllt werde, daß nämlich $n=0$ sey, ist gegen die Voraussetzung einer gegebenen Curve; denn wenn $n=0$ wäre, würde die Gleichung (1), je nachdem m positiv oder negativ wäre, entweder einen Punkt oder zwei Gerade ausdrücken. Die zweite Bedingung, $p=sin\delta=0$, giebt $tang\delta=0$ und reducirt die Gleichung (9) des gesuchten Ortes auf die Gleichung (1) der gegebenen Curve, wie dies auch nicht anders seyn kann, weil für $sin\delta=0$ entweder $\delta=0$ oder $\delta=\pi$ wäre, in beiden Fällen aber die Schenkel des Winkels nur eine gerade Linie bilden würden.

Die dritte Bedingnng, $m=1$, wird offenbar nur erfüllt, wenn die gegebene Curve (1) ein Kreis ist; dann läßt sich die Gleichung (10), wenn man auf die Relation $p^2+q^2=1$ Rücksicht nimmt, wie folgt

§. 38. $$p^2\left\{y^2+x^2+2nx-\frac{(1+q)^2}{p^2}n^2\right\}.\left\{y^2+x^2+2nx-\frac{(1-q)^2}{p^2}n^2\right\}=0 \quad (11)$$

zerlegen, und drückt daher zwei, dem gegebenen concentrische, Kreise aus. Der erste Factor, gleich Null gesetzt, giebt den Ort des Scheitels, wenn die Schenkel des Winkels δ den gegebenen Kreis berühren; der zweite Factor, gleich Null gesetzt, giebt den Ort des Scheitels, wenn ein Schenkel und die Verlängerung des andern den gegebenen Kreis berühren.

Wenn die vierte Bedingung, $m = 0$, erfüllt wird, so ist die gegebene Curve (1) eine Parabel. Die Gleichung (10) geht dann in

$$4q^2y^2-4p^2x^2+4(p^2+2q^2)nx-p^2n^2 = 0 \quad (12)$$

über, welches die Gleichung einer Hyperbel ist (§. 29.). Transformirt man sie, indem man den Mittelpunkt zum Anfangspunkte nimmt, und setzt für p und q wieder $\sin\delta$ und $\cos\delta$, so kommt

$$\cos^2\delta \cdot y^2-\sin^2\delta \cdot x^2+\cot^2\delta \cdot n^2 = 0 ,$$

und man sieht, daß der Asymptotenwinkel dieser Hyperbel gleich 2δ ist. Transformirt man aber sowohl die Gleichung der gegebenen Curve (1), welche für den jetzt in Rede stehenden Fall $y^2+2nx = 0$ ist, als die Gleichung (12), indem man den Brennpunkt der Parabel zum Anfangspunkte der Coordinaten macht, und also $x-\frac{1}{2}n$ statt x setzt, so ist die Gleichung der Parabel

$$(y+x)^2 = (x-n)^2 ,$$

und die Gleichung der Hyperbel

$$q^2(y+x)^2 = (x-n)^2 . \quad (13)$$

Daraus sieht man, daß ein Brennpunkt und eine Directrix der Hyperbel mit dem Brennpunkte und der Directrix der Parabel zusammen fallen (§. 33.). Ist außer $m = 0$ auch $q = 0$, d. h. ist die gegebene Curve (1) eine Parabel und der Winkel $\delta = \frac{1}{2}\pi$, so geht die Gleichung (13) der Hyperbel in $x-n = 0$ über, und es ist also dann die Directrix der Parabel der Ort des Scheitels.

Wird bloß die fünfte Bedingung, $q = 0$, erfüllt, so ist $\cos\delta = 0$, der Winkel δ also ein rechter, und die Gleichung (9 od. 10) geht in

$$\{m(y^2+x^2)+2nx-n^2\}^2 = 0 \quad (14)$$

über, so daß sie zwei congruente Kreise ausdrückt. Transformirt man die Gleichung der Curve (2) und die Gleichung des eben gefundenen Kreises, indem man in beide $x-\frac{n}{m}$ statt x setzt, so ist

die

§. 38.

die Gleichung der gegebenen Curve $y^2+mx^2-\frac{n^2}{m}=0$, (15)

die Gleichung des gefundenen Kreises $y^2+x^2-\frac{1+m}{m^2}n^2=0$, (16)

und also sind beide Linien durch dieselbe Transformation auf ihren Mittelpunkt gebracht, woraus sich ergiebt, daß die gegebene Curve und der Ort des Scheitels concentrisch sind. Die Quadrate der beiden halben Achsen der Curve (1) sind, wie man aus der vorletzten Gleichung sieht, durch $\frac{n^2}{m}$ und $\frac{n^2}{m^2}$, und die Summe dieser Quadrate also durch $\frac{1+m}{m^2}n^2$ ausgedrückt; dieser Ausdruck ist aber zufolge der letzten Gleichung auch der, welcher die Länge des Radius des gefundenen Kreises angiebt. In dem besondern Falle, in welchem $m=-1$, drückt die Gleichung (1) eine gleichseitige Hyperbel, die Gleichung (16) aber einen Kreis, dessen Radius gleich Null, oder einen Punkt aus, den Mittelpunkt der Hyperbel nämlich. Ist $m<-1$, drückt also die Gleichung (1) eine Hyperbel aus, deren Asymptotenwinkel größer als ein rechter ist, so wird der Kreis (16) imaginär, und in der That läßt sich einer solchen Hyperbel kein rechter Winkel umschreiben.

Fassen wir alle diese Resultate zusammen:

1) Der Ort des Scheitels eines Winkels von gegebener Größe, der einer gegebenen Linie zweiten Grades umschrieben ist, ist im Allgemeinen keine Linie zweiten Grades.
2) Ist aber die gegebene Curve ein Kreis, so ist der Ort des Scheitels ebenfalls ein Kreis.
3) Ist die gegebene Curve eine Parabel, so ist der Ort des Scheitels eine Hyperbel, die einen Brennpunkt und eine Directrix mit der Parabel gemein hat.
4) Ist die gegebene Curve irgend eine Linie zweiten Grades, der umschriebene Winkel aber ein rechter, so ist der Ort des Scheitels ein, der gegebenen Curve concentrischer Kreis, und das Quadrat des Radius dieses Kreises ist der Summe der Quadrate der halben Achsen der gegebenen Curve gleich. Dieser Kreis degenerirt in eine Gerade, wenn die gegebene Curve eine Parabel, in einen Punkt, wenn sie eine gleichseitige Hyperbel ist. Er hört auf zu existiren, wenn die gegebene Curve eine Hyperbel wäre, deren Asymptotenwinkel stumpf ist.

§. 39.

§. 39.

Lehrsatz [21]. Es seyen m Gerade $G_1, G_2, \ldots G_m$ und eine Linie zweiten Grades C gegeben. An dieser Curve sey beliebig eine Tangente T_1 gelegt, welche die Gerade G_1 in einem Punkte p_1 schneiden wird; von p_1 aus sey wieder eine Tangente T_2 gezogen, welche die Gerade G_2 in einem Punkte p_2 schneidet; von p_2 aus sey abermals eine Tangente T_3 gezogen, welche auf G_3 den Punkt p_3 bestimmt, und so fort, bis man zu einem Punkte p_m auf G_m gelangt, von welchem aus eine letzte Tangente T_{m+1} an die Curve gelegt sey. Dieselbe Construction sey noch einmal gemacht, aber mit einer andern beliebigen Tangente t_1 angefangen, wodurch eine andere letzte Tangente t_{m+1} entstehen wird. Verbindet man nun den Durchschnittspunkt P_1 der Tangenten T_1 und t_{m+1} mit dem Durchschnittspunkte P_2 der Tangenten t_1 und T_{m+1} durch eine Gerade P_1P_2, so geht diese Verbindungslinie P_1P_2 immer durch einen und denselben Punkt P, wie auch die ersten Tangenten T_1, t_1 gezogen seyn mögen.

Um diesen Satz direct zu erweisen, verfahren wir folgendermaßen.

Es seyen die Coordinaten so gewählt, daß die Gleichung der gegebenen Curve durch

$$y^2+px^2+2qx = 0$$

ausgedrückt werde; und in Beziehung auf dasselbe Coordinatensystem seyen

$$y = h_1x+k_1 \;;\; y = h_2x+k_2 \;;\; \ldots . y = h_mx+k_m$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden $G_1, G_2, \ldots G_m$.

Sollen nun

$$y = a_1x+b_1 \;;\; y = a_2x+b_2 \;;\; \ldots . . y = a_{m+1}x+b_{m+1}$$

die Gleichungen der Geraden $T_1, T_2, \ldots T_{m+1}$ seyn, so müssen die Constanten derselben gewisse Bedingungen erfüllen, die sich auf folgende Weise ergeben. Da sich nämlich diese Geraden auf den gegebenen schneiden sollen, so muß es möglich seyn, m Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ so zu bestimmen, daß die m Gleichungen

$$(y-a_2x-b_2)+\lambda_1(y-a_1x-b_1)=0 \;;\; (y-a_3x-b_3)+\lambda_2(y-a_2x-b_2)=0 \;;\; \ldots .$$
$$\ldots .(y-a_{m+1}x-b_{m+1})+\lambda_m(y-a_mx-b_m) = 0$$

den Gleichungen der Geraden $G_1, G_2, \ldots G_m$ identisch werden (§. 9.). Dies führt zu folgenden Gleichungen:

§. 39.

$$\frac{a_2+\lambda_1 a_1}{1+\lambda_1} = h_1 \; ; \; \frac{a_3+\lambda_2 a_2}{1+\lambda_2} = h_2 \; ; \; \ldots \frac{a_{m+1}+\lambda_m a_m}{1+\lambda_m} = h_m ,$$

$$\frac{b_2+\lambda_1 b_1}{1+\lambda_1} = k_1 \; ; \; \frac{b_3+\lambda_2 b_2}{1+\lambda_2} = k_2 \; ; \; \ldots \frac{b_{m+1}+\lambda_m b_m}{1+\lambda_m} = k_m ,$$

aus welchen sich, durch Elimination von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, die folgenden Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} h_1(b_2 - b_1) - k_1(a_2 - a_1) + a_2 b_1 - a_1 b_2 &= 0 , \\ h_2(b_3 - b_2) - k_2(a_3 - a_2) + a_3 b_2 - a_2 b_3 &= 0 , \\ &\vdots \\ h_m(b_{m+1} - b_m) - k_m(a_{m+1} - a_m) + a_{m+1} b_m - a_m b_{m+1} &= 0 \end{aligned}$$

ergeben. Da ferner dieselben Geraden $T_1, T_2, \ldots T_m$ die Curve C berühren sollen, so müssen diejenigen Gleichungen, welche durch Elimination von y zwischen ihren Gleichungen und der Gleichung der Curve hervorgehen, gleiche Wurzeln haben (§. 35.). Dies giebt, wenn man, der Kürze wegen, $\frac{p}{2q} = f$ und $-\frac{1}{2}q = g$ setzt, die Bedingungsgleichungen

$$a_1 = f b_1 + \frac{g}{b_1} \; ; \; a_2 = f b_2 + \frac{g}{b_2} \; ; \; \ldots a_{m+1} = f b_{m+1} + \frac{g}{b_{m+1}} .$$

Eliminirt man nun $a_1, a_2, \ldots a_{m+1}$ zwischen diesen letztern und den zuerst gefundenen Bedingungsgleichungen, so kommt, wenn man zur Abkürzung $\frac{h_1 - f k_1}{g} = A_1 \; ; \; \frac{h_2 - f k_2}{g} = A_2$, u. s. w. setzt,

$$b_2 = \frac{b_1 - k_1}{A_1 b_1 + 1} \; ; \; b_3 = \frac{b_2 - k_2}{A_2 b_2 + 1} \; ; \; \ldots b_{m+1} = \frac{b_m - k_m}{A_m b_m + 1} .$$

Substituirt man jetzt den Ausdruck von b_2 in den von b_3, das hieraus sich ergebende Resultat in den von b_4 u. s. f.; so wird man b_{m+1} durch b_1 ausgedrückt haben, und zwar, wie man leicht findet, unter der Form $\frac{c + c_1 b_1}{c_2 + b_1}$, wo c, c_1 u. c_2 Größen bedeuten, welche nur von den, in den Gleichungen der Geraden $G_1, G_2, \ldots G_m$ und der Curve C vorkommenden, Constanten abhangen, so daß also $b_{m+1} = \frac{c + c_1 b_1}{c_2 + b_1}$ oder

§. 39. $$b_1 b_{m+1} = c_1 b_1 - c_n b_{m+1} + c$$

ist. Hieraus ergiebt sich nun, indem wir jetzt, größerer Leichtigkeit wegen, $m+1$ durch n bezeichnen, daß die Gleichungen der ersten und letzten Tangente T_1 und T_{m+1} (oder T_n), nämlich

$$y = a_1 x + b_1 \quad \text{und} \quad y = a_n x + b_n$$

durch folgende Bedingungsgleichungen

$$a_1 = f b_1 + \frac{g}{b_1} \; ; \; a_n = f b_n + \frac{g}{b_n} \; ; \; b_1 b_n = c_1 b_1 - c_n b_n + c$$

mit einander verbunden sind.

Wenn man nun die Gleichungen der Tangenten t_1 und t_{m+1} (oder t_n) durch

$$y = \alpha_1 x + \beta_1 \quad \text{und} \quad y = \alpha_n x + \beta_n$$

bezeichnet, so sind diese, aus gleichen Gründen, durch die Bedingungsgleichungen

$$\alpha_1 = f\beta_1 + \frac{g}{\beta_1} \; ; \; \alpha_n = f\beta_n + \frac{g}{\beta_n} \; ; \; \beta_1 \beta_n = c_1 \beta_1 - c_n \beta_n + c$$

mit einander verbunden.

Aus den so eben genannten Gleichungen der Geraden T_1 und t_n findet man die Coordinaten $x'y'$ des Durchschnitts P_1 (§. 6. Aufg. 8.)

$$x' = \frac{b_1 - \beta_n}{\alpha_n - a_1} \; ; \; y' = \frac{\alpha_n b_1 - a_1 \beta_n}{\alpha_n - a_1},$$

und aus den Gleichungen der Geraden t_1 und T_n die Coordinaten $x''y''$ des Durchschnitts P_2

$$x'' = \frac{\beta_1 - b_n}{a_n - \alpha_1} \; ; \; y'' = \frac{a_n \beta_1 - \alpha_1 b_n}{a_n - \alpha_1},$$

oder, wenn man für a_1, a_n, α_1 und α_n ihre Werthe aus den Bedingungsgleichungen substituirt,

$$x' = \frac{\beta_n b_1}{g - f\beta_n b_1} \; ; \; y' = \frac{g(b_1 + \beta_n)}{g - f\beta_n b_1} \; ; \; x'' = \frac{b_n \beta_1}{g - f b_n \beta_1} \; ; \; y'' = \frac{g(\beta_1 + b_n)}{g - f b_n \beta_1}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$b_n \beta_1 - \beta_n b_1 = U \; ; \; (b_n + \beta_1) - (\beta_n + b_1) = V \; ; \; b_1 b_n (\beta_n - \beta_1) - \beta_1 \beta_n (b_n - b_1) = W \; ;$$

$$\frac{1}{g}(g - f\beta_n b_1)(g - f b_n \beta_1) = N,$$

so ist §. 39.

$$x''-x' = \frac{U}{N} \quad ; \quad y''-y' = \frac{gV-fW}{N} \quad ; \quad x'y''-x''y' = \frac{W}{N} .$$

Da aber, zufolge der obigen Bedingungsgleichungen, $b_1b_n = c_1b_1 - c_nb_n + c$ und $\beta_1\beta_n = c_1\beta_1 - c_n\beta_n + c$ ist, so hat man durch Substitution dieser Ausdrücke in den von W,

$$W = (c_n - c_1)(b_n\beta_1 - \beta_nb_1) - c\{(b_n+\beta_1)-(\beta_n+b_1)\} ,$$

folglich

$$W = (c_n - c_1)U - cV ,$$

und demnach

$$x''-x' = \frac{U}{N} \; ; \; y''-y' = \frac{(g+cf)V-(c_n-c_1)fU}{N} \; ; \; x'y''-x''y' = \frac{(c_n-c_1)U-cV}{N} .$$

Die Gleichung der Geraden P_1P_2 ist (§. 4. S. 11.)

$$(x''-x')y-(y''-y')x+x'y''-x''y' = 0 ,$$

oder, durch Substitution der eben gefundenen Ausdrücke,

$$Uy-\{(g+cf)V-(c_n-c_1)fU\}x+(c_n-c_1)U-cV = 0 ,$$

oder auch

$$U[y+(c_n-c_1)fx+c_n-c_1] = V[(g+cf)x+c] ,$$

und diese Gleichung wird, wie man sieht, von denjenigen Werthen von x und y befriedigt, welche zu gleicher Zeit den beiden Gleichungen

$$y+(c_n-c_1)fx+c_n-c_1 = 0 \quad \text{und} \quad (g+cf)x+c = 0$$

genugthun. Die Gerade P_1P_2 geht mithin durch den Durchschnitt der beiden Geraden, welche durch diese letztern Gleichungen ausgedrückt werden. Diese Gleichungen enthalten aber die Größen $a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1$ nicht, sondern einzig und allein die Constanten der gegebenen Geraden $G_1 \ldots G_n$ und diejenigen der Curve C. Die beiden Geraden, die sie ausdrücken, sind also immer dieselben, wie auch die ersten Tangenten T_1, t_1 gezogen seyn mögen. Es ist folglich ihr Durchschnitt P ein von der Lage dieser Tangenten unabhängiger Punkt, und es geht also die Gerade P_1P_2 immer durch einen und denselben Punkt P, wie auch die ersten Tangenten T_1 u. t_1 gezogen seyn mögen.

Der so eben bewiesene Lehrsatz bietet ein Mittel dar, die in folgender Aufgabe verlangte Construction zu finden.

§. 39. **Aufgabe [69].** Eine Linie zweiten Grades und m gerade Linien sind gegeben. Man soll jener Curve ein Polygon von m Seiten umschreiben, dessen Eckpunkte in diesen gegebenen Geraden liegen.

Da die Eckpunkte des Polygons in den m gegebenen Geraden liegen sollen, so kann man seine Seiten als die in dem vorigen Lehrsatze genannten Tangenten $T_1, T_2, \ldots T_{m+1}$ ansehen, wofern man die letzte Tangente T_{m+1} mit der ersten T_1 zusammenfallend annimmt. Denkt man sich nun die andern $(m+1)$ Tangenten $t_1, t_2, \ldots t_{m+1}$ gezogen, so muß die Verbindungslinie des Durchschnitts von T_1 und t_{m+1} und des Durchschnitts von T_{m+1} und t_1, d. i. von T_1 und t_1 (weil T_{m+1} und t_1 zusammenfallen) durch den im Lehrsatze genannten Punkt P gehen. Diese Verbindungslinie ist aber die Seite T_1 des Polygons selbst; demnach muß die Seite des Polygons, welche ihre Endpunkte auf der ersten und letzten gegebenen Geraden haben soll, durch den Punkt P gehen. Dieser Punkt kann aber leicht gefunden werden, und daraus ergiebt sich nun folgende Construction.

Man ziehe beliebig drei erste Tangenten T_1, t_1, τ_1 an die gegebene Linie zweiten Grades, welche die erste gegebene Gerade schneiden, und setze die, in dem vorigen Lehrsatze angegebene, Construction fort, bis man die drei letzten Tangenten $T_{m+1}, t_{m+1}, \tau_{m+1}$ erhält. Heißen nun die Durchschnitte von T_1 und t_{m+1}, von t_1 und T_{m+1}, von T_1 und τ_{m+1}, von τ_1 und T_{m+1} respective P_1, P_2, p_1, p_2, so ziehe man die Geraden P_1P_2 und p_1p_2, welche sich in einem Punkte P schneiden mögen. Zieht man jetzt von P aus eine erste Tangente an die gegebene Curve, und setzt die Construction wie vorher fort, so wird die $(m+1)$te Tangente mit der ersten zusammenfallen, so daß man nur m Tangenten hat, welche, indem sie sich auf den gegebenen Geraden schneiden, das verlangte Polygon bilden.

Da man vom Punkte P aus zwei Tangenten an die Curve ziehen kann, so führt diese Construction im Allgemeinen zu zwei verschiedenen Polygonen *).

§. 40.

Aufgabe [70]. Es sind vier gerade Linien gegeben. Man soll

---

*) Diese Lösung der Aufgabe, welche durch bloßes Ziehen von geraden Linien ausgeführt werden kann, da die Construction einer Tangente, wie sich bald zeigen wird, nur das Ziehen von Geraden erheischt, ist zuerst vom Hrn. Poncelet gegeben worden. M. s. Traité des propriétés projectives des figures (1822) P. 354.

den Ort der Mittelpunkte aller Linien zweiten Grades finden, welche von diesen vier Geraden berührt werden. §. 40.

Wir nehmen zwei von den gegebenen Geraden zu Coordinatenachsen und bezeichnen die Gleichungen dieser vier Linien daher durch

$$y = 0 \;;\; x = 0 \;;\; \frac{y}{b_1}+\frac{x}{a_1} = 1 \;;\; \frac{y}{b_2}+\frac{x}{a_2} = 1 . \quad (1)$$

Soll nun

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f = 0 \quad (2)$$

die Gleichung einer Linie zweiten Grades seyn, welche von jenen vier Geraden berührt wird, so müssen die Gleichungen, welche durch Elimination von x oder von y zwischen einer jeden der Gleichungen (1) und der Gleichung (2) hervorgehen, zwei gleiche Wurzeln haben (§. 35.). Wir erhalten daher folgende vier Bedingungsgleichungen

$$e^2-cf = 0 , \quad (3)$$

$$d^2-af = 0 , \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}(b^2-ac)a_1^2b_1^2+2(be-cd)a_1^2b_1+(e^2-cf)a^2\\+2(bd-ae)a_1b_1^2+2(bf-de)a_1b_1\\+(d^2-af)b_1^2\end{aligned}\right\} = 0 , \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}(b^2-ac)a_2^2b_2^2+2(be-cd)a_2^2b_2+(e^2-cf)a_2^2\\+2(bd-ae)a_2b_2^2+2(bf-de)a_2b_2\\+(d^2-af)b_2^2\end{aligned}\right\} = 0 , \quad (6)$$

und außerdem, wenn wir die Coordinaten des Mittelpunktes der Curve (2) durch x, y bezeichnen (§. 29. S. 12.),

$$(b^2-ac)x+(bd-ae) = 0 \quad (7) \;;\; (b^2-ac)y+(be-cd) = 0 . \quad (8)$$

In Folge der Gleichungen (3) und (4) reduciren sich die Gleichungen (5) u. (6) auf

$$(b^2-ac)a_1b_1+2(be-cd)a_1+2(bd-ae)b_1+2(bf-de) = 0 , \quad (9)$$

$$(b^2-ac)a_2b_2+2(be-cd)a_2+2(bd-ae)b_2+2(bf-de) = 0 , \quad (10)$$

und setzt man hierin die Ausdrücke für (bd−ae) und (be−cd), welche sich unmittelbar aus (7) u. (8) ergeben, so kommt

$$(b^2-ac)\{2a_1y+2b_1x-a_1b_1\} = 2(bf-de) ,$$

$$(b^2-ac)\{2a_2y+2b_2x-a_2b_2\} = 2(bf-de) ,$$

woraus man, durch Subtraction,

$$2(a_1-a_2)y+2(b_1-b_2)x+a_2b_2-a_1b_1 = 0$$

§. 40. als Gleichung des gesuchten Ortes findet. Diese Gleichung, welche eine gerade Linie ausdrückt, wird befriedigt, wenn man $x = \frac{1}{2}a_1$ und $y = \frac{1}{2}b_2$, ferner wenn man $x = \frac{1}{2}a_2$ und $y = \frac{1}{2}b_1$ setzt; diese Coordinaten sind aber die der Halbirungspunkte derjenigen Geraden, welche die Punkte, deren Coordinaten $x = a_1$, $y = 0$ und $x = 0$, $y = b_2$, und die Punkte, deren Coordinaten $x = a_2$, $y = 0$ und $x = 0$, $y = b_1$ sind, verbinden (§. 5. S. 6.), oder, mit andern Worten, der Halbirungspunkte zweier Diagonalen des von den gegebenen Geraden gebildeten Vierecks. Hieraus ergiebt sich also, daß der Ort der Mittelpunkte aller Linien zweiten Grades, welche die Seiten eines gegebenen Vierecks berühren, diejenige Gerade sey, welche durch die Halbirungspunkte der Diagonalen geht.

Aus dem in dieser Lösung enthaltenen Satze lassen sich mehrere Folgerungen ziehen, die wir aber nur zum Theil andeuten können.

Zunächst ergiebt sich daraus, daß die Verbindungslinien der Halbirungspunkte der Diagonalen eines Vierecks, welches einer Linie zweiten Grades umschrieben ist, durch den Mittelpunkt der Curve geht.

Ferner sieht man, daß, um den Mittelpunkt der Linie zweiten Grades zu finden, welche fünf gegebene Geraden berühren soll, nichts weiter nöthig ist, als die Verbindungslinien der Halbirungspunkte der Diagonalen zweier Vierecke zu ziehen, welche man aus zwei mal vier von den gegebenen fünf Geraden bilden kann; der Durchschnitt dieser Verbindungslinien ist dann der Mittelpunkt der Curve.

Hieraus folgt, daß die fünf Verbindungslinien der Halbirungspunkte der Diagonalen von fünf Vierecken, welche von denselben fünf Geraden gebildet werden, sich in einem und demselben Punkte schneiden.

Nimmt man an, daß zwei von den vier, in der Aufgabe genannten, Geraden in ihrem Durchschnittspunkte zwei rechte Winkel machen, also in eine gerade Linie zusammenfallen, und daß demnach ein Dreieck gegeben ist, dessen Seiten von einer Linie zweiten Grades berührt werden sollen, und zwar die eine Seite in einem gegebenen Punkte (dem frühern Durchschnitt der beiden jetzt zusammengefallenen Geraden), so folgt: Der Ort der Mittelpunkte aller Linien zweiten Grades, welche drei gegebene Gerade und eine derselben in einem gegebenen Punkte

berühren, ist die gerade Linie, welche den Halbirungspunkt der zuletzt genannten Geraden mit dem Halbirungspunkte der, von dem Durchschnittspunkte der beiden andern Geraden nach dem gegebenen Punkte gezogenen, geraden Linie verbindet. §. 40.

Läßt man den Durchschnittspunkt zweier von den vier genannten Geraden mit dem Durchschnitt der beiden andern Geraden zusammen fallen, so daß also die vier Linien kein Viereck, sondern nur einen Winkel bilden, so erhält man den Satz: Der Ort der Mittelpunkte aller Linien zweiten Grades, welche zwei gegebene Geraden in gegebenen Punkten berühren, ist die gerade Linie, welche den Durchschnitt der beiden Geraden mit dem Halbirungspunkte der Verbindungslinie der gegebenen Punkte verbindet.

Aufgabe [71]. Es sind drei gerade Linien gegeben. Man soll den Ort der Mittelpunkte derjenigen gleichseitigen Hyperbeln finden, welche von diesen drei Geraden berührt werden.

Wir nehmen, wie in der vorigen Aufgabe, zwei der gegebenen Geraden zu Coordinatenachsen, auf welche bezogen die Gleichung der dritten Geraden

$$\frac{y}{b_1}+\frac{x}{a_1}=1 \qquad (1)$$

sey. Wenn nun

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0 \qquad (2)$$

die Gleichung einer Linie zweiten Grades ist, welche von den gegebenen drei Geraden berührt wird, so erhält man, auf dieselbe Weise wie in der vorigen Aufgabe, folgende drei Bedingungsgleichungen

$$e^2-cf=0\,, \qquad (3)$$

$$d^2-af=0\,, \qquad (4)$$

$$(b^2-ac)a_1b_1+2(be-cd)a_1+2(bd-ae)b_1+2(bf-de)=0\,. \qquad (9)$$

Wenn aber die Curve (2) eine gleichseitige Hyperbel seyn soll, und der Winkel, welchen die, zu Coordinatenachsen genommenen, Geraden einschließen, durch α bezeichnet wird, so hat man noch die Bedingungsgleichung (§. 29. S. 28.)

$$a-2b\cos\alpha+c=0\,, \qquad (11)$$

und außerdem, wenn die Coordinaten des Mittelpunktes dieser Curve durch x_1, y bezeichnet werden (§. 29. S. 7', 8'),

§. 40. $ay+bx+d=0$, (12) ; $by+cx+e=0$. (13)

Eliminirt man nun fünf von den sechs Größen a, b, c, d, e, f zwischen den sechs Gleichungen (3, 4, 9, 11, 12, 13), so geht die sechste von selbst fort. Diese Elimination läßt sich leicht ausführen, wenn man zunächst f zwischen (3) u. (4) und zwischen (3) u. (9), und aus den sich ergebenden Resultaten d und e vermittelst (12) u. (13) eliminirt, wodurch man

$$2y^2b+(a_1b_1-2a_1y-2b_1x+2xy)c=0 \quad ; \quad ay^2-cx^2=0$$

findet, und setzt man nun die Werthe von b u. a, welche diese Gleichungen geben, in (11), so kommt

$$y^2+2\cos\alpha\,xy+x^2-2a_1\cos\alpha\,y-2b_1\cos\alpha\,x+a_1b_1\cos\alpha=0 \quad (14)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes.

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Form der Gleichung zweiten Grades, wie dies im §. 31. geschehen ist, so hat man $a=1$, $b=\cos\alpha$, $c=1$, $d=-a_1\cos\alpha$, $e=-b_1\cos\alpha$, $f=a_1b_1\cos\alpha$. Da nun $a=c$ und auch $b=a\cos\alpha$ ist, so kann die Gleichung einen Kreis ausdrücken, und dies wird wirklich der Fall seyn, wenn (da $b^2-ac=-\sin^2\alpha$, also negativ) $(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)$ weder negativ noch gleich Null ist (§. 28.). Dieser Ausdruck ist aber im gegenwärtigen Falle gleich $-\cos\alpha(b_1-a_1\cos\alpha)(a_1-b_1\cos\alpha)$, und es kommt also darauf an, zu untersuchen, ob und wann dieses Product negativ oder null wird. Damit dies auf eine einfache Weise geschehe, nehmen wir an, es seyen in dem Dreiecke, welches von den gegebenen Geraden gebildet wird, diejenigen Seiten, welche einen spitzen Winkel einschließen, zu Coordinatenachsen und zwar so genommen, daß die dritte Seite diese Achsen auf ihren positiven Seiten schneide. Alsdann ist $\alpha<\frac{1}{2}\pi$, und a_1 sowohl als b_1 positiv. In dem eben genannten Dreiecke sind nun a_1 und b_1 die Längen der den Winkel α einschließenden Seiten, und bezeichnet man die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel respective durch φ und ψ, so ist bekanntermaßen

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{a_1\sin\alpha}{b_1-a_1\cos\alpha} \quad ; \quad \operatorname{tang}\psi=\frac{b_1\sin\alpha}{a_1-b_1\cos\alpha},$$

und daher

$$-\cos\alpha(b_1-a_1\cos\alpha)(a_1-b_1\cos\alpha)=-\frac{\cos\alpha.\sin^2\alpha.a_1b_1}{\operatorname{tang}\varphi.\operatorname{tang}\psi}.$$

Man sieht nun, daß nur dann eine Curve durch die Gleichung (14) ausgedrückt seyn wird, wenn $\operatorname{tang}\varphi.\operatorname{tang}\psi$ eine negative Größe ist, weil die Factoren $\cos\alpha$, a_1, b_1, nach demjenigen, was vorher gesagt worden, positive

Größen bedeuten. Soll aber das Product $tang\varphi . tang\psi$ negativ seyn, so müssen $tang\varphi$ und $tang\psi$ entgegengesetzte Zeichen haben, d. i. es muß eine dieser Größen negativ, folglich einer der beiden Winkel φ und ψ ein stumpfer Winkel seyn. §. 40.

Wäre einer der beiden Winkel φ, ψ ein rechter, so würde der obige Ausdruck gleich Null werden, und die Gleichung (14) würde alsdann einen Punkt ausdrücken (§. 28.).

Nimmt man nun an, daß das, von den drei gegebenen, Geraden gebildete Dreieck ein stumpfwinkliges sey, und daß also die Gleichung (14) einen Kreis ausdrücke, so ist noch die Lage des Mittelpunktes und der Radius dieses Kreises aufzusuchen. Zu dem Ende bemerken wir, daß die Coordinaten der Eckpunkte des genannten Dreiecks respective folgende sind

$$\begin{Bmatrix} x' = 0 \\ y' = 0 \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} x'' = a_1 \\ y'' = 0 \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} x''' = 0 \\ y''' = b_1 \end{Bmatrix} ,$$

und daß daher die Polaren dieser Eckpunkte in Beziehung auf den Kreis (14) respective durch folgende Gleichungen

$$a_1 y + b_1 x - a_1 b_1 = 0 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad y = 0$$

ausgedrückt werden. Diese Gleichungen sind aber offenbar diejenigen der drei Seiten des in Rede stehenden Dreiecks, und demnach liegt der Kreis (14) so, daß eine jede der gegebenen Geraden die Polare des Durchschnitts der beiden andern ist. Da nun die Gerade, welche einen Punkt mit dem Mittelpunkte verbindet, senkrecht auf der Polarlinie dieses Punktes steht, und der Radius des Kreises die mittlere Proportionale zwischen dieser Verbindungslinie und dem, von der Polare und dem Mittelpunkte begrenzten, Abschnitte derselben ist (§. 24.); so ist der Durchschnittspunkt der drei, von den Eckpunkten des genannten Dreiecks auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten, Perpendikel der verlangte Mittelpunkt, und die mittlere Proportionale zwischen den beiden Stücken einer solchen Senkrechten, die einerseits von diesem Mittelpunkte, andererseits von dem Eckpunkte des Dreiecks und der gegenüberstehenden Seite begrenzt werden, der gesuchte Radius des Kreises.

Wenn das erwähnte Dreieck stumpfwinklig ist, fällt der Durchschnitt der genannten Perpendikel außerhalb desselben. Wenn es rechtwinklig ist, fällt er in die Spitze des rechten Winkels und die erste der drei Proportionalen ist null, daher ist die mittlere Proportionale ebenfalls gleich Null, und der Kreis degenerirt in einen Punkt; wenn endlich das Dreieck spitzwinklig

§. 40. iſt, fällt der genannte Durchſchnitt innerhalb des Dreiecks und alſo zwiſchen den Punkt und der Geraden, welche Pol und Polare ſeyn ſollen; er kann alſo nicht der Mittelpunkt desjenigen Kreiſes ſeyn, in Beziehung auf welchen der Punkt und die Gerade in jener Relation ſtehen ſollen; denn Pol und Polare liegen, wie leicht zu ſehen iſt, immer auf derſelben Seite des Mittelpunktes; und es exiſtirt ſomit kein Ort für den Mittelpunkt der gleichſeitigen Hyperbeln. Dies alles ſtimmt vollkommen mit demjenigen überein, was wir oben gefunden haben.

§. 41.

Wenn man durch irgend einen feſten Punkt gerade Linien nach einer Linie zweiten Grades zieht, ſo wird im Allgemeinen eine jede derſelben die Curve in zwei Punkten ſchneiden. Wir wollen jetzt zeigen, daß je zwei Durchſchnitte einer der Geraden als ſich entſprechende Punkte derſelben collinearen und collinear-liegenden Syſteme und der feſte Punkt als Collineationscentrum angeſehen werden kann.

Wir nehmen den feſten Punkt zum Anfangspunkte der Coordinaten, und zwei, durch ihn beliebig gezogene, Gerade zu Coordinatenachſen. Es ſey, in Beziehung auf dieſes Coordinatenſyſtem,

$$au^2+2btu+ct^2+2du+2et+f=0 \qquad (1)$$

die Gleichung einer gegebenen Linie zweiten Grades. Setzt man (§. 12. G. 1)

$$u=\frac{py}{my+nx+1}\ ;\ t=\frac{px}{my+nx+1},$$

ſo kommt

$$(ap^2+2dmp+fm^2)y^2+2(bp^2+dnp+emp+fmn)xy+(cp^2+2enp+fn^2)x^2 +2(dp+fm)y+2(ep+fn)x+f=0\ . \qquad (2)$$

Die den Punkten tu der Curve (1) entſprechende Punkte xy liegen alſo in einer Linie zweiten Grades (2), und ſollen ſie in der Curve (1) liegen, ſo muß die Gleichung (2) der Gleichung (1) identiſch ſeyn. Demnach müſſen, wenn unſere Behauptung wahr iſt, die fünf Gleichungen

$$ap^2+2dmp+fm^2=a\ ;\ bp^2+dnp+emp+fmn=b\ ;\ cp^2+2enp+fn^2=c\ ;$$
$$dp+fm=d\ ;\ ep+fn=e$$

durch dieſelben reellen Werthe der drei Größen m, n und p befriedigt werden können. Und dies iſt wirklich der Fall. Denn ſetzt man erſtlich

$$m=0\ ,\ n=0\ ,\ p=1\ ,$$

oder zweitens §. 41.

$$m = 2\frac{d}{f} \quad , \quad n = 2\frac{e}{f} \quad , \quad p = -1 \, ,$$

so werden sämmtliche fünf Gleichungen befriedigt. Die erstgenannten Werthe geben

$$u = y \quad \text{und} \quad t = x \, ,$$

was nicht die Verwandtschaft der Collineation im Allgemeinen, sondern die Congruenz ausdrückt. Die zuletzt angegebenen Werthe aber geben

$$u = \frac{-y}{2\frac{d}{f}y + 2\frac{e}{f}x + 1} \quad \text{und} \quad t = \frac{-x}{2\frac{d}{f}y + 2\frac{e}{f}x + 1} \, . \qquad (3)$$

Wir sehen also, daß nicht nur die zweiten Durchschnittspunkte, als den ersten entsprechend dürfen angesehen werden, sondern, weil $p = -1$ ist, daß auch je zwei einander entsprechende Punkte gegenseitig vertauscht werden können (§. 14.).

Für die Gleichung der Collineationsachse (§. 13. S. 1) findet man aus diesen Formeln (3)

$$dy + ex + f = 0 \, , \qquad (4)$$

welches auch zugleich die Gleichung der Polare des Anfangspunktes ist. Die Collineationsachse fällt also mit der Polarlinie des, zum Collineationspunkte genommenen festen Punktes zusammen.

Die Gegenachse, welche für beide Systeme dieselbe ist, und die Entfernung des Collineationspunktes von der Collineationsachse halbirt (§. 14.), hat zur Gleichung

$$2dy + 2ex + f = 0 \, . \qquad (5)$$

Aus dem bisher Gesagten lassen sich unmittelbar mehrere bemerkenswerthe Folgerungen ziehen, von denen einige hier Platz finden mögen.

Zieht man von irgend einem Punkte P aus zwei Tangenten PA und PB an eine Linie zweiten Grades, und durch A, B die Berührungssehne, so kann diese nicht nur als die Polare des Punktes P angesehen werden, sondern man kann auch den Punkt P als Collineationscentrum und die Gerade AB als Collineationsachse zweier collinearen und collinear-liegenden Systeme betrachten, dergestalt, daß alle durch P gezogenen Geraden PCD , PEF u. s. w. die Curve in sich entsprechenden Punkten C und D , E und F u. s. w. schneiden, und daß man nicht nur C , E u. s. w. als Punkte des Fig. 26.

§. 41. einen Syſtems, D, F u. ſ. w. als Punkte des andern Syſtems, ſondern daß man auch C, F als Punkte des einen, und D, E als Punkte des andern Syſtems anſehen kann (§. 14.). Alsdann können die Verbindungslinien CE und DF ſowohl als die Verbindungslinien DE und CF für entſprechende Gerade angeſehen werden und beide Durchſchnittspunkte Q und O liegen daher auf der Collineationsachſe AB. Dreht man die Gerade PEF um den feſten Punkt P, ſo wird ſich die Lage der Sehnen CE und DF zwar ändern, es werden aber dieſe beiden Geraden ſich fortwährend auf der Geraden AB ſchneiden. Setzt man dieſe Drehung ſo fort, daß ſich die Lage der PF der Lage von PD immer mehr und mehr nähert, ſo wird ſich die Lage der beiden Sehnen CE und DF, welche ſich um C und D drehen, der Lage der beiden Tangenten immer mehr und mehr nähern, und wenn endlich PF auf PD fällt, ſo werden CE und DF auf die Tangenten in C und D fallen. Dieſe Tangenten werden ſich daher ebenfalls auf der Geraden AB ſchneiden, und daſſelbe wird überhaupt bei zwei Tangenten Statt finden, die in den Durchſchnittspunkten der Curve und einer durch P gezogenen Geraden an die Curve gelegt werden *). Hieraus ergiebt ſich ein ſehr einfaches Mittel zur Löſung der

Fig. 26. **Aufgabe [72].** *Von einem gegebenen Punkte P aus an eine gegebene Linie zweiten Grades eine Tangente zu conſtruiren.*

Man ziehe durch den gegebenen Punkt P zwei beliebige, die Curve ſchneidende Gerade PCD, PEF, und verbinde die vier Durchſchnittspunkte von Neuem durch die Geraden CE, DF, CF, DE. Die Verbindungslinie der zwei dadurch entſtandenen Durchſchnittspunkte O, Q begegnet der Curve (wenn Tangenten von P aus möglich ſind) in zwei Punkten A, B, welche

*) Man kann zu derſelben Folgerung durch eine einfache Rechnung gelangen. Sind nämlich t', u' die Coordinaten eines Punktes C, und x', y' die Coordinaten eines ihm entſprechenden Punktes D der Curve (1), ſo ſind die Gleichungen der Tangenten in C und D

$(au'+bt'+d)u+(bu'+ct'+e)t+du'+et'+f=0$; $(ay'+bx'+d)y+(by'+cx'+e)x+dy'+ex'+f=0$.

Sollen nun beide Tangenten ſich entſprechende Gerade ſeyn, ſo muß die Subſtitution der Ausdrücke (3) für t u. u in die erſte Gleichung die zweite geben. Verrichtet man dieſe Subſtitution und ſetzt außerdem, weil t'u' und x'y' ſich entſprechende Punkte ſind, für u' und t' reſpective $\frac{-fy'}{dy'+ex'+f}$ und $\frac{-fx'}{dy'+ex'+f}$, ſo erhält man wirklich die zweite Gleichung. Da nun alſo die beiden Tangenten ſich entſprechende Gerade ſind, ſo ſchneiden ſie ſich auf der Collineationsachſe, was behauptet worden iſt.

die Berührungspunkte seyn werden, und die man daher nur mit dem Punkte P zu verbinden braucht, um die Tangenten zu haben. §. 41. Fig. 26.

Betrachten wir jetzt den Punkt Q als Collineationscentrum, so sind die mit Q in gerader Linie liegende Punkte C und E, D und F u. s. w. als sich entsprechende Punkte zu betrachten, und man kann nicht nur C, D u. s. w. als Punkte eines Systems, E, F u. s. w. als Punkte des andern Systems, sondern auch C, F als Punkte des einen und D, E als Punkte des andern Systems betrachten. Alsdann sind die Verbindungslinien CD und EF sowohl als die Verbindungslinien CF und ED für entsprechende Gerade anzusehen, und beide Durchschnittspunkte P und O liegen daher auf der Collineationsachse oder, was dasselbe ist, auf der Polare HK von Q, auf welcher sich auch, aus den oben angeführten Gründen, die Tangenten in C und E und die Tangenten in D und F schneiden.

Da nun der Punkt O der Durchschnitt der Polaren AB und HK von P und Q ist, so ist die Verbindungslinie PQ die Polare von O und enthält als solche die Durchschnitte R u. S der Tangenten in C u. F und in D u. E.

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich der

Lehrsatz [22]. *Wenn in einer Linie zweiten Grades ein Viereck CDFE eingeschrieben, und ein anderes GHIK so umgeschrieben ist, daß die Berührungspunkte des letztern die Eckpunkte des erstern sind,*

1) *schneiden sich vier Diagonalen CF, ED, GI, HK beider Vierecke in einem und demselben Punkte O;*
2) *gehen die Diagonalen HK, GI des umschriebenen Vierecks durch die Durchschnitte P, Q der gegenüberstehenden Seiten des eingeschriebenen;*
3) *liegen die vier Durchschnittspunkte P, Q, R, S der gegenüberstehenden Seiten beider Vierecke auf einer und derselben Geraden, der Polarlinie des Punktes O.*

Auch die folgende Aufgabe ist jetzt ohne Anwendung anderer Linien als der Geraden zu lösen.

Aufgabe [73]. *An einer gegebenen Linie zweiten Grades in einem gegebenen Punkte P derselben eine Tangente zu construiren.* Fig. 27

Man nehme noch vier Punkte A, B, C, C′ in der gegebenen Curve beliebig an, verbinde den gegebenen Punkt P mit A und B, und ziehe AC, AC′, die die PB in M und M′, ferner PC, PC′, die die AB in N und N′ schneiden. Man ziehe endlich MN und M′N′, so ist ihr Durch-

§. 41. Fig. 27. schnitt Q ein Punkt der verlangten Tangente, den man nur noch mit dem Punkte P zu verbinden braucht.

Denn der Durchschnitt R der Geraden AP und BC ist, nach dem vorigen Satze, der Pol von MN, und der Durchschnitt S der Geraden AP und BC' der Pol von M'N'; also ist die Verbindungslinie von R und S, d. i. AP die Polare des Durchschnitts Q der Geraden MN und M'N' und folglich auch die Berührungssehne der von Q aus gezogenen Tangenten.

Durch eine, auf denselben Gründen beruhende, Construction, welche ebenfalls bloß die Anwendung der geraden Linie erheischt, kann man, wenn nur fünf Punkte einer Linie zweiten Grades gegeben sind, einen sechsten Punkt derselben Curve finden, und dann durch Wiederholung derselben Construction zu so vielen Punkten dieser Curve gelangen, als man will. Ferner kann man, wenn nur fünf Tangenten einer Linie zweiten Grades gegeben sind, auf ähnliche Weise eine sechste Tangente, und dann durch Wiederholung der Construction beliebig viele Tangenten der Curve finden, ohne daß sie selbst gegeben zu seyn braucht.

Fig. 28. Zieht man in einer Linien zweiten Grades beliebig viele, einer gegebenen Richtung parallele, Sehnen CE, und durch irgend einen Punkt P nach den Endpunkten dieser Sehnen gerade Linien PC, PE, welche die Curve im Allgemeinen noch einmal, in D, F, schneiden; so gehen alle vierten Seiten DF der dadurch entstehenden Vierecke CEFD durch einen und denselben Punkt T, welcher der Durchschnitt zweier Geraden ist, von denen die eine PT durch den Punkt P der gegebenen Richtung parallel läuft, und die andere MN der Polarlinie von P parallel ist und die Entfernung dieser Linie von P halbirt. Dies folgt unmittelbar aus §. 14., indem P als Collineationscentrum, C und D, E und F als sich entsprechende Punkte, die Polare von P als Collineationsachse und, da $p = -1$ ist, MN als Gegenachse zweier collinearen und collinear-liegenden Systeme angesehen werden können.

§. 42.

Eine Curve B, welche der Ort der Pole aller Tangenten einer andern Curve A ist, heißt die reciproke Curve der letztern.

Eine Gerade, welche zwei Punkte der Curve B verbindet, ist also (§. 19.) die Polare des Durchschnitts der beiden Tangenten an der Curve A, welche diesen Punkten entsprechen. Dreht sich diese Gerade um den einen der beiden

den Punkte, wie um einen festen Pol, so wird der andere der beiden Punkte auf der Curve B fortrücken und zu gleicher Zeit wird die, diesem fortrückenden Punkte entsprechende, Tangente der Curve A an dieser Curve sich fortbewegen, so daß der Durchschnitt der beiden Tangenten, welcher der Pol der sich drehenden Geraden ist, auf der andern Tangente fortrückt. Fällt endlich bei dieser Drehung der Geraden, in der Curve B, der zweite Punkt mit dem ersten zusammen, wird also diese Gerade zu einer Tangente der Curve B, so fällt auch nothwendigerweise die zweite Tangente an der Curve A mit der ersten zusammen, was nur geschehen kann, wenn der Durchschnitt beider Tangenten in den Berührungspunkt fällt. Man sieht demnach, daß der Berührungspunkt einer Tangente an der Curve A der Pol einer Geraden ist, welche die Curve B, und zwar in dem Pole jener Tangente, berührt. Es ist folglich die Curve A der Ort der Pole aller Tangenten an B, so wie die Curve B der Ort der Pole aller Tangenten an A ist. Wenn also eine Curve B die reciproke Curve einer andern A ist, so ist auch die Curve A die reciproke Curve der Curve B. Wir werden dies für die Linien zweiter Ordnung sogleich durch eine einfache Rechnung erweisen. Es bedarf wohl kaum einer Erwähnung, daß einer Curve unendlich viele andere reciprok seyn können (§. 19.). §. 42.

Aufgabe [74]. Es sind vier Punkte und eine Linie zweiten Grades gegeben. Man soll die reciproke Curve der gegebenen finden, welche durch die vier gegebenen Punkte geht, und die so beschaffen ist, daß diese vier Punkte vier bestimmten Tangenten der gegebenen Curve entsprechen.

Welches auch die gegebene Linie zweiten Grades seyn mag, so wird ihre Gleichung immer auf die Form

$$y^2 + mx^2 + 2nx = 0 \qquad (1)$$

gebracht werden können (§. 30.). Bezeichnet man die Coordinaten eines reciproken Systems durch t, u, so ist die Gleichung der Polarlinie eines Punktes tu im Allgemeinen (§. 19. G. 2)

$$(au + a't + a'')y + (bu + b't + b'')x + cu + c't + 1 = 0\,. \qquad (2)$$

Damit nun die vier gegebenen Punkte die Pole der vier bestimmten Tangenten der Curve (1) seyen, wird man in die Gleichung (2), für t und u die Coordinaten der vier gegebenen Punkte nach einander zu substituiren, und diese Gleichungen sodann den Gleichungen der vier gegebenen Tangenten

§. 42. zu identificiren haben, wodurch man acht Gleichungen vom ersten Grade erhalten wird, die zur Bestimmung der acht Constanten a, a', a'', b u. s. w. hinreichen. Nimmt man nun an, daß den eben genannten Constanten die, aus dieser Bestimmung hervorgehenden, Werthe beigelegt sind, so ist nur noch nöthig, die Bedingung auszudrücken, daß die Polare (2) eine Tangente der Curve (1) sey. Zu dem Ende elimininen wir y zwischen den Gleichungen (1) und (2) (§. 35.), wodurch wir, wenn die Coefficienten der Gleichung (2), der Kürze wegen, durch A, B u. C bezeichnet werden, die Gleichung

$$(B^2+mA^2)x^2+2(BC+nA^2)x+C^2=0$$

erhalten, und indem wir die Bedingung einführen, daß diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln habe, zu der Gleichung

$$(BC+nA^2)^2-C^2(B^2+mA^2)=0$$

oder

$$n^2A^2+2nBC-mC^2=0 \qquad (3)$$

gelangen. Setzen wir hierin für A, B u. C die Coefficienten der Gleichung (2), so haben wir

$$n^2(au+a't+a'')^2+2n(bu+b't+b'')(cu+c't+1)-m(cu+c't+1)^2=0, \quad (4)$$

welches die verlangte Gleichung der reciproken Curve ist.

Da die gefundene Gleichung vom zweiten Grade ist, so folgt:

Die reciproke Curve einer Linie zweiten Grades ist eine Linie desselben Grades.

Wir wollen jetzt durch Rechnung zeigen, daß, wie schon oben gesagt, die gegebene Curve (1) auch die reciproke Curve der gefundenen (4) ist. Wir werden also nachweisen müssen, daß die Curve (1) der Ort der Pole aller Tangenten der Curve (4) sey, oder, was dasselbe ist, daß die Polaren aller Punkte der Curve (1) Tangenten der Curve (4) seyen. Nun ist aber, wenn man t, u als laufende Coordinaten ansieht, die Gleichung (2) diejenige der Polarlinie eines Punktes xy, und diese Polare wird eine Tangente der Curve (4) seyn, wenn die Elimination von u oder t zwischen den Gleichungen (2) und (4) eine Gleichung giebt, die zwei gleiche Wurzeln hat, oder, mit andern Worten, wenn in Folge dieser Gleichungen (2 u. 4) die Größen t und u nur einfache Werthe bekommen. Bezeichnet man nun die Coefficienten der Gleichung (2) wie oben, so lassen sich die Gleichungen (2) und (4 oder 3) wie folgt schreiben

$$y\frac{A}{C}+x\frac{B}{C}+1=0 \quad ; \quad n^2\frac{A^2}{C^2}+2n\frac{B}{C}-m=0, \qquad \S\ 42.$$

und eliminirt man $\frac{A}{C}$ zwiſchen ihnen, ſo kommt

$$n^2x^2B^2+2n(y^2+nx)BC+(n^2-my^2)C^2=0,$$

oder, da, der Vorausſetzung zufolge, xy ein Punkt der Curve (1) ſeyn ſoll, und demnach $y^2=-mx^2-2nx$ iſt,

$$n^2x^2B^2-2n(mx^2+nx)BC+(m^2x^2+2mnx+n^2)C^2=0,$$

eine Gleichung, die auch unter der Form

$$\{nxB-(mx+n)C\}^2=0 \qquad (5)$$

dargeſtellt werden kann. Statt u zwiſchen den Gleichungen (2) und (4) zu eliminiren, um die genannte Gleichung in t zu erhalten, kann man jetzt dieſe Elimination zwiſchen den Gleichungen (2) und (5) bewerkſtelligen. Da aber die Gleichung (5), wie man ſieht, in zwei *gleiche* Factoren zerfällt, die in Beziehung auf t und u vom erſten Grade ſind, ſo wird man offenbar nur *einfache* Werthe für t und u erhalten, was gezeigt werden ſollte.

Wenn man die gefundene Gleichung (3) nach t und u ordnet, und durch das von t und u freie Glied dividirt, ſo hat ſie, wie jede Gleichung einer Linie zweiten Grades, fünf Coefficienten, deren Werthe die Geſtalt und Lage der Curve beſtimmen. Da nun in dieſen fünf Coefficienten die acht Größen a, a′, a″, b u. ſ. w. vorkommen, ſo kann man dieſen acht Größen im Allgemeinen noch ganz andere Werthe beilegen, als diejenigen, welche aus der, in der Löſung enthaltenen, Beſtimmung hervorgegangen ſind, ohne daß die fünf Coefficienten der Gleichung, und alſo ohne daß die Curve dadurch geändert wird. Durch eine ſolche Aenderung dieſer acht Größen wird alſo die unverändert gebliebene Curve (4) noch immer durch die vier gegebenen Punkte gehen und eine reciproke Curve der gegebenen ſeyn, aber es werden jene vier Punkte im Allgemeinen nicht mehr die Pole der vier gegebenen Tangenten, ſondern ſie werden die Pole anderer Tangenten der Curve (1) ſeyn.

§. 43.

Es iſt leicht einzuſehen, daß man, wenn keine partialiſirende Beſtimmungen gemacht werden, jede zwei Linien zweiten Grades als reciproke

§. 43. Curven betrachten kann. Denn ist

$$y^2 + mx^2 + 2nx = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung der einen und

$$u^2 + Btu + Ct^2 + Du + Et + F = 0 \qquad (2)$$

die Gleichung der andern Curve, so kann man die letztere Gleichung der Gleichung.

$$n^2(au + a't + a'')^2 + 2n(bu + b't + b'')(cu + c't + 1) - m(cu + c't + 1)^2 = 0, \qquad (3)$$

welche eine reciproke Curve der Curve (1) ausdrückt (§. 42. S. 4), identisch setzen, und aus den fünf sich ergebenden Gleichungen a, a', a'', b u. s. w. bestimmen, wobei man noch drei von diesen acht Größen beliebig annehmen kann, wenn man es nur so einrichtet, daß die fünf übrigen dadurch keine imaginären Werthe erhalten.

Diese Eigenthümlichkeit der Linien zweiten Grades, daß nämlich von zwei solchen Curven eine jede als die reciproke Curve der andern angesehen werden kann, macht es möglich, aus schon erwiesenen Sätzen von Linien zweiten Grades andere Sätze abzuleiten, auf ähnliche Weise wie dies in §. 21. mit einigen die gerade Linie betreffenden Lehrsätzen geschehen ist.

Wir bemerken hierbei im Allgemeinen Folgendes. Construirt man zu einer Figur, die eine Linie zweiten Grades c, gerade Linien l und Punkte p enthält, die reciproke Figur, so entspricht der Linie zweiten Grades c eine Linie zweiten Grades γ, jeder Geraden l entspricht ein Punkt λ, und jedem Punkte p eine Gerade π. Berührt die Gerade l die Curve c, so liegt der Punkt λ auf der Curve γ, und umgekehrt, liegt der Punkt p auf der Curve c, so berührt die Gerade π die Curve γ (denn jede der beiden Curven ist der Ort der Pole der Tangenten der andern). Verbindet die Gerade l zwei Punkte p', p'' der Curve c, so ist der Punkt λ der Durchschnitt der beiden Tangenten π', π'' an der Curve γ, und umgekehrt ist der Punkt p der Durchschnitt zweier Tangenten l', l'' an der Curve c, so verbindet die Gerade π die beiden Punkte λ', λ'' der Curve γ.

Als Beispiele solcher Ableitungen, die, wie man sehen wird, in einer bloßen Uebertragung bestehen, nehmen wir folgende im §. 34. erwiesene Lehrsätze, und stellen ihnen die daraus abgeleiteten gegenüber.

Lehrsatz [13]. Wenn man in eine Linie zweiten Grades beliebig viele Vierecke einschreibt, deren drei

Lehrsatz [23]. Wenn man um eine Linie zweiten Grades beliebig viele Vierecke umschreibt, deren drei

erſte Seiten durch dieſelben drei, in einer geraden Linie liegende, Punkte gehen, ſo gehen die vierten Seiten aller dieſer Vierecke durch einen und denſelben, in der nämlichen Geraden ſich befindenden, Punkt.

erſte Eckpunkte auf denſelben drei, ſich in einem Punkte ſchneidenden, Geraden liegen, ſo liegen die vierten Eckpunkte aller dieſer Vierecke auf einer und derſelben, durch den nämlichen Durchſchnittspunkt gehenden, Geraden. §. 43.

Lehrſatz [15]. Wenn man in eine Linie zweiten Grades beliebig viele Polygone von einer und derſelben geraden Anzahl (2n) Seiten einſchreibt, ſo aber, daß die erſten (2n—1) Seiten durch eben ſo viele, in einer geraden Linie liegende, feſte Punkte gehen; ſo werden auch die letzten Seiten aller dieſer Vielecke durch einen feſten, in derſelben Geraden liegenden, Punkt gehen.

Lehrſatz [24]. Wenn man um eine Linie zweiten Grades beliebig viele Polygone von einer und derſelben geraden Anzahl (2n) Ecken umſchreibt, ſo aber, daß die erſten (2n—1) Eckpunkte auf eben ſo vielen, in einem Punkte zuſammentreffenden, feſten Geraden liegen; ſo werden auch die letzten Eckpunkte aller dieſer Vielecke auf einer feſten, durch denſelben Punkt gehenden, Geraden liegen.

Lehrſatz [16]. Wenn man in eine Linie zweiten Grades ein Sechseck einſchreibt, und die einander gegenüber ſtehenden Seiten bis zu ihren Durchſchnitten verlängert; ſo liegen dieſe drei Durchſchnittspunkte in einer geraden Linie.

Lehrſatz [25]. Wenn man um eine Linie zweiten Grades ein Sechseck umſchreibt, und die einander gegenüber liegenden Eckpunkte durch gerade Linien verbindet; ſo ſchneiden ſich dieſe drei Verbindungslinien in einem Punkte.

Als ferneres Beiſpiel nehmen wir den im §. 39. erwieſenen Lehrſatz (21) und die daſelbſt gelöſte Aufgabe (69). Aus jenem erhalten wir den folgenden

Lehrſatz [26]. Es ſeyen m Punkte $G_1, G_2, \ldots G_m$ und eine Linie zweiten Grades C gegeben. Auf dieſer Curve ſey beliebig ein Punkt T_1 angenommen, welcher mit dem Punkte G_1 verbunden eine Gerade p_1 geben wird; p_1 ſey verlängert bis ſie die Curve in einem Punkte T_2 ſchneide, welcher mit dem Punkte G_2 verbunden eine Gerade p_2 giebt; es ſey wieder p_2 bis zu ihrem Durchſchnitte T_3 mit der Curve verlängert, welcher mit dem Punkte G_3 die Gerade p_3 beſtimmt, und ſo fort bis man zu einer, durch den Punkt G_m gehenden Geraden p_m kommt, welche einen letzten Durchſchnittspunkt T_{m+1} mit der Curve gebe. Dieſelbe

§. 43. Construction sey noch einmal gemacht, aber mit einem andern beliebigen Punkte t_1 angefangen, wodurch ein anderer letzter Durchschnitt t_{m+1} auf der Curve entstehen wird. Verlängert man nun die Verbindungslinie P_1 der Punkte T_1 und t_{m+1} und die Verbindungslinie P_2 der Punkte t_1 und T_{m+1} bis zu ihrem Durchschnittspunkte (P_1P_2); so liegt dieser Durchschnittspunkt (P_1P_2) immer auf einer und derselben Geraden P, wie auch die ersten Punkte T_1, t_1 auf der Curve angenommen seyn mögen.

Aus der Lösung der Aufgabe (69), oder auch aus dem Lehrsatz (26), erhalten wir die nachstehende Lösung der

Aufgabe [75]. Eine Linie zweiten Grades und m Punkte sind gegeben. Man soll in jene Curve ein Polygon einschreiben, dessen Seiten durch die gegebenen Punkte gehen.

Man nehme beliebig drei erste Punkte T_1, t_1, τ_1 auf der gegebenen Linie zweiten Grades an, verbinde sie mit dem ersten gegebenen Punkte und setze die, in dem vorigen Lehrsatze (26) angegebene Construction fort, bis man drei letzte Punkte T_{m+1}, t_{m+1}, τ_{m+1} auf der Curve erhält. Heißen nun die Verbindungslinien der Punkte T_1 und t_{m+1}, der Punkte t_1 und T_{m+1}, der Punkte T_1 und τ_{m+1} und der Punkte τ_1 und T_{m+1} respective P_1, P_2, p_1, und p_2, so verlängere man die Geraden P_1, P_2 und p_1, p_2 bis zu ihren Durchschnitten (P_1P_2) und (p_1p_2), welche letztern Punkte eine Gerade P bestimmen. Nimmt man jetzt einen Durchschnitt dieser Geraden P und der Curve als ersten Eckpunkt des einzuschreibenden Polygons an, und setzt die Construction wie vorher fort, so wird der $(m+1)$te Eckpunkt mit dem ersten zusammenfallen, so daß man nur m Eckpunkte hat, welche, indem ihre Verbindungslinien durch die gegebenen Punkte gehen, das verlangte Polygon bilden.

Da die Gerade P die Curve in zwei Punkten schneiden kann, so führt diese Construction im Allgemeinen zu zwei verschiedenen Polygonen *).

§. 44.

Wenn es die Gleichung

*) Diese Lösung ist zuerst von Herrn Poncelet gegeben worden. Dieselbe Aufgabe ist auch, aber nur in Beziehung auf den Kreis, in Meier Hirsch Sammlung geometr. Aufgaben (Th. I. S. 263—270.) behandelt, woselbst man auch eine kurze historische Notiz über die bis dahin bekannt gewordenen Lösungen findet.

$$(ay+bx+d)u+(by+cx+e)t+dy+ex+f=0 \qquad (1)$$ §. 44.

oder, was daſſelbe, wenn es die Gleichung

$$(au+bt+d)y+(bu+ct+e)x+du+et+f=0 \qquad (2)$$

iſt, welche die Relation der Reciprocität zweier, auf dieſelben Coordinatenachſen bezogenen Curven ausdrückt, ſo ſind, wie in §. 35. bemerkt worden, die Tangenten der einen Curve nicht nur die Polaren der Punkte der andern, ſondern es ſind dieſe Tangenten auch im Allgemeinen Berührungsſehnen einer dritten Curve, deren Gleichung

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0 \qquad (3)$$

iſt, und die wir in §. 35. die Directrix der beiden reciproken Syſteme genannt haben.

Eben ſo wie wir in §. 42. gefunden haben, daß die Gleichung der reciproken Curve einer durch die dortige Gleichung (1) ausgedrückten Linie zweiten Grades die Gleichung (4) ſey, wenn die Gleichung (2) deſſelben § die Relation der Reciprocität ausdrückt; ſo findet ſich auch, daß, wenn die obige Gleichung (2) an deren Stelle geſetzt wird, die Linie zweiten Grades

$$y^2+mx^2+2nx=0 \qquad (4)$$

zur reciproken Curve eine Linie zweiten Grades habe, deren Gleichung

$$n^2(au+bt+d)^2+2n(bu+ct+e)(du+et+f)-m(du+et+f)^2=0 \qquad (5)$$

iſt.

Für eine und dieſelbe gegebene Linie zweiten Grades (4) giebt jede andere Directrix im Allgemeinen auch eine andere reciproke Curve, da die fünf Conſtanten a, b, c, d u. e für eine andere Directrix andere Werthe haben. Aber die Verſchiedenheit dieſer reciproken Curve kann ſehr wohl nur in einer veränderten Lage beſtehen. Man kann daher im Allgemeinen für eine gegebene Linie zweiten Grades eine beliebig angenommene Directrix ſo ändern, daß dadurch zwar auch die Lage der reciproken Curve, nicht aber ihre Geſtalt und Größe geändert wird. Die folgende Aufgabe enthält ein Beiſpiel einer ſolchen Veränderung der Directrix.

Aufgabe [76]. Es iſt eine Linie zweiten Grades gegeben. Man ſoll den Ort des Mittelpunktes eines Kreiſes von veränderlichem Radius finden, der, als Directrix angenommen, für die gegebene Linie immer dieſelbe reciproke Curve nur in veränderter Lage giebt.

Es ſey die Gleichung (4) diejenige der gegebenen Linie zweiten Gra-

§. 44. des in rechtwinkligen Coordinaten, und

$$y^2+x^2-2\beta y-2\alpha x+\beta^2+\alpha^2-r^2=0 \qquad (6)$$

die Gleichung eines auf dieſelben Coordinatenachſen bezogenen Kreiſes, wo r den Radius und α, β die Coordinaten des Mittelpunktes bedeuten.

Wird dieſer Kreis zur Directrix genommen, ſo hat man durch Vergleichung mit der Directrix (3)

$a=1\ ;\ b=0\ ;\ c=1\ ;\ d=-\beta\ ;\ e=-\alpha\ ;\ f=\beta^2+\alpha^2-r^2$,

und dieſe Werthe in die Gleichung (5) geſetzt, geben

$$n^2(u-\beta)^2-2n(t-\alpha)(\beta u+\alpha t+r^2-\beta^2-\alpha^2)-m(\beta u+\alpha t+r^2-\beta^2-\alpha^2)^2=0$$

als Gleichung der reciproken Curve. Da es nun nicht auf die Lage dieſer Curve ankommt, ſo vereinfachen wir die eben gefundene Gleichung durch Transformation der Coordinaten, indem wir $y+\beta$ für u und $x+\alpha$ für t ſetzen. Dies giebt

$$n^2y^2-2nx(\beta y+\alpha x+r^2)-m(\beta y+\alpha x+r^2)^2=0$$

oder

$$(m\beta^2-n^2)y^2+2(m\alpha+n)\beta xy+(m\alpha+2n)\alpha x^2+2mr^2\beta y+2(m\alpha+n)r^2x+mr^4=0. \qquad (7)$$

Soll dieſe Curve immer dieſelbe ſeyn, ohne gerade dieſelbe Lage zu haben, ſo müſſen ihre Achſen conſtante Längen haben. Bezeichnet man dieſe Achſen durch 2A u. 2B, ſo iſt (§. 29. F. 19. 20.), da der Coordinatenwinkel ein rechter,

$$A^2+B^2=\frac{\varphi\chi}{\psi^2}\ ;\ A^2B^2=-\frac{\chi^2}{\psi^3}\ , \qquad (8)$$

wo $\varphi=a+c\ ;\ \chi=\frac{(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)}{a}\ ;\ \psi=b^2-ac$,

und

$a=m\beta^2-n^2\ ;\ b=(m\alpha+n)\beta\ ;\ c=(m\alpha+2n)\alpha\ ;\ d=mr^2\beta\ ;\ e=(m\alpha+n)r^2\ ;\ f=mr^4$

iſt. Zwiſchen den Gleichungen (8) müßte nun r, welches von einer Directrix zur andern ſich ändert, eliminirt werden; da aber, wie leicht zu ſehen iſt, nur χ von r abhängt, ſo eliminiren wir dieſe Größe und erhalten auf der Stelle

$$\psi=-\frac{A^2B^2}{(A^2+B^2)^2}\varphi^2\ ,$$

oder, wenn wir für ψ und φ die ihnen zukommenden Werthe ſetzen,

$$n^2(\beta^2+m\alpha^2+2n\alpha)=-\frac{A^2B^2}{(A^2+B^2)^2}\{m(\beta^2+\alpha^2)+2n\alpha-n^2\}^2\ , \qquad (9)$$

welches die Gleichung des gesuchten Ortes ist, in welcher A und B die Achsen der reciproken Curve bezeichnen. §. 44.

Aus dieser Lösung lassen sich einige Folgerungen ziehen, die wir nicht übergehen wollen.

Sieht man nämlich die Achsen 2A u. 2B der reciproken Curve als gegeben an, so sind drei Fälle zu unterscheiden; entweder ist diese reciproke Curve eine Hyperbel, und dann ist eine der Größen A^2 und B^2 negativ, oder sie ist eine Parabel, und dann sind A^2 und B^2 unendlich, oder diese Curve ist eine Ellipse und dann sind A^2 und B^2 beide positiv.

In dem ersten Falle, wenn A^2 positiv und B^2 negativ ist, setzen wir, wie in §. 29., $A^2 = a^2$ und $B^2 = -b^2$; alsdann ist

$$-\frac{A^2B^2}{(A^2+B^2)^2} = \frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)^2} = \left(\frac{ab}{a^2-b^2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a}{b}}{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)^2,$$

oder, wenn man $\frac{a}{b} = tang\frac{1}{2}\delta$ setzt,

$$-\frac{A^2B^2}{(A^2+B^2)^2} = \left(\frac{tang\frac{1}{2}\delta}{1-tang^2\frac{1}{2}\delta}\right)^2 = \tfrac{1}{4}tang^2\delta\,.$$

Dieser Ausdruck in die Gleichung (9) eingeführt, giebt

$$4n^2(\beta^2+m\alpha^2+2n\alpha) = tang^2\delta\{m(\beta^2+\alpha^2)+2n\alpha-n^2\}^2\,, \quad (10)$$

welches die Gleichung (9) des §. 38. ist; und hieraus ergiebt sich, wenn man erwägt, daß $+\frac{b}{a}$ und $-\frac{b}{a}$ die trigonometrischen Tangenten der Winkel sind, welche die Asymptoten mit der Hauptachse der Hyperbel bilden (§. 29.), und daß folglich δ dem Asymptotenwinkel gleich ist:

Der Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche eine solche Lage und Größe haben, daß die reciproken Curven einer gegebenen Linie zweiten Grades immer dieselben Hyperbeln sind, welcher von diesen Kreisen auch zur Directrix genommen werden mag, ist diejenige Curve, welche von dem Scheitel eines Winkels beschrieben wird, dessen Schenkel die gegebene Linie zweiten Grades berühren und der dem Asymptotenwinkel der Hyperbel gleich ist;

oder auch:

Nimmt man auf derjenigen Curve, welche der Scheitel

§. 44. eines constanten Winkels beschreibt, dessen Schenkel eine gegebene Linie zweiten Grades berühren, irgend einen Punkt zum Mittelpunkte eines Kreises und diesen Kreis zur Directrix, so ist die reciproke Curve der gegebenen Linie zweiten Grades eine Hyperbel, deren Asymptotenwinkel dem beweglichen constanten Winkel gleich ist, wo auch der Mittelpunkt des Kreises auf der Curve der Scheitel, und wie groß auch sein Radius angenommen seyn mag.

Da die gegebene Linie zweiten Grades wiederum die reciproke Curve der genannten Hyperbeln ist, wenn man einen der in Rede stehenden Kreise zur Directrix nimmt, so ergiebt sich ferner:

Die reciproke Curve einer gegebenen Hyperbel in Beziehung auf einen beliebigen zur Directrix genommenen Kreis ist eine Linie zweiten Grades, die so liegt, daß man von dem Mittelpunkte des Kreises aus immer zwei Tangenten an die Curve ziehen kann, die dann einen Winkel einschließen, der dem Asymptotenwinkel der gegebenen Hyperbel gleich ist.

In dem zweiten Falle, wenn A^2 und B^2 unendlich sind, oder wenn die reciproke Curve immer dieselbe Parabel seyn soll, wird der Ausdruck $-\frac{A^2B^2}{(A^2+B^2)^2} = \frac{\infty}{\infty}$. Statt den wahren Werth desselben aufzusuchen, gehen wir auf die Gleichung (7) der reciproken Curve zurück. Soll diese nämlich eine Parabel seyn, so muß der für ψ sich ergebende Ausdruck gleich Null seyn; dies giebt, statt der Gleichung (9),

$$\beta^2 + m\alpha^2 + 2n\alpha = 0 ,$$

also die Gleichung der gegebenen Linie zweiten Grades (4) wieder; und hieraus ergiebt sich also:

Der Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, von denen ein jeder, zur Directrix genommen, immer dieselben Parabeln als reciproke Curven einer gegebenen Linie zweiten Grades giebt, ist diese gegebene Linie selbst;

oder auch:

Nimmt man auf einer gegebenen Linie zweiten Grades irgend einen Punkt zum Mittelpunkte eines Kreises, und diesen Kreis zur Directrix, so ist die reciproke Curve der gegebenen Linie zweiten Grades eine Parabel.

Da die gegebene Linie zweiten Grades hinwiederum die reciproke Curve der genannten Parabeln ist, wenn man einen der in Rede stehenden Kreise zur Directrix nimmt, so ergiebt sich ferner: §. 44.

Die reciproke Curve einer gegebenen Parabel in Beziehung auf einen beliebigen, zur Directrix genommenen Kreis, ist eine Linie zweiten Grades, welche durch den Mittelpunkt dieses Kreises geht.

In dem dritten Falle, wenn A^2 und B^2 beide positiv sind, und die reciproke Curve der gegebenen also immer dieselbe Ellipse seyn soll, ist $-\frac{A^2B^2}{(A^2+B^2)^2}$ eine negative Größe und kann folglich nie das Quadrat der Tangente eines reellen Winkels seyn. Die Gleichung (9) kann also in diesem Falle nie auf die Form (10) gebracht werden, und der Mittelpunkt des in Rede stehenden Kreises liegt also nie auf dem Ort des Scheitels eines umschriebenen Winkels.

Nimmt man in der Ebene einer Linie zweiten Grades einen Punkt, von dem aus sich nicht zwei Tangenten an diese gegebene Linie ziehen lassen, zum Mittelpunkte eines Kreises und diesen Kreis zur Directrix, so ist die reciproke Curve der gegebenen eine Ellipse; und umgekehrt:

Die reciproke Curve einer gegebenen Ellipse in Beziehung auf einen beliebigen, zur Directrix genommenen, Kreis ist eine Linie zweiten Grades, die so liegt, daß man von dem Mittelpunkte des Kreises aus nicht zwei Tangenten an die Curve ziehen kann.

Es bleibt noch zu untersuchen übrig, welches der Ort der Mittelpunkte sey, wenn $A^2 = B^2$, d. i. wenn die reciproken Curven der gegebenen, Kreise seyn sollen. Für diesen besondern Fall hat man

$$-\frac{A^2B^2}{(A^2+B^2)^2} = -\frac{1}{4},$$

und die Gleichung (9) ist dann also

$$4n^2(\beta^2+m\alpha^2+2n\alpha)+\{m(\beta^2+\alpha^2)+2n\alpha-n^2\}^2 = 0 . \quad (11)$$

Diese Gleichung läßt sich, wie man leicht finden wird, in folgende Factoren zerlegen

$$\frac{1}{m^2}\{m^2\beta^2+(m\alpha+n+n\sqrt{1-m})^2\}\{m^2\beta^2+(m\alpha+n-n\sqrt{1-m})^2\} = 0 . \quad (12)$$

§. 44. Ist die gegebene Linie zweiten Grades (4) eine Hyperbel, so ist m negativ, also $1-m$ eine positive Größe und folglich $\sqrt{1-m}$ reell; ist diese Curve eine Parabel, so ist $m = 0$, also $\sqrt{1-m} = 1$ und ebenfalls reell; ist diese Linie endlich eine Ellipse, so wollen wir annehmen, was jedenfalls geschehen kann, daß der Scheitel der größern Achse zum Anfangspunkte der Coordinaten gewählt sey; dann ist m der Quotient des Quadrats der kleinern Achse dividirt durch das Quadrat der größern (§. 29. S. 114.), also kleiner als 1, daher wieder $1-m$ positiv und $\sqrt{1-m}$ reell. Da nun also die, in den angegebenen Factoren vorkommenden, Constanten reell und jeder derselben die Summe zweier Quadrate ist, so drücken diese Factoren keine Linien, sondern Punkte aus, und zwar sind die Coordinaten dieser Punkte

$$\left\{\begin{matrix}\beta = 0 \\ \alpha = -\frac{n}{m}(1+\sqrt{1-m})\end{matrix}\right\} \text{ und } \left\{\begin{matrix}\beta = 0 \\ \alpha = -\frac{n}{m}(1-\sqrt{1-m})\end{matrix}\right\}.$$

Transformirt man die Gleichung (4), indem man $x+\frac{n}{m}(1+\sqrt{1-m})$ oder $x+\frac{n}{m}(1-\sqrt{1-m})$ statt x setzt, so kommt

$$y^2+x^2 = (\sqrt{1-m}.x+n)^2 \text{ oder } y^2+x^2 = (\sqrt{1-m}.x-n)^2,$$

und hieraus sieht man (§. 33.), daß die Gleichung (11) oder (12) die beiden Brennpunkte der Curve (4) ausdrückt. Wir haben daher die folgenden Sätze:

Nimmt man einen Brennpunkt einer gegebenen Linie zweiten Grades zum Mittelpunkte eines Kreises und diesen Kreis als Directrix, so ist die reciproke Curve der gegebenen Linie wiederum ein Kreis.

Die reciproke Curve eines Kreises in Beziehung auf einen andern zur Directrix genommenen Kreis ist eine Linie zweiten Grades, deren einer Brennpunkt mit dem Mittelpunkte des zuletzt genannten Kreises zusammenfällt.

Vermittelst dieser letzten Sätze kann man aus Eigenschaften von Kreisen andere Eigenschaften confocaler Linien zweiten Grades, d. i. Linien zweiten Grades, welche einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben, ableiten. Als Beispiel diene Folgendes:

Die gemeinschaftlichen Sehnen je zweier von drei Kreisen schneiden sich in einem Punkte (§. 23.). Daraus läßt sich der folgende Satz ableiten: §. 44.

Die Scheitel der Winkel, welche je zweien von drei confocalen Linien zweiten Grades gemeinschaftlich umschrieben sind, liegen in gerader Linie.

Nimmt man nämlich den gemeinschaftlichen Brennpunkt dieser drei Curven zum Mittelpunkte eines Kreises und diesen Kreis zur Directrix, so sind die reciproken Curven dieser drei Linien zweiten Grades drei Kreise; jeder gemeinschaftlichen Tangente zweier von diesen Linien entspricht ein gemeinschaftlicher Punkt oder Durchschnittspunkt zweier der drei Kreise; jedem Scheitel eines zweien confocalen Linien umschriebenen Winkels entspricht eine Verbindungslinie zweier Durchschnittspunkte oder eine gemeinschaftliche Sehne, und da diese Sehnen sich in einem Punkte schneiden, so müssen die entsprechenden Punkte der reciproken Figur, d. i. die Scheitel der umschriebenen Winkel in gerader Linie liegen.

§. 45.

Zwei gegebene Linien zweiten Grades können immer als collineare Figuren angesehen werden. Denn wenn

$$au^2 + 2btu + ct^2 + 2du + 2et + f = 0\,, \qquad (1)$$
$$a'y^2 + 2b'xy + c'x^2 + 2d'y + 2e'x + f' = 0 \qquad (2)$$

die Gleichungen dieser beiden Curven sind, so erhält man, durch Substitution der Ausdrücke (2) des §. 11. für u und t in die Gleichung (1), eine Gleichung vom zweiten Grade, welche mit der Gleichung (2) identificirt werden kann, woraus sich fünf Bedingungsgleichungen zwischen den acht noch unbestimmten Größen $m', n', p', m'', n'', p'', m$ und n ergeben, so daß man noch drei dieser Größen beliebig annehmen kann, wenn man es nur so einrichtet, daß die übrigen fünf Größen dadurch keine imaginären Werthe bekommen.

Aufgabe [77]. Zwei gegebene Linien zweiten Grades berühren die Schenkel eines und desselben Winkels. Man soll untersuchen, unter welchen Bedingungen beide Curven als collineare und collinearliegende Figuren, und der Scheitel des Winkels als Collineationscentrum angesehen werden könne.

Es seyen (1) und (2) die Gleichungen der beiden gegebenen, auf das-

§. 45. selbe Coordinatensystem bezogenen Curven. Setzt man in (1), zufolge §. 12. (F. 1.),

$$u = \frac{py}{my+nx+1} \quad \text{und} \quad t = \frac{px}{my+nx+1},$$

so kommt

$$(ap^2+2dmp+fm^2)y^2+2(bp^2+dnp+emp+fmn)xy+(cp^2+2enp+fn^2)x^2 +2(dp+fm)y+2(ep+fn)x+f = 0 ; \quad (3)$$

und diese Gleichung drückt eine Curve aus, welche der Curve (1) collinearverwandt und mit ihr collinear-liegend ist, so daß beide den Anfangspunkt der Coordinaten zum gemeinschaftlichen Collineationspunkt haben. Soll diese Gleichung aber die zweite gegebene Curve ausdrücken, so müssen die Gleichungen (2) und (3) identisch seyn, was folgende fünf Bedingungsgleichungen giebt:

$$(ap^2+2dmp+fm^2)f' = a'f, \ (4) \ ; \ (cp^2+2enp+fn^2)f' = c'f, \ (5)$$

$$\{bp^2+(dn+em)p+fmn\}f' = b'f, \quad (6)$$

$$(dp+fm)f' = d'f, \ (7) \ ; \ (ep+fn)f' = e'f. \quad (8)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich

$$m = \frac{d'}{f'} - \frac{d}{f}p \quad ; \quad n = \frac{e'}{f'} - \frac{e}{f}p,$$

und diese Ausdrücke, in die Gleichung (6) substituirt, geben

$$p^2 = \frac{(b'f'-d'e')f^2}{(bf-de)f'^2}.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung $(bf-de)$ und $(b'f'-d'e')$ respective durch h und h', so ist demnach

$$p = \frac{fh'^2}{f'h^2}, \ (9) \ ; \ m = \frac{d'h^2-dh'^2}{f'h^2}, \ (10) \ ; \ n = \frac{e'h^2-eh'^2}{f'h^2}, \ (11)$$

und diese Ausdrücke, in die Gleichungen (4) und (5) gesetzt, geben

$$(af-d^2)h'-(a'f'-d'^2)h = 0, \ (12) \ ; \ (cf-e^2)h'-(c'f'-e'^2)h = 0. \ (13)$$

Es kommt jetzt nur noch darauf an, zu untersuchen: *erstens* ob die beiden letzten Gleichungen befriedigt werden, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten im Scheitel eines, beiden Curven (1) und (2) gemeinschaftlich umschriebenen, Winkels liegt, und *zweitens* ob die Größen p, m und n in Folge der Gleichungen (9, 10, 11) reelle Werthe bekommen, wenn dieselbe Voraussetzung Statt findet. Damit dies auf die einfachste Weise geschehe, wollen wir annehmen, die Schenkel des umschriebenen Winkels seyen die Coordinatenachsen, auf welche sich die Gleichungen (1) und (2) beziehen, und

also der Scheitel dieses Winkels der Anfangspunkt der Coordinaten. Die Gleichungen der beiden Schenkel des Winkels sind alsdann $u = 0$ und $t = 0$ oder $y = 0$ und $x = 0$, und wenn diese Schenkel, wie vorausgesetzt wird, die Curven (1) und (2) berühren, so müssen deren Gleichungen, wenn man darin nach einander x und y, t und u gleich Null setzt, zwei gleiche Wurzeln haben, d. i. es müssen die Wurzeln der Gleichungen §. 45.

$au^2+2du+f=0$; $a'y^2+2d'y+f'=0$; $ct^2+2et+f=0$; $c'x^2+2e'x+f'=0$

gleich seyn. Dies giebt die Bedingungen

$$af-d^2=0 \; ; \; a'f'-d'^2=0 \; ; \; cf-e^2=0 \; ; \; c'f'-e'^2=0 \, , \quad (14)$$

und man sieht also, daß bei dem gewählten Coordinatensystem die Gleichungen (12) u. (13) befriedigt sind. Was nun die Werthe von p, m und n betrifft, so werden diese reell seyn, wenn $\frac{h'^2}{h^3}$ eine reelle, also $\frac{h'}{h}$ eine positive Größe ist. Das Zeichen des Ausdrucks $\frac{h'}{h}$ hängt aber von der Lage der beiden Curven in Beziehung auf den umschriebenen Winkel ab. Hier sind nämlich drei Fälle möglich; entweder es liegen beide Curven innerhalb desselben Winkels, oder die eine liegt innerhalb des Winkels und die andere innerhalb des Scheitelwinkels, oder die eine liegt innerhalb des Winkels und die andere innerhalb eines Nebenwinkels. Zieht man nun durch den Scheitel des Winkels eine Gerade, so wird sie in den beiden zuerst genannten Fällen beide Curven zugleich schneiden oder zugleich nicht schneiden; in dem zuletzt erwähnten Falle aber wird sie nur eine Curve schneiden und die andere nicht schneiden. Die Gleichung einer durch den Scheitel des Winkels gehenden Geraden ist, da dieser Punkt zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen worden,

$$u = gt \quad \text{oder} \quad y = gx \; ;$$

und wenn man u und y vermittelst dieser Gleichung aus den Gleichungen (1) und (2), um die Abscissen der Durchschnittspunkte zu finden, eliminirt, so ergiebt sich

$(ag^2+2bg+c)t^2+2(dg+e)t+f=0$; $(a'g^2+2b'g+c')x^2+2(d'g+e')x+f=0$.

Die Wurzeln dieser Gleichungen sind aber reell oder imaginär, je nachdem die Ausdrücke

$$(dg+e)^2-(ag^2+2bg+c)f \; ; \; (d'g+e')^2-(a'g^2+2b'g+c')f$$

positiv oder negativ sind. Diese Ausdrücke reduciren sich nun in Folge der Gleichungen (14) auf

§. 45.

$$2(de-bf)g \quad ; \quad 2(d'e'-b'f')g \,,$$

oder auf

$$-2hg \quad ; \quad -2h'g \,,$$

und es werden also beide Curven von der durch den Anfangspunkt gezogenen Geraden zugleich geschnitten oder zugleich nicht geschnitten, wenn h und h' gleiche Zeichen haben, aber es wird nur eine Curve geschnitten, wenn h und h' verschiedene Zeichen haben. Mit andern Worten die erste oder zweite Lage der Curven findet Statt, wenn $\frac{h'}{h}$ eine positive Größe, und die Curven haben die dritte Lage, wenn $\frac{h'}{h}$ eine negative Größe ist. Die Werthe von p, m und n sind also bei den beiden ersten Lagen reell und bei der dritten imaginär.

Es ergiebt sich demnach aus unserer Analyse, daß zwei Linien zweiten Grades, welche die Schenkel eines und desselben Winkels berühren, und innerhalb des Winkels oder innerhalb des Winkels und seines Scheitelwinkels liegen, immer als collineare und collinear-liegende Figuren betrachtet werden können, deren Collineationscentrum der Scheitel des Winkels ist, und zwar auf zwiefache Weise, weil $h^{\frac{1}{2}}$ und $h'^{\frac{1}{2}}$ als Wurzelgrößen mit verschiedenen Vorzeichen genommen werden und dem p, m und n demnach doppelte Werthe beigelegt werden können.

Die Gleichung der Collineationsachse findet man durch Substitution der Werthe von p, m und n in (§. 13. G. 1.)

$$my+nx+1-p = 0 \,,$$

welches, wenn man nach einander beide Vorzeichen nimmt,

$$(d'h^{\frac{1}{2}}-dh'^{\frac{1}{2}})y+(e'h^{\frac{1}{2}}-eh'^{\frac{1}{2}})x+f'h^{\frac{1}{2}}-fh'^{\frac{1}{2}} = 0 \,, \qquad (15)$$

$$(d'h^{\frac{1}{2}}+dh'^{\frac{1}{2}})y+(e'h^{\frac{1}{2}}+eh'^{\frac{1}{2}})x+f'h^{\frac{1}{2}}+fh'^{\frac{1}{2}} = 0 \,, \qquad (16)$$

giebt.

Addirt und subtrahirt man diese Gleichungen, so kommt nach einander

$$d'y+e'x+f' = 0 \quad ; \quad dy+ex+f = 0 \,,$$

welches die Polaren des Anfangspunktes oder Collineationspunktes, und folglich die Berührungssehnen des umschriebenen Winkels in beiden Curven sind. Hieraus ergiebt sich, daß beide Collineationsachsen sich auf diesen Berührungssehnen schneiden, und daß also der Durchschnittspunkt der Collineationsachsen und der Durchschnittspunkt der beiden Berührungssehnen zusammen fallen.

Wenn

Wenn eine der beiden Curven (1) und (2) eine oder beide Collineationsachsen schneidet, so schneidet auch die andere Curve diese eine oder beide Collineationsachsen und zwar in denselben Punkten; denn einem auf der Collineationsachse liegenden Punkte eines Systems entspricht ein ebenfalls auf der Collineationsachse liegender Punkt des andern Systems, der mit jenem Punkte zusammenfällt, wenn beide Systeme collinear liegen. Man kann durch eine einfache Rechnung die eben ausgesprochene Behauptung bestätigen. §. 45.

Setzt man nämlich der Einfachheit wegen, $f = 1$ und $f' = 1$, was eben so viel ist, als ob man die Gleichungen (1) und (2) respective durch f und f' dividirt hätte, so hat man in Folge der Gleichungen (14) $a = d^2$, $a' = d'^2$, $c = e^2$, $c' = e'^2$, und die Gleichungen (1) und (2) lassen sich dann auf die Formen

$$(dy+ex+1)^2+2hxy = 0 \quad ; \quad (d'y+e'x+1)^2+2h'xy = 0$$

bringen, wenn man für t u. u respective x u. y setzt. Die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Curven, welche diese beiden Gleichungen befriedigen, werden auch der Differenz dieser Gleichungen, wenn sie respective mit h' und h multiplicirt werden, genugthun; sie werden also die Gleichung

$$h(d'y+e'x+1)^2-h'(dy+ex+1)^2 = 0$$

befriedigen. Diese Gleichung aber läßt sich wie folgt

$$\{h^{\frac{1}{2}}(d'y+e'x+1)-h'^{\frac{1}{2}}(dy+ex+1)\}\{h^{\frac{1}{2}}(d'y+e'x+1)+h'^{\frac{1}{2}}(dy+ex+1)\} = 0$$

zerlegen, und drückt, wie man sieht, die beiden Collineationsachsen (15) u. (16) aus; folglich gehen die Collineationsachsen durch die (reellen oder imaginären) Durchschnitte der beiden Curven, was vorher behauptet worden ist.

So wie es für zwei Linien zweiten Grades, welche die angegebene Lage haben, zwei Collineationsachsen giebt, so giebt es auch zwei Gegenachsen im Systeme xy und zwei Gegenachsen im Systeme tu. Ihre Gleichungen, die in allgemeinen Zeichen (§. 13. S. 2, §. 14. S. 2) durch

$$my+nx+1 = 0 \quad \text{und} \quad mu+nt-p = 0$$

ausgedrückt worden, sind

$$(d'h^{\frac{1}{2}}-dh'^{\frac{1}{2}})y+(e'h^{\frac{1}{2}}-eh'^{\frac{1}{2}})x+f'h^{\frac{1}{2}} = 0\,, \qquad (17)$$
$$(d'h^{\frac{1}{2}}+dh'^{\frac{1}{2}})y+(e'h^{\frac{1}{2}}+eh'^{\frac{1}{2}})x+f'h^{\frac{1}{2}} = 0\,, \qquad (18)$$
$$(d'h^{\frac{1}{2}}-dh'^{\frac{1}{2}})u+(e'h^{\frac{1}{2}}-eh'^{\frac{1}{2}})t-fh'^{\frac{1}{2}} = 0\,, \qquad (19)$$
$$(d'h^{\frac{1}{2}}+dh'^{\frac{1}{2}})u+(e'h^{\frac{1}{2}}+eh'^{\frac{1}{2}})t+fh'^{\frac{1}{2}} = 0\,. \qquad (20)$$

Die Gegenachsen (17) u. (19) sind der Collineationsachse (15), und die

§. 45. Gegenachsen (18) u. (20) sind der Collineationsachse (16) parallel. Da die Gleichungen (17) u. (18) von denjenigen Werthen von x u. y, welche die Gleichungen $d'y+e'x+f=0$ und $dy+ex=0$, die Gleichungen (19) u. (20) aber von denjenigen Werthen von t u. u befriedigt werden, welche den Gleichungen $du+et+f=0$ und $d'u+e't=0$ Genüge leisten; so ergiebt sich, daß die Gegenachsen (17) u. (18) sich in demselben Punkte schneiden, in welchem die Berührungssehne des umschriebenen Winkels in der Curve (2) von einer, durch den Scheitel dieses Winkels der Berührungssehne in der Curve (1) parallel laufenden Geraden geschnitten wird; und daß die Gegenachsen (19) u. (20) durch denjenigen Punkt gehen, in welchem die Berührungssehne des umschriebenen Winkels in der Curve (1) von einer, durch den Scheitel dieses Winkels der Berührungssehne in der Curve (2) parallel gezogenen Geraden getroffen wird.

Aufgabe [78]. Es soll untersucht werden, ob zwei confocale Linien zweiten Grades als collineare und collinear-liegende Figuren, und ihr gemeinschaftlicher Brennpunkt als Collineationscentrum angesehen werden kann.

Die Gleichungen zweier confocalen Linien zweiten Grades können immer, wenn der gemeinschaftliche Brennpunkt zum Anfangspunkte der (rechtwinkligen) Coordinaten genommen wird, zufolge des §. 33. (S. 1) auf die Form

$u^2+t^2=k^2(au+bt+1)^2$, (21) und $y^2+x^2=k'^2(a'y+b'x+1)^2$, (22)

gebracht werden, wo denn $au+bt+1=0$ und $a'y+b'x+1=0$ die Gleichungen zweier Leitlinien der beiden Curven sind.

Setzt man, wie in der vorigen Aufgabe, in der Gleichung (21)

$$u=\frac{py}{my+nx+1}\quad;\quad t=\frac{px}{my+nx+1},$$

so kommt

$$y^2+x^2=\frac{k^2}{p^2}\{(ap+m)y+(bp+n)x+1\}^2.$$

Soll diese Gleichung mit der Gleichung (22) identisch seyn, so müssen folgende drei Bedingungsgleichungen befriedigt werden:

$$ka+\frac{km}{p}=\pm k'a'\quad;\quad kb+\frac{kn}{p}=\pm k'b'\quad;\quad \frac{k}{p}=\pm k'.$$

Diese Gleichungen geben

$$p = \pm\frac{k}{k'} \quad ; \quad m = \frac{k'a' \mp ka}{k'} \quad ; \quad n = \frac{k'b' \mp kb}{k'} ,$$ §. 45.

also doppelte reelle Werthe, aus welchen man für die Gleichungen der Collineationsachsen

$(k'a'-ka)y+(k'b'-kb)x+k'-k=0$; $(k'a'+ka)y+(k'b'+kb)x+k'+k=0$

findet. Diese Gleichungen lassen sich auch durch bloße Subtraction der beiden Gleichungen

$y^2+x^2 = k^2(ay+bx+1)^2$, (21) ; $y^2+x^2 = k'^2(a'y+b'x+1)^2$, (22)

finden; denn man erhält dadurch

$k'^2(a'y+b'x+1)^2 - k^2(ay+bx+1)^2 \equiv$

$\{k'(a'y+b'x+1)-k(ay+bx+1)\}\{k'(a'y+b'x+1)+k(ay+bx+1)\}=0$.

Die Gleichung einer jeden der beiden Collineationsachsen wird durch diejenigen Werthe von x u. y befriedigt, welche den Gleichungen

$$a'y+b'x+1 = 0 \quad \text{und} \quad ay+bx+1 = 0$$

zu gleicher Zeit genügen. Diese letztern sind aber die Gleichungen der Leitlinien der beiden Curven oder, was dasselbe ist, der Polaren ihres gemeinschaftlichen Brennpunktes; die Collineationsachsen schneiden sich daher im Durchschnitt dieser beiden Leitlinien. Es giebt nun wieder, wie in der vorigen Aufgabe, zwei Paar Gegenachsen, deren Gleichungen leicht aufgestellt werden können.

Wir müssen hierbei noch einen besondern Fall in Betrachtung ziehen, der eintritt, wenn beide Curven nicht nur denselben Brennpunkt, sondern auch gleiche Parameter haben. Der Parameter einer Linie zweiten Grades ist, zufolge des §. 33. (S. 133.), der Sehne gleich, welche durch den Brennpunkt geht und senkrecht auf der größern oder Hauptachse ist, oder, weil auch die Leitlinie senkrecht auf dieser Achse ist, welche durch den Brennpunkt der Leitlinie parallel gezogen ist. Die Gleichungen dieser Sehnen in den Curven (21) und (22) sind aber

$$au+bt = 0 \quad \text{und} \quad a'y+b'x = 0 ,$$

und die Coordinaten t'u' und x'y' derjenigen Punkte, in welchen sie respective die Curven schneiden, werden aus den Gleichungen

$$\left.\begin{matrix} u'^2+t'^2 = k^2(au'+bt'+1)^2 \\ au'+bt' = 0 \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} y'^2+x'^2 = k'^2(a'y'+b'x'+1)^2 \\ a'y'+b'x' = 0 \end{matrix}\right\}$$

gefunden werden können. Die unten stehenden Gleichungen reduciren die

§. 45. oben stehenden auf

$$u'^2+t'^2 = k^2 \quad \text{und} \quad y'^2+x'^2 = k'^2 .$$

Es sind aber $u'^2+t'^2$ und $y'^2+x'^2$ die Quadrate der in Rede stehenden halben Sehnen, und wenn diese einander gleich seyn, d. i. wenn die beiden Curven gleiche Parameter haben sollen, muß also $k^2 = k'^2$ seyn. Haben nun die beiden Curven gleiche Parameter, so ist $p = \pm\frac{k}{k'} = \pm 1$, und nimmt man das untere Vorzeichen, so entsprechen sich nicht nur je zwei Punkte der beiden Curven, welche mit dem Brennpunkte in gerader Linie liegen, sondern diese Punkte können auch mit einander verwechselt werden (§. 14.).

Hieraus ergiebt sich nun Folgendes:

Fig. 29. Zieht man durch den gemeinschaftlichen Brennpunkt F zweier confocalen Linien zweiten Grades, welche gleiche Parameter haben, zwei beliebige Gerade, von welchen die erste eine Curve in den Punkten a und α, und die andere Curve in a' und α', von welchen ferner die zweite Gerade jene Curve in b und β, und diese in b' und β' schneidet, so hat man vier Paare sich entsprechender Punkte, und zwar entsprechen sie einander auf doppelte Weise; nämlich es entsprechen einander

entweder die Punkte a u. a', b u. b', β u. β', α u. α',
oder die Punkte a u. α', b u. β', β u. b', α u. a'.

Für den ersten Fall ist $p = 1$ und die Collineationsachse L_1 geht durch den Collineationspunkt (§. 14.), d. i. durch den Brennpunkt; für den zweiten Fall ist $p = -1$, und die Punkte eines jeden der zuletzt genannten vier Paare können unter sich vertauscht werden. Es schneiden sich daher

die Geraden ab u. a'b', aβ u. a'β', bα u. b'α', $\beta\alpha$ u. $\beta'\alpha'$

auf der Collineationsachse L_1, welche durch den Brennpunkt F geht und eine gemeinschaftliche Sehne beider Curven bildet, in den Punkten p_1, p_2, p_3, p_4; und es schneiden sich ferner

die Geraden { ab u. $\alpha'\beta'$, aβ u. αb', bα u. β'a', $\beta\alpha$ u. b'a'
aβ' u. bα', ab' u. $\alpha'\beta$, ba' u. $\beta'\alpha$, βa' u. b'α

auf der Collineationsachse L_2, in den Punkten $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_8$.

Auf denselben Achsen L_1 und L_2 in den Punkten q_1, q_2, q_3, q_4 und $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ schneiden sich die Tangenten der Curven, welche durch die genannten sich entsprechenden Punkte gezogen sind, was sich eben so wie die ähnliche Behauptung in §. 41. darthun läßt.

Wenn die Parameter der beiden Curven nicht einander gleich sind, so liegen die Punkte $\pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8$ nicht auf der Collineationsachse L_2, auch geht alsdann die Collineationsachse L_1 nicht durch den Brennpunkt F. §. 45.

Man wird leicht einsehen, daß sich nach dem Resultate der Aufgabe (77) eine der Figur 29. ähnliche entwerfen läßt, wenn die beiden Linien zweiten Grades keinen Brennpunkt, wohl aber zwei Tangenten gemein haben und in demselben Winkel dieser Tangenten liegen. Der Scheitel dieses Winkels vertritt hier die Stelle des gemeinschaftlichen Brennpunktes. Man sieht ferner ein, daß zwei Ellipsen, die in demselben einfachen Viereck eingeschrieben sind, auf zwölf verschiedene Arten als collineare und collinear-liegende Figuren betrachtet werden können, indem man die vier Eckpunkte des Vierecks und die beiden Durchschnittspunkte der gegenüber liegenden Seiten zu Collineationspunkten nehmen kann, und alsdann für jeden Collineationspunkt zwei Collineationsachsen, zwei gemeinschaftliche Sehnen der beiden Curven, erhält. Es muß aber bemerkt werden, daß es nicht zwölf verschiedene, sondern nur sechs Collineationsachsen giebt, indem zu zwei und zwei Collineationspunkten dieselben beiden Collineationsachsen gehören.

Wie aber auch zwei Linien zweiten Grades liegen mögen, so können sie im Allgemeinen immer als collineare und collinear-liegende Figuren betrachtet werden, und zwar giebt es immer entweder zwei oder sechs Collineationspunkte. Wir können diese Untersuchung hier nicht fortsetzen, so wie wir es auch unterlassen müssen, die Sätze aufzustellen, welche sich aus den Resultaten der vorigen Aufgaben als einzelne Fälle ableiten lassen. Und nur das Eine wollen wir noch bemerken, daß nämlich, wenn ein Collineationspunkt zweier Linien zweiten Grades gegeben ist, die beiden zugehörigen Collineationsachsen, wie aus den vorigen Aufgaben erhellet, durch bloßes Ziehen gerader Linien construirt werden können. Wenn aber umgekehrt eine Collineationsachse gegeben ist, oder wie bei zwei Kreisen leicht gefunden werden mag, die zugehörigen Collineationspunkte auf folgende Weise bestimmt werden können. Man ziehe nämlich von einem beliebigen Punkte der Collineationsachse zwei Paar Tangenten an beide Curven, und verbinde jeden Berührungspunkt der einen Curve mit jedem Berührungspunkte der andern Curve durch gerade Linien. Diese Geraden bestimmen durch ihre Durchschnitte zwei Collineationspunkte. Sind von diesen Collineationspunkten aus zwei Tangenten an eine der beiden Curven zu ziehen möglich, so werden sie zugleich Tangenten der andern Curve seyn. Man sieht hieraus, daß die

§. 45. Collineationsachsen zur Construction der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Linien zweiten Grades angewandt werden können *).

§. 46.

Zwei Linien zweiten Grades, deren Gleichungen

$$au^2 + 2btu + ct^2 + 2du + 2et + f = 0\,, \qquad (1)$$
$$a'y^2 + 2b'xy + c'x^2 + 2d'y + 2e'x + f' = 0 \qquad (2)$$

seyen, sind nur dann als affine Figuren zu betrachten, wenn die Ausdrücke $b^2 - ac$ und $b'^2 - a'c'$ zu gleicher Zeit positiv, negativ oder null sind. Substituirt man nämlich in die Gleichung (1) für u und t die Ausdrücke (1) des §. 16., so erhält man die Gleichung einer Curve, welche der durch die Gleichung (1) ausgedrückten affin ist; soll nun diese Curve die durch die Gleichung (2) ausgedrückte seyn, so muß die, durch die genannte Substitution hervorgegangene Gleichung mit der Gleichung (2) identisch seyn. Durch das Identificiren dieser Gleichungen ergeben sich nun zwar nur fünf Bedingungen zur Bestimmung der sechs Größen m', n', p', m'', n'' und p'', indessen können diese Bedingungen doch nur dann erfüllt werden, wenn $b^2 - ac$ und $b'^2 - a'c'$ gleiche Zeichen haben. Denn die ersten drei Bedingungen sind, wenn man den Ausdruck $ap'^2 + 2bp'p'' + cp''^2 + 2dp' + 2ep'' + f$, der Kürze wegen, durch F bezeichnet, durch folgende Gleichungen

$$\frac{am'^2 + 2bm'm'' + cm''^2}{F} = \frac{a'}{f'}\,; \quad \frac{an'^2 + 2bn'n'' + cn''^2}{F} = \frac{c'}{f'}\,;$$
$$\frac{am'm'' + b(m'n'' + m''n') + cn'n''}{F} = \frac{b'}{f'}$$

ausgedrückt, und hieraus ergiebt sich

$$b'^2 - a'c' = \frac{f'^2(m'n'' - m''n')^2}{F^2}(b^2 - ac)\,.$$

Da nun der Coefficient von $b^2 - ac$, was auch m', n', m'', n'' seyn mögen, als ein Product von Quadraten nothwendig positiv ist, so kann diese Gleichung, welche Werthe man den eben genannten Größen auch beilegen mag, nur befriedigt werden, wenn $b^2 - ac$ und $b'^2 - a'c'$ gleiche Zeichen haben.

Man sieht hieraus, daß Ellipsen nur mit Ellipsen, Hyperbeln nur mit

*) Die Collineationsachsen zweier Linien zweiten Grades sind zuerst von Herrn Poncelet unter der Benennung „Sécantes réelles ou idéales communes“ betrachtet worden. M. s. Traité des propriétés projectives des figures.

Hyperbeln und Parabeln nur mit Parabeln in der Verwandtschaft der Affinität stehen können. §. 46.

Aufgabe [79]. Welche Relationen müssen zwischen den Coefficienten der Gleichungen (1) und (2) Statt finden, wenn diese zwei ähnliche und ähnlich-liegende Linien zweiten Grades ausdrücken sollen, unter der Voraussetzung, daß beide Curven auf dasselbe Coordinatensystem bezogen sind?

Wenn man die Coordinaten des Mittelpunktes der Curve (1) durch t', u' bezeichnet und die Gleichung transformirt, indem man $u = u'' + u'$, $t = t'' + t'$ setzt, so kommt (§. 29. S. 13.)

$$au''^2 + 2bt''u'' + ct''^2 + Q = 0 ,$$

und wenn man demnach wieder zu dem Anfangspunkte der alten Coordinaten zurückkehrt, dadurch, daß man für u'' und t'' respective $u - u'$ und $t - t'$ setzt, so hat man

$$a(u-u')^2 + 2b(t-t')(u-u') + c(t-t')^2 + Q = 0 . \qquad (3)$$

Eben so erhält, wenn x', y' die Coordinaten des Mittelpunktes der Curve (2) bedeuten, die Gleichung dieser Curve die Form

$$a'(y-y') + 2b'(x-x')(y-y') + c'(x-x')^2 + Q' = 0 . \qquad (4)$$

Beide Gleichungen (3) und (4) beziehen sich noch auf das alte Coordinatensystem, und es ist (§. 29. Aufg. 42.)

$$Q = \frac{(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)}{a(b^2-ac)} ; \quad Q' = \frac{(b'd'-a'e')^2-(b'^2-a'c')(d'^2-a'f')}{a'(b'^2-a'c')} .$$

Wenn nun beide Curven ähnlich seyn und ähnlich liegen sollen, so seyen α, β die Coordinaten des Aehnlichkeitspunktes. Man transformire die Gleichungen (3) u. (4), indem man diesen Aehnlichkeitspunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten nimmt, und also $u + \beta$ für u, $t + \alpha$ für t, $y + \beta$ für y und $x + \alpha$ für x setzt. Dadurch erhält man

$$a(u+U)^2 + 2b(t+T)(u+U) + c(t+T)^2 + Q = 0 , \qquad (5)$$
$$a'(y+Y)^2 + 2b'(x+X)(y+Y) + c'(x+X)^2 + Q' = 0 , \qquad (6)$$

wo, der Kürze wegen, U, T, Y und X respective für $\beta - u'$, $\alpha - t'$, $\beta - y'$ und $\alpha - x'$ gesetzt sind. Man setze ferner in (5), zufolge des §. 17.,

$$u = hy \quad ; \quad t = hx ,$$

und identificire die, sich daraus ergebenden, Gleichungen, so findet man folgende Bedingungen:

§. 46. $$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}\;;\;\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}\;;\;\frac{U}{h}=Y\;;\;\frac{cT}{ah}=\frac{c'}{a'}X\;;\;\frac{Q}{ah^2}=\frac{Q'}{a'}\,.$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen sind von α, β und h unabhängig, und aus der letzten Gleichung findet man

$$h=\pm\sqrt{\frac{a'Q}{aQ'}}\,, \qquad (7)$$

so daß also h nur dann reell ist, wenn a'Q und aQ' oder, was dasselbe ist, wenn $\frac{Q}{a}$ und $\frac{Q'}{a'}$ von gleichen Zeichen sind. Setzt man für Q und Q' die oben genannten Ausdrücke, so bekommt man zwei Brüche, deren Nenner $a^2(b^2-ac)$ und $a'^2(b'^2-a'c')$ sind und die, weil a^2 und a'^2 nothwendig positiv, b^2-ac und b'^2-ac aber gleiche Zeichen haben, wenn die ersten beiden Bedingungsgleichungen befriedigt werden, selbst nur von gleichen Zeichen seyn werden, wenn ihre Zähler gleiche Zeichen haben. Wir haben demnach als Bedingungen für die Aehnlichkeit und für das Aehnlich-Liegen der Curven (1) und (2)

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \qquad (8)$$

und

$\{(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)\}$ mit $\{(b'd'-a'e')^2-(b'^2-a'c')(d'^2-a'f')\}$ (9)

von gleichem Zeichen.

Werden diese Bedingungen erfüllt, so ergiebt sich aus der dritten und vierten Bedingungsgleichung, da $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$ ist,

$$U=hY \quad ; \quad T=hX\,, \qquad (10)$$

und vermittelst dieser Gleichungen können die Coordinaten α, β des Aehnlichkeitspunktes bestimmt werden. Da aber der Werth (7) von h mit doppeltem Zeichen zu nehmen ist, so wird man, wie bei zwei Kreisen, zwei Aehnlichkeitspunkte erhalten, und da ferner $-T$, $-U$, $-X$, $-Y$ nichts anders sind als die Coordinaten des Mittelpunktes der Curve (1) und der Curve (2) in Beziehung auf die, durch den Aehnlichkeitspunkt gehenden, Coordinatenachsen, so zeigt die, durch Elimination von h hervorgehende, Gleichung

$$\frac{U}{Y}=\frac{T}{X}\,,$$

daß die Mittelpunkte beider Curven mit den Aehnlichkeitspunkten in gerader

Linie liegen, wie denn auch aus den Gleichungen (10) selbst hervorgeht, daß diese Mittelpunkte einander entsprechen. §. 46.

Die Gleichung (18) des §. 29., durch welche die Winkel bestimmt werden, die die Achsen der Curve mit der Abscissenachse bilden, ist, in Folge der Gleichungen (8), für beide Curven (1) u. (2) dieselbe; diese Winkel sind daher in beiden Curven einander gleich; folglich sind die beiden Achsen der einen Curve den beiden Achsen der andern parallel; mithin sind sie einander entsprechende Gerade (§. 17.), und demnach sind ihre Durchschnittspunkte mit den Curven, nämlich die Scheitel derselben, sich entsprechende Punkte; somit stehen die Achsen beider Curven in demselben Verhältniß zu einander.

Zwei ähnliche und ähnlich-liegende Linien zweiten Grades können in nicht mehr als zwei Punkten sich schneiden. Denn nach Demjenigen, was in der letzten Aufgabe sich ergeben hat, sind die Coefficienten der drei ersten Glieder der Gleichung von einer dieser Curven Gleichvielfache der Coefficienten derselben Glieder der Gleichung von der andern Curve. Zieht man also diese Gleichungen, nachdem man eine jede durch den Coefficienten ihres ersten Gliedes dividirt hat, von einander ab, so verschwinden die Glieder der zweiten Dimension, und es bleibt nur eine Gleichung vom ersten Grade übrig. Da nun alle diejenigen Werthe der Coordinaten, welche die Gleichungen der beiden Curven zugleich befriedigen oder, mit andern Worten, die Coordinaten der Durchschnittspunkte auch diese Gleichung vom ersten Grade befriedigen müssen, so sind alle Durchschnittspunkte beider Curven in der, durch die zuletzt genannte Gleichung ausgedrückten Geraden enthalten, und es existiren demnach nie mehr als zwei solcher Durchschnittspunkte (§. 35.) *).

*) Man sieht, daß zwei Linien zweiten Grades, in deren Gleichungen die Coefficienten der drei ersten Glieder einander gleich sind, oder gleich gemacht werden können, sich ebenfalls in nicht mehr als zwei Punkten schneiden, wenn sie auch keine ähnliche und ähnlich-liegende Curven sind. Wir bemerken bei dieser Gelegenheit, daß zwei Ellipsen oder Parabeln, deren Gleichungen die Bedingung (8) erfüllen, auch die Bedingung (9) erfüllen werden; daß dies aber bei zwei Hyperbeln nicht der Fall zu seyn braucht. Zwei Ellipsen oder Parabeln sind daher immer ähnlich und ähnlich-liegend, wenn nur die Bedingung (8) erfüllt ist. Zwei Hyperbeln aber sind weder ähnlich noch ähnlich-liegend, wenn außer den Gleichungen (8) nicht auch die Bedingung (9) erfüllt wird; sie sind alsdann in Asymptotenwinkeln enthalten, die einander zu zwei rechten ergänzen, und es verhält sich in der einen Curve die Hauptachse zur Nebenachse umgekehrt wie die Hauptachse zur Nebenachse in der andern.

§. 46. Wir bemerken noch, daß die Aehnlichkeitspunkte zweier ähnlichen und ähnlich-liegenden Linien zweiten Grades auch als Collineationspunkte der beiden Curven, und die Gerade, deren Gleichung durch Subtraction der beiden Gleichungen dieser Curven erhalten wird, als ihre Collineationsachse angesehen werden kann, gerade so wie es bei zwei Kreisen der Fall ist.

Aufgabe [80]. Es sind zwei ähnliche und ähnlich-liegende Linien zweiten Grades gegeben. Man soll den Ort des Punktes p finden, welcher so liegt, daß, wenn durch ihn eine beliebige Gerade gezogen wird, welche die eine Curve in zwei Punkten a, b und die andere in zwei Punkten a', b' schneidet, das Rechteck unter pa und pb gleich dem Rechtecke unter pa' und pb' sey.

Die Gleichungen der beiden, auf rechtwinklige Coordinatenachsen bezogenen, Curven werden, nachdem sie von dem Coefficienten von y^2 befreit sind, durch

$$y^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0,$$
$$y^2+2Bxy+Cx^2+2D'y+2E'x+F'=0$$

dargestellt werden können. Wir bezeichnen die Coordinaten des Punktes p durch x', y' und transformiren die beiden Gleichungen, indem wir diesen Punkt zum Anfangspunkte der Coordinaten nehmen, also $x+x'$ und $y+y'$ statt x und y setzen. Dies giebt

$$y^2+2Bxy+Cx^2+2My+2Nx+Q=0,$$
$$y^2+2Bxy+Cx^2+2M'y+2N'x+Q'=0,$$

wo zur Abkürzung

$y'+Bx'+D=M$; $By'+Cx'+E=N$; $y'^2+2Bx'y'+Cx'^2+2Dy'+2Ex'+F=Q$,
$y'+Bx'+D'=M'$; $By'+Cx'+E'=N'$; $y'^2+2Bx'y'+Cx'^2+2D'y'+2E'x'+F'=Q'$

gesetzt ist. Transformirt man die eben aufgestellten Gleichungen in Polar-Coordinaten, indem man (§. 3. F. 10.) $u\cos t$ und $u\sin t$ für x und y setzt, so kommt

$$(\sin^2 t+2B\sin t\cos t+C\cos^2 t)u^2+2(M\sin t+N\cos t)u+Q=0,$$
$$(\sin^2 t+2B\sin t\cos t+C\cos^2 t)u^2+2(M'\sin t+N'\cos t)u+Q'=0.$$

Die beiden Werthe von u, welche die erste Gleichung für ein beliebiges t giebt, sind offenbar die Längen von pa und pb, und die beiden Werthe von u, welche die zweite Gleichung für dasselbe t liefert, sind die Längen von pa' und pb'; wir haben daher

$$\overline{pa} \times \overline{pb} = \frac{Q}{\sin^2 t + 2B \sin t \cos t + C \cos^2 t} ;$$

$$\overline{pa'} \times \overline{pb'} = \frac{Q'}{\sin^2 t + 2B \sin t \cos t + C \cos^2 t} .$$

§. 46.

Da nun zufolge der Aufgabe diese Rechtecke einander gleich seyn sollen, und die Nenner dieser Ausdrücke für denselben Werth von t dieselben sind, so haben wir $Q = Q'$, oder, wenn wir für Q und Q' die von ihnen vertretenen Ausdrücke setzen, und die Accente von x' und y', die jetzt nicht mehr nöthig sind, weglassen,

$$y^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = y^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2D'y + 2E'x + F' ,$$

welche Gleichung sich von selbst auf

$$2(D - D')y + 2(E - E')x + F - F' = 0$$

reducirt. Der gesuchte Ort ist also eine gerade Linie und zwar die gemeinschaftliche Sehne der beiden gegebenen Curven, was daraus erhellet, daß die gefundene Gleichung mit derjenigen identisch ist, welche sich ergiebt, wenn die zweite gegebene Gleichung von der ersten abgezogen wird.

§. 47.

Wir wollen jetzt ein System ähnlicher und ähnlich-liegender Linien zweiten Grades betrachten, die sich in denselben Punkten schneiden oder, was dasselbe ist, die eine gemeinschaftliche Sehne haben.

Nimmt man diese gemeinschaftliche Sehne zur Ordinatenachse, so werden in den, von dem ersten Coefficienten befreiten, Gleichungen dieser Curven nicht nur die Coefficienten des zweiten und dritten Gliedes, sondern es werden auch, weil für $x = 0$ die Werthe von y, d. i. die Ordinaten der Durchschnittspunkte mit der Ordinatenachse, einander gleich seyn müssen, die Coefficienten von y und die letzten Glieder einander gleich seyn. Zwei Curven des Systems werden demnach durch

$$y^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 , \qquad (1)$$

$$y^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2E'x + F = 0 \qquad (2)$$

auszudrücken seyn. Die Gleichung einer andern Linie zweiten Grades, welche, ohne den Curven des Systems ähnlich zu seyn, durch dieselben, auf der Ordinatenachse liegenden, Durchschnittspunkte geht, ist

$$y^2 + 2B'xy + C'x + 2Dy + 2E''x + F = 0 . \qquad (3)$$

Zieht man die Gleichung (3) von den Gleichungen (1) und (2) nach ein-

§. 47. ander ab, so kommt

$$\{2(B-B')y+(C-C')x+2(E-E'')\}x = 0\,, \qquad (4)$$

$$\{2(B-B')y+(C-C')x+2(E'-E'')\}x = 0\,. \qquad (5)$$

Die Gleichung (4), welche von den Coordinaten der Durchschnittspunkte der Curven (1) u. (3) befriedigt wird, so wie die Gleichung (5), welcher von den Coordinaten der Durchschnittspunkte der Curven (2) und (3) Genüge geleistet wird, zerfällt, wie man sieht, in zwei Factoren. Die zweiten Factoren, nämlich $x = 0$, drücken die Ordinatenachse aus, welche zwei Durchschnittspunkte enthält; und die ersten Factoren, nämlich

$2(B-B')y+(C-C')x+2(E-E'')=0$; $2(B-B')y+(C-C')x+2(E'-E'')=0$

sind die Gleichungen zweier Geraden, von welchen die eine die übrigen Durchschnitte der Curven (1) u. (3), und die andere die übrigen Durchschnitte der Curven (2) u. (3) enthält. Da nun die Coefficienten von x und y in diesen Gleichungen dieselben sind, so laufen diese Geraden einander parallel. Der Parallelismus dieser Geraden wird offenbar auch dann Statt haben, wenn die Curven (1, 2 u. 3), statt sich in denselben beiden Punkten zu schneiden, einander in einem und demselben Punkte berühren, d. h. einen Punkt, und in demselben die Tangente gemein haben, welcher Fall nur ein besonderer des bisher betrachteten ist, und analytisch dadurch ausgedrückt werden kann, daß $D^2-F = 0$ gesetzt wird (§. 45. S. 14). Hieraus ergiebt sich nun der

Lehrsatz [27]. Wenn eine Linie zweiten Grades von einer Reihe ähnlicher und ähnlich-liegender Linien desselben Grades in denselben zwei Punkten geschnitten, oder in einem und demselben Punkte berührt wird, so sind alle Verbindungslinien von je zwei andern Durchschnittspunkten einer jeden Curve aus der Reihe und der zuerst genannten einander parallel.

Die folgenden Sätze (28 u. 30), die wir zum Beweisen vorlegen, können auf eine Weise, welche der, zur Herleitung des vorigen Satzes angewandten Analyse ähnlich ist, behandelt werden. Die daneben gestellten Sätze (29 u. 31) ergeben sich vermittelst der Reciprocität, und bedürfen somit keines besondern Beweises.

Lehrsatz [28]. Wenn drei Linien zweiten Grades eine gemeinschaftliche Sehne haben, so schneiden sich die drei andern Sehnen,

Lehrsatz [29]. Wenn drei Linien zweiten Grades einen gemeinschaftlich umschriebenen Winkel haben, so liegen die Scheitel der drei

von denen jede zweien dieser Curven gemein ist, in einem und demselben Punkte.

andern Winkel, von denen jeder zweien dieser Curven gemeinschaftlich umschrieben ist, auf einer und derselben Geraden. §. 47.

Nimmt man die Richtung der, allen drei Curven gemeinschaftlichen, Sehne zur Ordinatenachse, so sind diese drei Curven, da sie nun durch dieselben Punkte dieser Achse gehen, durch folgende Gleichungen

$$y^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$
$$y^2+B'xy+C'x^2+Dy+E'x+F=0,$$
$$y^2+B''xy+C''x^2+Dy+E''x+F=0$$

auszudrücken. Zieht man diese Gleichungen von einander ab, und dividirt die Reste durch x, so kommt

$$(B-B')y+(C-C')x+E-E'=0,$$
$$(B-B'')y+(C-C'')x+E-E''=0,$$
$$(B'-B'')y+(C'-C'')x+E'-E''=0,$$

und diese Gleichungen drücken die zweiten gemeinschaftlichen Sehnen der 1sten u. 2ten, der 1sten u. 3ten, der 2ten u. 3ten Curve aus. Da nun aber die erste dieser Gleichungen die Differenz der zweiten und dritten ist, so schneiden sich diese gemeinschaftlichen Sehnen in demselben Punkte (§. 9.).

Lehrsatz [30]. Wenn eine Reihe von Linien zweiten Grades, welche durch dieselben vier Punkte gehen, von einer andern Linie desselben Grades in zwei von diesen vier Punkten geschnitten wird, so schneidet diese letzte Curve eine jede Curve der Reihe noch in zwei solchen Punkten, daß die Verbindungslinie derselben durch einen und denselben Punkt der, den Curven der Reihe gemeinschaftlichen Sehne geht.

Lehrsatz [31]. Wenn eine Reihe von Linien zweiten Grades, welche dieselben vier Geraden berühren, mit einer andern Linie desselben Grades zwei von diesen vier Geraden zu gemeinschaftlichen Tangenten hat, so liegen die Scheitel der Winkel, welche einer jeden Curve der Reihe und der zuletzt genannten Curve noch gemeinschaftlich umschrieben werden können, auf einer und derselben, durch den Durchschnitt der beiden den Curven der Reihe gemeinschaftlichen Tangenten gehenden, Geraden.

Wir nehmen die allen Curven gemeinschaftliche Sehne zur Ordinatenachse und die Verbindungslinie der andern gemeinsamen Durchschnitte von den Curven der Reihe zur Abscissenachse. Alsdann können zwei Curven der

§. 47. Reihe, da für $x = 0$, die Werthe von y, und für $y = 0$, die Werthe von x in beiden Curven dieselben seyn müssen, durch die Gleichungen

$$y^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$
$$y^2 + B'xy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

ausgedrückt werden. Die Gleichung der Linie zweiten Grades, welche nur durch die beiden, auf der Ordinatenachse liegenden Durchschnittspunkte, nicht aber durch die, in der Abscissenachse befindlichen, geht, wird durch

$$y^2 + B''xy + C'x^2 + Dy + E'x + F = 0$$

darzustellen seyn. Zieht man jetzt diese Gleichung von den beiden ersten ab und dividirt die Reste durch x, so kommt

$$(B - B'')y + (C - C')x + E - E' = 0,$$
$$(B' - B'')y + (C - C')x + E - E' = 0,$$

zwei Gleichungen, welche die zweiten gemeinschaftlichen Sehnen der ersten und dritten und der zweiten und dritten Curve ausdrücken. Da nun aber diese Gleichungen, wenn man darin $y = 0$ setzt, für x denselben Werth geben, so schneiden die zweiten gemeinschaftlichen Sehnen die Abscissenachse, d. i. die den Curven der Reihe gemeinsame Sehne in einem und demselben Punkte.

§. 48.

Wenn in der Gleichung

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0 \qquad (1)$$

ein Coefficient veränderlich angenommen wird, so drückt sie nicht mehr eine bestimmte Linie zweiten Grades, sondern unzählig viele solcher Linien aus. Wir wollen die sechs verschiedenen Fälle, die hier Statt finden können, der Reihe nach durchgehen.

I. Wenn a veränderlich, alle übrigen Coefficienten der Gleichung (1) aber constant sind, so drückt diese Gleichung eine Reihe von Curven aus, welche sich in denselben zwei (reellen oder imaginären) Punkten der Abscissenachse berühren.

Daß die Curven durch dieselben zwei Punkte der Abscissenachse gehen, ist daraus zu ersehen, daß für $y = 0$, x in allen Curven dieselben Werthe, nämlich die Wurzeln x_1 und x_2 der Gleichung $cx^2 + 2ex + f = 0$, hat. Daß diese Curven sich auch in diesen Punkten berühren oder, was dasselbe ist, in diesen Punkten dieselben Tangenten haben, ergiebt sich aus den Gleichungen dieser Tangenten; denn setzt man in der allgemeinen Gleichung für

eine Tangente (§. 35. S. 5) $y' = 0$ und $x' = x_1$ oder x_2, so kommt §. 48.
$(bx_1+d)y+(cx_1+e)x+ex_1+f=0$ oder $(bx_2+d)y+(cx_2+e)x+ex_2+f=0$,
zwei Gleichungen, welche a nicht enthalten, und also immer dieselben Geraden ausdrücken, was auch, in den Gleichungen (1), a für einen Werth haben mag.

II. Wenn b veränderlich, alle übrigen Coefficienten der Gleichung (1) aber constant sind, so drückt diese Gleichung eine Reihe von Curven aus, welche sich in denselben vier (reellen oder imaginären) Punkten der Coordinatenachsen schneiden.

Denn setzt man nach einander $x = 0$ und $y = 0$, so erhält man

$$ay^2+2dy+f = 0 \quad ; \quad cx^2+2ex+f = 0 ,$$

welche Gleichungen immer dieselben Werthe für y und x, d. i. dieselben Durchschnittspunkte mit den Coordinatenachsen geben, welchen Werth auch b in der Gleichung (1) haben mag.

III. Wenn c veränderlich, alle übrigen Coefficienten aber constant sind, so drückt diese Gleichung eine Reihe von Curven aus, welche sich in denselben zwei (reellen oder imaginären) Punkten der Ordinatenachse berühren.

Dies läßt sich ebenso wie die Behauptung I. nachweisen.

IV. Wenn d veränderlich, alle übrigen Coefficienten der Gleichung (1) aber constant sind, so drückt diese Gleichung eine Reihe von Curven aus, welche ähnlich und ähnlich-liegend sind, und welche sich in denselben zwei (reellen oder imaginären) Punkten der Abscissenachse schneiden.

Daß die Curven ähnlich und ähnlich-liegend sind, erhellet daraus, daß die Coefficienten der drei ersten Glieder, und daß auch die letzten Glieder dieselben sind (§. 46.); und daß sie durch dieselben Punkte der Abscissenachse gehen, ist wie vorher ersichtlich.

V. Wenn e veränderlich, alle übrigen Coefficienten der Gleichung (1) aber constant sind, so drückt diese Gleichung eine Reihe von Curven aus, welche ähnlich und ähnlich-liegend sind, und die sich in denselben zwei (reellen oder imaginären) Punkten der Ordinatenachse schneiden.

Dies läßt sich wie das Vorhergehende nachweisen.

VI. Wenn f veränderlich, alle übrigen Coefficienten der Gleichung (1) aber constant sind, so drückt diese Gleichung

§. 48. **eine Reihe ähnlicher und ähnlich-liegender Curven aus, welche concentrisch sind.**

Daß die Curven ähnlich sind und ähnlich-liegen, folgt wieder aus (§. 46.) so lange dem veränderlichen f keine Werthe beigelegt werden, die den Werth von Q (§. 46.) auch dem Zeichen nach verändern; daß aber die Curven concentrisch sind, folgt aus (§. 29. F. 12.), indem die Coordinaten der Mittelpunkte von f unabhängig sind.

Nachdem wir diese Betrachtungen angestellt haben, wird es keine Schwierigkeit machen, die Beweise der folgenden Sätze (32 u. 36) zu finden. Die daneben gestellten Sätze (33 u. 37) sind vermittelst der Reciprocität aus jenen abgeleitet.

Lehrsatz [32]. Die Polaren eines und desselben Punktes in Beziehung auf alle Linien zweiten Grades, welche durch dieselben vier Punkte gehen, schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Lehrsatz [33]. Die Pole einer und derselben Geraden in Beziehung auf alle Linien zweiten Grades, welche dieselben vier Geraden berühren, liegen in einer und derselben Geraden.

Die Gleichungen aller Linien zweiten Grades, welche durch dieselben vier Punkte gehen, können durch

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0 \qquad (1)$$

ausgedrückt werden, wenn man b als veränderlich betrachtet. Die Polare

$$(ay+bx+d)u+(by+cx+e)t+dy+ex+f=0 \qquad (2)$$

irgend eines Punktes xy ist nun selbst eine veränderliche Gerade, indem b auch in der Gleichung (2) veränderlich ist; giebt man aber dieser Gleichung die Form

$$\{(ay+d)u+(cx+e)t+dy+ex+f\}+b\{xu+yt\}=0\ ,$$

so ist ersichtlich, daß sie von denjenigen Werthen von t und u wird befriedigt werden, welche den Gleichungen

$$(ay+d)u+(cx+e)t+dy+ex+f=0\ ;\ xu+yt=0 \qquad (3)$$

zu gleicher Zeit genugthun, so daß also die Polare (2) durch den Durchschnitt der beiden unveränderlichen, durch die Gleichungen (3) ausgedrückten, Geraden geht, welchen Werth auch b haben mag. Die Polaren des Punktes xy schneiden sich also sämmtlich in einem und demselben Punkte.

Wir unterlassen nicht, hier eine Bemerkung zu machen, die sehr nahe liegt; nämlich: Wenn sich die in Rede stehenden Polaren eines Punktes xy

in

in einem Punkte tu schneiden, so schneiden sich die Polaren des Punktes tu in Beziehung auf alle Curven (1) in dem zuerst genannten Punkte xy. Dies kann auf mehrere Arten erwiesen werden; es ergiebt sich aber am leichtesten aus den Gleichungen (3) selbst. Denn beide Gleichungen sind in Beziehung auf x u. t und auf y u. u symmetrisch, was in die Augen fällt, wenn man die erstere auf die Form §. 48.

$$ayu + cxt + d(u + y) + e(t + x) + f = 0$$

bringt.

Aus den obigen Lehrsätzen lassen sich die folgenden ableiten, wenn man einen jeden Durchmesser einer Linie zweiten Grades als die Polare eines unendlich entfernten Punktes, und den Mittelpunkt einer solchen Curve als den Pol einer unendlich entfernten Geraden ansieht.

Lehrsatz [34]. Die Durchmesser aller, sich in denselben vier Punkten schneidenden, Linien zweiten Grades, welche parallelen Durchmessern conjugirt sind, schneiden sich in einem und demselben Punkte *).

Lehrsatz [35]. Die Mittelpunkte aller, dieselben vier Geraden berührenden, Linien zweiten Grades liegen in einer und derselben Geraden *).

Es läßt sich der erste dieser beiden Sätze aber auch ganz so wie der Satz (32) erweisen, was dem Leser überlassen bleiben mag.

Lehrsatz [36]. Die Polaren eines und desselben Punktes in Beziehung auf alle Linien zweiten Grades, welche sich in denselben beiden Punkten berühren, schneiden sich in einem und demselben Punkte der Berührungssehne.

Lehrsatz [37]. Die Pole einer und derselben Geraden in Beziehung auf alle Linien zweiten Grades, welche sich in denselben beiden Punkten berühren, liegen in einer und derselben, durch den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangenten gehenden, Geraden.

Alle Linien zweiten Grades, welche sich in denselben beiden Punkten berühren, können durch die Gleichung (1) ausgedrückt werden, wenn man a als veränderlich ansieht. Die Polare (2) irgend eines Punktes xy ist dann eine veränderliche Gerade, und giebt man ihr die Form

*) Dieser Satz ist unsers Wissens zuerst von Hrn. Lamé aufgestellt und erwiesen worden. M. s. Examen des différentes méthodes etc. (1818), pag. 34.

*) Diesen Satz haben wir auf einem andern Wege bereits in §. 40. gefunden.

§. 48. $ayu+\{(bx+d)u+(by+cx+e)t+dy+ex+f\}=0$,

so ist ersichtlich, daß sie durch den Durchschnitt der beiden, durch die Gleichungen

$$u=0 \quad \text{und} \quad (bx+d)u+(by+cx+e)t+dy+ex+f=0$$

ausgedrückten, Geraden gehen, welche immer dieselben sind, welche Werthe man auch dem a beilegen mag. Da aber die erste dieser Geraden die Abscissenachse ist, so schneiden sich die in Rede stehenden Polaren, welches auch der Punkt xy seyn mag, immer auf dieser Abscissenachse, welche zugleich die Berührungssehne aller Curven (1) ist.

Wir können es dem Leser überlassen, die analogen Sätze für ähnliche und ähnlich-liegende Linien zweiten Grades, welche sich in denselben zwei Punkten schneiden oder concentrisch sind, den obigen nachzubilden.

§. 49.

Die Resultate des vorigen §. geben zu folgenden Aufgaben Veranlassung.

Aufgabe [81]. Vier Punkte und eine Gerade sind gegeben. Man soll den Ort des Durchschnittspunktes der Polaren von allen Punkten der gegebenen Geraden in Beziehung auf die Linien zweiten Grades, welche durch die gegebenen Punkte gelegt werden können, finden.

Wir nehmen die Verbindungslinie von zwei der gegebenen vier Punkte zur Abscissenachse und die Verbindungslinie der beiden andern gegebenen Punkte zur Ordinatenachse. Alsdann lassen sich sämmtliche Linien zweiten Grades, welche durch diese vier Punkte gehen, durch die Gleichung

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f=0 \qquad (1)$$

ausdrücken, wenn man b als veränderlich betrachtet. Es sey nun

$$hu+gt+k=0 \qquad (2)$$

die Gleichung der gegebenen Geraden in Beziehung auf dasselbe Coordinatensystem.

Die Polaren eines Punktes tu in Beziehung auf alle, durch die Gleichung (1) ausgedrückte Linien sind in der Gleichung

$$(au+bt+d)y+(bu+ct+e)x+du+et+f=0$$

enthalten, in welcher b als veränderlich angesehen werden muß. Alle diese Polaren dieses einen Punktes tu schneiden sich in dem Durchschnitte der beiden Geraden

$$(au+d)y+(ct+e)x+du+et+f=0 \quad ; \quad ty+ux=0 \qquad (3)$$ §. 49.

(§. 48.). Eliminirt man alſo zwiſchen dieſen Gleichungen (3) und der Gleichung (2) die Größen t und u, ſo erhält man die Gleichung des verlangten Ortes, nämlich

$$k(ay^2-cx^2+dy-ex)=(hy-gx)(dy+ex+f), \qquad (4)$$

welcher alſo im Allgemeinen eine Linie zweiten Grades iſt.

Dieſe Curve geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten, da ihre Gleichung (4) befriedigt wird, wenn man x und y gleich Null ſetzt; ſie geht alſo durch den Durchſchnittspunkt zweier Verbindungslinien der gegebenen Punkte, und da es drei Paare ſolcher Verbindungslinien giebt (von welchen im Allgemeinen ein jedes zu Coordinatenachſen hätte genommen werden können), ſo geht ſie durch drei beſtimmte Punkte, nämlich durch die Durchſchnittspunkte der gegenüberſtehenden Seiten und der Diagonalen des, von den vier gegebenen Punkten gebildeten, Vierecks, welche Werthe auch h, g und k haben mögen, d. h. welches auch die gegebene Gerade (2) ſeyn mag.

Geht die gegebene Gerade (2) durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. i. durch den Durchſchnittspunkt zweier gegenüberſtehenden Seiten oder der Diagonalen des, von den gegebenen vier Punkten beſtimmten, Vierecks, ſo iſt k gleich Null, und alsdann verwandelt ſich die Gleichung (4) in

$$(hy-gx)(dy+ex+f)=0,$$

alſo iſt der geſuchte Ort alsdann ein Syſtem von zwei geraden Linien, was ſich auch aus §. 41. hätte herleiten laſſen.

Eine beſondere Erwähnung verdient noch der folgende Fall.

Wenn nämlich die gegebenen vier Punkte die Eckpunkte eines Parallelogramms ſind, und deſſen Diagonalen zu Coordinatenachſen genommen werden, ſo müſſen, weil dieſe Diagonalen in ihrem Durchſchnitte, d. i. im Anfangspunkte der Coordinaten halbirt ſind, die Abſciſſen der beiden, in der Abſciſſenachſe, und die Ordinaten der beiden in der Ordinatenachſe liegenden, Eckpunkte einander gleich und entgegengeſetzt ſeyn; es müſſen alſo die beiden Gleichungen

$$ay^2+2dy+f=0 \quad \text{und} \quad cx^2+2ex+f=0,$$

welche aus der Gleichung (1) hervorgehen, wenn man nach einander x und y gleich Null ſetzt, gleiche und entgegengeſetzte Wurzeln haben; woraus ſich ergiebt, daß d und e gleich Null ſeyn müſſen. Die Gleichung (4) des in

§. 49. Rede ſtehenden Ortes geht alſo für den Fall, daß die vier gegebenen Punkte die Ecken eines Parallelogramms ſind, in

$$k(ay^2-cx^2) = (hy-gx)f \quad \text{oder} \quad ay^2-cx^2-\frac{fh}{k}y+\frac{fg}{k}x = 0 \qquad (5)$$

über, und dieſer Ort iſt daher im Allgemeinen wieder eine Linie zweiten Grades. Für eine andere gegebene Gerade (2) erhält man nun zwar einen andern Ort (5); aber da die erſten Glieder der Gleichung (5) ſich nicht ändern, wenn man auch den Größen g, h und k andere Werthe beilegt, ſo ſind alle Curven (5), welche verſchiedenen Geraden (2) zugehören, im Allgemeinen ähnliche und ähnlich-liegende Linien zweiten Grades (§. 46.).

Aufgabe [82]. Vier Punkte und eine Gerade ſind gegeben. Man ſoll den Ort des Pols dieſer Geraden in Beziehung auf alle Linien zweiten Grades, welche durch die gegebenen Punkte gelegt werden können, finden.

Nimmt man die Coordinatenachſen wie in der vorigen Aufgabe, ſo hat man wieder

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f = 0 \qquad (1)$$

als Gleichung für alle Linien zweiten Grades, welche durch dieſelben vier Punkte gehen, wenn man b als veränderlich anſieht. Wenn nun

$$hu+gt+k = 0 \qquad (2)$$

die Gleichung der gegebenen Geraden iſt, ſo wird man ihren Pol dadurch finden, daß man dieſe Gleichung mit der Gleichung

$$(ay+bx+d)u+(by+cx+e)t+dy+ex+f = 0$$

der Polarlinie eines Punktes xy identificirt (§. 19.). Dies giebt

$$\frac{ay+bx+d}{dy+ex+f} = \frac{h}{k} \quad ; \quad \frac{by+cx+e}{dy+ex+f} = \frac{g}{k}, \qquad (6)$$

aus welchen beiden Gleichungen man x und y ausdrücken kann. Dieſe Ausdrücke werden aber im Allgemeinen b enthalten, und alſo, wie es auch nicht anders ſeyn darf, veränderlich ſeyn. Eliminirt man daher zwiſchen dieſen Ausdrücken, oder, was daſſelbe iſt, zwiſchen den Gleichungen (6) das b, ſo hat man die Gleichung des geſuchten Ortes. Dieſe Elimination giebt

$$k(ay^2-cx^2+dy-ex) = (hy-gx)(dy+ex+f).$$

Der geſuchte Ort iſt demnach im Allgemeinen eine Linie zweiten Grades, und zwar, wie man ſieht, dieſelbe, welche in der vorigen Aufgabe gefunden worden iſt.

§. 50.

Auf die im §. 48. erwiesene Eigenschaft der Linien zweiten Grades, welche sich in denselben vier Punkten schneiden, daß nämlich die Polaren irgend eines Punktes in Beziehung auf alle diese Linien durch einen und denselben Punkt gehen, läßt sich eine neue Art des Entsprechens von Punkten gründen, welche, wie die Reciprocität, zur Erfindung neuer Sätze angewandt werden kann. Man kann nämlich, wenn ein System von Punkten gegeben ist, jeden derselben als Pol ansehen, und denjenigen Punkt als den ihm entsprechenden betrachten, in welchem sich alle Polaren des erstern, in Beziehung auf die, sich in denselben beliebig zu wählenden vier Punkten schneidenden, Linien zweiten Grades, begegnen. Auf diese Weise erhält man ein zweites System von Punkten, welches mit dem gegebenen in einer Beziehung steht, die sich aus Demjenigen ableiten läßt, was wir in den beiden vorigen §§. auseinander gesetzt haben. Wir wollen aber diesen Gegenstand aus einem allgemeinern Gesichtspunkte auffassen.

Bedeuten x, y die rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten eines Systems (S) von Punkten, und t, u die, auf dieselben oder auf andere Achsen bezogenen, Coordinaten eines Systems (Σ), so sind die beiden Systeme (S) und (Σ) einander collinear-verwandt, wenn t und u gebrochene Functionen von x und y, und wenn deren Zähler und Nenner vom ersten Grade, die Nenner aber einander gleich sind (§. 11.). Heben wir nur die Einschränkung auf, daß die beiden Nenner einander gleich seyn sollen, so daß

$$u = \frac{m'y+n'x+p'}{m_1y+n_1x+p_1} \quad ; \quad t = \frac{m''y+n''x+p''}{m_2y+n_2x+p_2}$$

ist, oder, was dasselbe, daß zwischen x, y, t und u die Gleichungen

$$(m_1y+n_1x+p_1)u = m'y+n'x+p' ,$$
$$(m_2y+n_2x+p_2)t = m''y+n''x+p''$$

Statt finden, so wird zwar jedem Punkte xy des Systems (S) ein Punkt tu des Systems (Σ) entsprechen, und umgekehrt, da die beiden Gleichungen vom ersten Grade sind; es werden aber dreien oder mehrern in gerader Linie liegenden Punkten des Systems (S) eben so viele Punkte des Systems (Σ) entsprechen, die im Allgemeinen nicht in gerader Linie liegen, und umgekehrt. Denn ist

$$u = gt+h$$

§. 50. die Gleichung irgend einer Geraden im Syſteme (Σ), ſo entſpricht ihr eine Curve im Syſteme (S), deren Gleichung

$$\frac{A'}{A} = g\frac{B'}{B} + h \quad \text{oder} \quad A'B - gAB' - hAB = 0$$

iſt, wenn wir, der Kürze wegen, $m'y + n'x + p' = A'$, $m_1y + n_1x + p_1 = A$, $m''y + n''x + p'' = B'$ und $m_2y + n_2x + p_2 = B$ ſetzen. Dieſe Curve iſt offenbar eine Linie zweiten Grades, welche, was auch h und g für Werthe haben mögen, durch drei feſte Punkte geht, deren Coordinaten die folgenden drei Gleichungs-Syſteme befriedigen:

$$\begin{Bmatrix} A = 0 \\ A' = 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} B = 0 \\ B' = 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} A = 0 \\ B = 0 \end{Bmatrix}.$$

Dieſe Art des Entſprechens iſt nur ein beſonderer Fall derjenigen, bei welcher die beiden, zwiſchen x, y, t und u Statt findenden Gleichungen folgende allgemeinere Form haben:

$$(ay + bx + c)u + (a'y + b'x + c')t + a''y + b''x + 1 = 0, \quad (1)$$
$$(\alpha y + \beta x + \gamma)u + (\alpha'y + \beta'x + \gamma')t + \alpha''y + \beta''x + 1 = 0, \quad (2)$$

wo $a, b, \ldots \alpha, \beta \ldots$ willkührliche Conſtanten bedeuten, die in jedem beſondern Falle zu beſtimmen ſind. Setzt man in dieſe Gleichungen (1, 2) für x und y die beſtimmten Werthe x' und y', ſo bekommen t und u beſtimmte Werthe, die wir durch t' und u' bezeichnen wollen. Nun iſt klar, daß wenn man in dieſelbe Gleichungen für t und u die beſtimmten Werthe t' und u' ſetzt, x und y beſtimmte Werthe erhalten, die gleich x' und y' ſeyn werden. Daraus folgt: **Wenn einem Punkte p des Syſtems (S) ein Punkt π des Syſtems (Σ) entſpricht, ſo entſpricht umgekehrt dem Punkte π des Syſtems (Σ) derſelbe Punkt p des Syſtems (S).**

Wir wollen, der Kürze wegen, die linearen Functionen von x und y, welche in der Gleichung (1) vorkommen, durch A, A', A'', und diejenigen, welche die Gleichung (2) enthält, durch B, B', B'' bezeichnen. Alsdann iſt

$$Au + A't + A'' = 0, \quad (3) \quad ; \quad Bu + B't + B'' = 0, \quad (4)$$

und wenn wir aus dieſen Gleichungen t und u entwickeln, ſo kommt

$$u = \frac{A'B'' - A''B'}{AB' - A'B} \quad ; \quad t = \frac{A''B - AB''}{AB' - A'B}. \quad (5)$$

Wenn nun

$$u = gt + h \quad (6)$$

die Gleichung einer Geraden im Systeme (Σ) ist, so muß ihr in dem Sy- §. 50.
steme (S) eine Reihe von Punkten entsprechen, die in ihrer Continuität eine Linie bilden, deren Gleichung, durch Substitution der Werthe (5) von t und u in die Gleichung (6), gefunden werden kann. Diese Substitution giebt

$$(A'B''-A''B')-g(A''B-AB'')-h(AB'-A'B)=0\,, \qquad (7)$$

eine Gleichung, die, wie man sieht, vom zweiten Grade ist. Hieraus folgt, daß einer Geraden des Systems (Σ) im Allgemeinen eine Linie zweiten Grades im Systeme (S) entspricht.

Betrachten wir nun die beiden, mit g und h multiplicirten Ausdrücke

$$A''B-AB''\,, \quad (8) \quad ; \quad AB'-A'B\,, \quad (9)$$

so sehen wir, daß beide gleich Null werden, wenn $A=0$ und zugleich $B=0$ ist, was nur, da A und B vom ersten Grade sind, für einen bestimmten reellen Werth von x und von y der Fall ist. Da aber die Ausdrücke (8) und (9) vom zweiten Grade sind, so werden sie im Allgemeinen durch vier Werthe von x und von y auf Null reducirt; sie werden also, außer durch das genannte Paar reeller Werthe von x u. y, noch durch drei Paar Werthe von x u. y, von denen also ein Paar wenigstens reell seyn muß, gleich Null. Für jedes dieser drei Paare ist somit zu gleicher Zeit

$$A''B-AB''=0 \quad \text{und} \quad AB'-A'B=0\,,$$

folglich auch $\frac{B}{A}=\frac{B''}{A''}$ und $\frac{B}{A}=\frac{B'}{A'}$, und also $\frac{B''}{A''}=\frac{B'}{A'}$ oder

$$A'B''-A''B'=0\,,$$

woraus sich ergiebt, daß von jedem dieser drei Paare die Gleichung (7) befriedigt wird, welche Werthe auch g und h haben mögen, oder daß die Linie zweiten Grades im Systeme (S), welche einer Geraden im Systeme (Σ) entspricht, immer durch dieselben drei Punkte geht, welches auch die Lage dieser Geraden seyn mag, und daß von diesen drei Punkten wenigstens einer immer reell ist. Diese Punkte werden wir die drei Cardinalpunkte des Systems (S) nennen, und sie durch p_1, p_2, p_3 bezeichnen.

Ordnen wir die Gleichungen (1 u. 2) nach x und y, so ist

$$(au+a't+a'')y+(bu+b't+b'')x+cu+c't+1=0\,, \quad (10)$$
$$(\alpha u+\alpha't+\alpha'')y+(\beta u+\beta't+\beta'')x+\gamma u+\gamma't+1=0\,, \quad (11)$$

oder, wenn man die, in diesen Gleichungen vorkommenden, Functionen ersten Grades von t u. u der Reihe nach durch M, M', M'', N, N' und N'' bezeichnet,

§. 50. $My+M'x+M''=0$, (12) ; $Ny+N'x+N''=0$, (13)

woraus

$$y=\frac{M'N''-M''N'}{MN'-M'N} \quad ; \quad x=\frac{M''N-MN''}{MN'-M'N}. \qquad (14)$$

Einer Geraden im Syſteme (S), deren Gleichung

$$y=mx+n$$

ſeyn mag, entſpricht nun im Allgemeinen eine Linie zweiten Grades im Syſteme (Σ), deren Gleichung

$$(M'N''-M''N')-m(M''N-MN'')-n(MN'-M'N)=0$$

iſt; und dieſe Curve geht, aus Gründen, die den bei der Gleichung (7) angeführten analog ſind, durch drei feſte Punkte des Syſtems (Σ), von welchen wenigſtens einer immer reell iſt. Dieſe drei Punkte werden wir die Cardinalpunkte des Syſtems (Σ) nennen, und ſie durch π_1, π_2, π_3 bezeichnen.

Die Gleichung einer Linie zweiten Grades, welche im Syſteme (S) durch die drei Cardinalpunkte p_1, p_2, p_3 geht, kann immer auf die Form

$$(AB''-A''B')+\lambda(A''B-AB'')+\mu(AB'-A'B)=0 \qquad (15)$$

gebracht werden; denn dieſe Linie iſt völlig beſtimmt, wenn außer den genannten drei Punkten noch zwei Punkte, durch die ſie geht, beſtimmt ſind (§. 34.); wie aber auch dieſe Punkte liegen mögen, ſo wird man immer durch Subſtitution ihrer Coordinaten in die Gleichung (15) zwei Gleichungen zur Beſtimmung von λ und μ erhalten, welche in Beziehung auf dieſe Größen vom erſten Grade ſind, und die daher für ſie immer reelle Werthe geben werden. Wenn nun eine Linie zweiten Grades (15), die im Syſteme (S) durch die drei Cardinalpunkte p_1, p_2, p_3 geht, gegeben iſt, ſo kann man die Gleichung der Linie, welche ihr im Syſteme (Σ) entſpricht, dadurch finden, daß man die Ausdrücke (14) für x und y in (15) ſubſtituirt, oder auch dadurch, daß man in Folge der Gleichungen (5) für $\frac{AB''-A''B'}{AB'-AB'}$ und $\frac{A''B-AB''}{AB'-AB'}$ reſpective u und t ſetzt. Dies giebt

$$u+\lambda t+\mu=0,$$

welches die Gleichung einer Geraden im Syſteme (Σ) iſt. Es entſpricht alſo einer Linie zweiten Grades im Syſteme (S), welche durch die Cardinalpunkte p_1, p_2, p_3 geht, eine Gerade im Syſteme (Σ).

Ganz auf dieſelbe Weiſe kann man ſich überzeugen, daß einer Linie

zweiten Grades im Systeme (Σ), welche durch die Cardinalpunkte π_1, π_2, π_3 geht, eine Gerade im Systeme (S) entspricht. §. 50.

Dem Durchschnittspunkte zweier Geraden in einem der beiden Systeme, entspricht in dem andern Systeme ein Punkt, der nothwendigerweise ein Durchschnittspunkt der beiden Linien zweiten Grades seyn muß, welche jenen Geraden entsprechen, und man sieht leicht ein, daß dies der vierte Durchschnittspunkt dieser beiden Curven, welche sich in den drei Cardinalpunkten ihres Systems schneiden, seyn wird. Dem vierten Durchschnittspunkte zweier Linien zweiten Grades, welche durch die drei Cardinalpunkte ihres Systems gehen, entspricht umgekehrt der Durchschnittspunkt der beiden diesen Curven entsprechenden Geraden im andern Systeme.

Fassen wir die erhaltenen Resultate zusammen, so ergiebt sich Folgendes.

So viele Punkte einer Figur des einen der beiden Systeme in gerader Linie liegen, eben so viele Punkte der, ihr in dem andern Systeme entsprechenden, Figur liegen in einer, durch die drei Cardinalpunkte des letztern gehenden, Linie zweiten Grades; und umgekehrt, so viele Punkte einer Figur des einen der beiden Systeme in einer, durch die drei Cardinalpunkte dieses Systems gehenden, Linie zweiten Grades liegen, eben so viele Punkte der ihr im andern Systeme entsprechenden Figur liegen in gerader Linie.

So viele Geraden einer Figur in dem einen Systeme sich in demselben Punkte schneiden, eben so viele Linien zweiten Grades der ihr entsprechenden Figur in dem andern Systeme gehen durch die drei Cardinalpunkte des letztern und einen und denselben vierten Punkt; und umgekehrt, so viele Linien zweiten Grades einer Figur in dem einen Systeme sich in seinen drei Cardinalpunkten und einem und demselben vierten Punkte schneiden, eben so viele Geraden der, ihr im andern Systeme entsprechenden Figur gehen durch einen und denselben Punkt.

Wir bemerken noch, daß geraden Linien des einen Systems, welche einer und derselben Richtung parallel sind, im andern Systeme Linien zweiten Grades entsprechen, welche durch dessen Cardinalpunkte und einen und denselben vierten Punkt gehen. Denn wenn man in der Gleichung (6) g constant, h aber veränderlich setzt, so drückt diese Gleichung unendlich viele parallele Gerade aus; die Gleichung (7) aber stellt unter derselben Annahme eine Unendlichkeit von Linien zweiten Grades dar, die nicht nur durch die drei Cardinalpunkte ihres Systems, sondern noch durch einen und denselben vierten Punkt gehen, indem diese Gleichung, was auch alsdann h für Werthe

§. 50. haben mag, befriedigt wird, wenn man dem x und y nach einander diejenigen vier bestimmten Werthe beilegt, welche den beiden Gleichungen

$$(A'B''-A''B')-g(A''B-AB'')=0\ ,\quad (16)\ ;\quad AB'-A'B=0\quad (17)$$

genugthun. Es ist ferner zu bemerken, daß alle vierten Durchschnittspunkte der, parallelen Geraden entsprechenden, Linien zweiten Grades in ihrer Continuität eine Linie zweiten Grades bilden. In dem einen Systeme ist diese Linie zweiten Grades, wie man sieht, durch die Gleichung (17) ausgedrückt, und in dem andern Systeme hat sie $MN'-M'N=0$ (18) zur Gleichung. Jedem Punkte einer dieser Curven entspricht ein unendlich entfernter Punkt, nämlich der Durchschnittspunkt paralleler Geraden. Dies ergiebt sich auch daraus, daß alle die Werthe von x und y, welche die Gleichung (17) befriedigen, $u=\infty$ und $t=\infty$, daß ferner alle Werthe von t und u, welche der Gleichung (18) genugthun, $y=\infty$ und $x=\infty$ machen, was aus der bloßen Ansicht der Ausdrücke (5) und (14) klar ist.

Wenn eine Figur in dem einen Systeme aus einer, durch dessen Cardinalpunkte gehenden, Linie zweiten Grades und einer Anzahl Sehnen derselben besteht, so besteht die ihr entsprechende Figur in dem andern Systeme aus einer Geraden und aus einer gleichen Anzahl diese Gerade schneidender Linien zweiten Grades, welche durch die drei Cardinalpunkte des zuletzt genannten Systems gehen. Wenn in dem ersten Systeme die Sehnen in Tangenten übergehen, d. i. wenn die beiden Durchschnittspunkte einer jeden dieser Geraden und der Curve in einem Punkte zusammenfallen, so fallen auch die beiden Durchschnittspunkte einer jeden Linie zweiten Grades und der Geraden in dem zweiten Systeme in einem Punkte zusammen, d. i. die Curven in dem zweiten Systeme berühren die Gerade. Oder: Einer Linie zweiten Grades, welche durch die drei Cardinalpunkte eines Systems geht, und einem ihr umschriebenen Polygone von n Seiten entspricht in dem andern Systeme eine Gerade, welche von n Linien zweiten Grades berührt wird, die durch die Cardinalpunkte dieses Systems gehen.

§. 51.

Man sieht leicht ein, daß die Collineationsverwandtschaft nur ein besonderer Fall der Verwandtschaft ist, in welcher zwei Figuren stehen, die einander, nach der im vorigen §. definirten Art, entsprechen. Die Formeln (2) des §. 11. sind auch wirklich in den Gleichungen (1) und (2) des vorigen §. einbegriffen, und können aus diesen erhalten werden, wenn man

a', b', c', α, β und γ gleich Null, ferner $a = \alpha'$, $b = \beta'$ und $c = \gamma'$ §. 51.
ſetzt. Auf ähnliche Weiſe kann auch die Reciprocität als ein beſonderer Fall der in Rede ſtehenden Verwandtſchaft angeſehen werden. Denn ſetzt man in einer der eben genannten Gleichungen, z. B. in (2), alle Conſtanten gleich Null, ſo bleibt nur die Gleichung (1) beſtehen, welche mit der Gleichung (1) des §. 19. identiſch iſt.

Man kann noch mancherlei, die Conſtanten der Gleichungen (1) u. (2) particulariſirende, Beſtimmungen machen. Wir wollen darüber nur Folgendes anführen.

Setzt man in der Gleichung (1) alle Coefficienten, bis auf a und b', und in der Gleichung (2), nachdem man ſie durch β dividirt hat, alle Coefficienten, bis auf $\frac{\alpha'}{\beta}$, gleich Null, ferner $\frac{\alpha'}{\beta} = -1$, ſo nehmen beide Gleichungen die Formen

$$myu + nxt + 1 = 0\,, \quad (1) \qquad ; \qquad xu - yt = 0 \qquad (2)$$

an. In dieſem particulären Falle hat man, ſtatt der Ausdrücke (5),

$$u = -\frac{y}{my^2 + nx^2} \qquad ; \qquad t = -\frac{x}{my^2 + nx^2}\,, \qquad (3)$$

und einer Geraden im Syſteme (Σ), deren Gleichung

$$u = gt + h \qquad (4)$$

iſt, entſpricht im Syſteme (S) eine Linie zweiten Grades, deren Gleichung

$$my^2 + nx^2 + \frac{1}{h}y - \frac{g}{h}x = 0 \qquad (5)$$

iſt. Wie nun auch die Größen h und g verändert werden, d. i. wie auch die Lage der Geraden (4) ſich verändern mag, ſo bleiben die erſten Glieder der Gleichung (5) immer dieſelben, daher ſind die Linien zweiten Grades im Syſteme (S), welche verſchiedenen Geraden im Syſteme (Σ) entſprechen, im Allgemeinen einander ähnlich und ähnlich-liegend (§. 46.). Es iſt aus der Gleichung (5) erſichtlich, daß alle dieſe Curven durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen, welcher ein Cardinalpunkt p_1 des Syſtems (S) iſt; die beiden andern Cardinalpunkte p_2 und p_3 liegen in unendlicher Entfernung von dieſem Anfangspunkte. Im gegenwärtigen Falle entſpricht dem Durchſchnittspunkte zweier Geraden des Syſtems (Σ) der zweite Durchſchnittspunkt der ihnen im Syſteme (S) entſprechenden Linien zweiten Grades, die ſich nur in zwei Punkten ſchneiden (§. 46.).

§. 51. Da die Gleichungen (1) und (2) in Beziehung auf x, y und t, u symmetrisch sind, so gilt Alles, was wir von den Systemen (S) und (Σ) gesagt haben, auch umgekehrt von den Systemen (Σ) und (S).

Geraden Linien eines Systems, welche einer und derselben Richtung parallel sind, entsprechen in dem andern Systeme Linien zweiten Grades, welche sich in dem Cardinalpunkte berühren. Denn die Gleichung der Tangente an der Curve (5) in einem ihrer Punkte x'y' ist

$$\left(my' + \frac{1}{2h}\right)y + \left(nx' - \frac{g}{2h}\right)x + \frac{1}{2h}y' - \frac{g}{2h}x' = 0 ,$$

und also ist die Gleichung der Tangente im Cardinalpunkte p_1, für welchen zufolge des oben Gesagten $x' = 0$ und $y' = 0$ ist,

$$y = gx ,$$

eine Gleichung, welche immer dieselbe bleibt, wie auch h in der Gleichung (4) der Geraden geändert werden mag. Es haben demnach im gegenwärtigen Falle die Curven, welche parallelen Geraden entsprechen, im Cardinalpunkte dieselbe Tangente, d. h. sie berühren sich in diesem Punkte. Sind beide Systeme durch die Gleichungen (1) und (2) auf dieselben Achsen bezogen, so macht diese Tangente mit der Abscissenachse denselben Winkel als die Gerade (4). Daraus folgt, daß alsdann die Linien zweiten Grades, welche zweien Geraden entsprechen, sich unter demselben Winkel schneiden, welchen diese Geraden einschließen.

Particularisirt man den in Rede stehenden Fall noch mehr, so daß auch $b' = 0$ wird, so entspricht einer jeden Geraden, deren Gleichung

$$u = gt + h \qquad (4)$$

ist, eine Linie zweiten Grades, deren Gleichung

$$my^2 + \frac{1}{h}y - \frac{g}{h}x = 0 , \qquad (6)$$

und die also eine Parabel ist. Particularisirt man ihn aber so, daß $a = b' = 1$ wird, so entsprechen den Geraden (4) Linien zweiten Grades, welche durch

$$y^2 + x^2 + \frac{1}{h}y - \frac{g}{h}x = 0 \qquad (7)$$

ausgedrückt, und die also Kreise sind, wenn die Coordinatenachsen rechtwinklig genommen werden.

§. 52.

Wir wollen jetzt an einigen Beispielen zeigen, wie die, in den beiden vorigen §§. dargelegte, Art des Entsprechens zweier Systeme angewandt werden kann, um aus schon bekannten Sätzen neue Sätze abzuleiten.

Wir werden jetzt annehmen, daß die Formeln (1) und (2) des vorigen §. die Art des Entsprechens ausdrücken, daß $m = n$ sey, und daß daher jeder Geraden des einen Systems ein Kreis des andern Systems entspricht. Stellen wir uns nun in dem Systeme (S) ein Dreieck abc, und von den Eckpunkten desselben die, auf die gegenüberstehenden Seiten herabgelassenen Perpendikel vor, deren Fußpunkte wir durch a', b', c' bezeichnen; so erhalten wir in dem Systeme (Σ) drei, durch den Cardinalpunkt π_1 gehende, Kreise, welche sich zu zweien in den Punkten π_1 und α, π_1 und β, π_1 und γ schneiden, und den Seiten ab, ac, bc entsprechen. Ferner erhalten wir drei, durch den Cardinalpunkt π_1 gehende, Kreise, welche ebenfalls durch die Punkte π_1 und α, π_1 und β, π_1 und γ gehen, und den drei Perpendikeln aa', bb', cc' entsprechen, von welchen also der erste den Kreis $\pi_1\beta\gamma$ in π_1 und α', der zweite den Kreis $\pi_1\alpha\gamma$ in π_1 und β' und der dritte den Kreis $\pi_1\alpha\beta$ in π_1 und γ' rechtwinklig schneiden wird. Da nun die drei Perpendikel aa', bb', cc' bekanntermaßen sich in einem Punkte d schneiden, so müssen auch die drei Kreise $\pi_1\alpha\alpha'$, $\pi_1\beta\beta'$, $\pi_1\gamma\gamma'$ sich in einem Punkte δ schneiden. Wir haben daher den folgenden Satz.

Wenn sich drei Kreise $\pi_1\alpha\beta$, $\pi_1\alpha\gamma$ und $\pi_1\beta\gamma$ in einem Punkte π_1 und zu zweien in den Punkten α, β und γ schneiden, und durch π_1 u. α, π_1 u. β, π_1 u. γ drei andere Kreise gelegt werden, von welchen der erste den Kreis $\pi_1\beta\gamma$ in α', der zweite den Kreis $\pi_1\alpha\gamma$ in β' und der dritte den Kreis $\pi_1\alpha\beta$ in γ' und zwar rechtwinklig schneidet, so gehen die drei zuletzt genannten Kreise durch einen und denselben Punkt δ, d. i. sie haben eine gemeinschaftliche Sehne $\pi_1\delta$.

Was wir hier von Kreisen bewiesen haben, gilt offenbar auch von ähnlichen und ähnlich-liegenden Linien zweiten Grades.

Wir legen jetzt wieder die Gleichungen (1) u. (2) des vorigen §., in welchen wir $m = n$ setzen, zu Grunde und ziehen den zu Ende des §. 9. aufgestellten Satz in Betracht. Um aber Weitläuftigkeiten zu vermeiden, nehmen wir statt des darin genannten Polygons ein Dreieck an, und geben diesem Satze folgende Form.

§. 52. Es sind zwei Gerade A_1, A_2 und drei Punkte a_1, a_2, a_3 gegeben, die in gerader Linie liegen. Zieht man durch a_1 eine beliebige Gerade B_1, welche die A_1 in einem Punkte b_1 schneidet, ferner durch b_1 und a_2 die Gerade B_2, welche die A_2 in einem Punkte b_2 trifft, endlich durch b_2 und a_3 die Gerade B_3, so schneidet diese Gerade B_3 die Gerade B_1 in einem Punkte b_3, und dieser letzte Punkt liegt auf einer Geraden C, die immer dieselbe bleibt, wie auch die erste Gerade B_1 gezogen seyn mag.

Der Satz, welcher sich aus diesem nach der in Rede stehenden Art des Entsprechens ableiten läßt, lautet nun folgendermaßen:

Es sind zwei Kreise A_1, A_2, die sich in einem festen Punkte p_1 schneiden, und drei Punkte a_1, a_2, a_3 gegeben, welche letztern mit p_1 auf einer Kreislinie liegen. Legt man nun durch a_1 und p_1 einen beliebigen Kreis B_1, welcher den Kreis A_1 in einem zweiten Punkte b_1 schneidet, ferner durch b_1, a_2 und p_1 einen Kreis B_2, welcher den Kreis A_2 in einem zweiten Punkte b_2 trifft, endlich durch b_2, a_3 und p_1 einen Kreis B_3, so schneidet dieser Kreis B_3 den Kreis B_1 in einem zweiten Punkte b_3, und dieser letzte Punkt liegt auf einem Kreise C, der durch p_1 geht und immer derselbe bleibt, wie auch der erste Kreis B_1 durch a_1 und p_1 gezogen seyn mag.

In §. 21. hat sich vermittelst der Reciprocität gezeigt, daß der zuerst genannte Satz auch in der Umkehrung wahr sey. Es folgt daraus, daß auch unser abgeleiteter Satz ebenfalls in der Umkehrung wahr seyn muß. Es läßt sich aber vermittelst der Reciprocität aus diesem abgeleiteten Satze wiederum ein neuer Satz von confocalen Linien zweiten Grades herleiten, der wie folgt lautet.

Es sind zwei confocale Linien zweiten Grades A_1, A_2, die eine feste Gerade p_1 berühren, und drei Gerade a_1, a_2, a_3 gegeben, welche letztern mit p_1 eine und dieselbe confocale Linie zweiten Grades berühren. Beschreibt man nun eine beliebige confocale Linie zweiten Grades B_1, welche a_1 und p_1 berührt, legt darauf an A_1 und B_1 eine zweite gemeinschaftliche Tangente b_1, beschreibt man ferner eine solche Curve B_2, welche b_1, a_2 und p_1 berührt, legt darauf an B_2 und A_2 eine zweite gemeinschaftliche Tangente b_2, beschreibt man endlich eine confocale Curve zweiten Grades B_3, welche b_2, a_3 und p_1 berührt, und legt darauf eine zweite gemeinschaftliche Tangente b_3 an B_1 und B_3, so berührt diese Tangente b_3 eine andere confocale Linie zweiten Grades, welche zugleich von p_1 berührt wird, und die immer dieselbe bleibt, wie auch die erste Curve B_1 an a_1 und p_1 beschrieben seyn mag.

Wir wollen jetzt annehmen, daß es ähnlich-liegende Parabeln sind, welche in dem einen Systeme den Geraden des andern Systems entsprechen, indem wir die Gleichungen (1) und (2) des vorigen §. zu Grunde legen und $n = 0$ setzen. Da wir nun in §. 38. gefunden haben, daß der Ort des Scheitels eines rechten Winkels, dessen Schenkel eine gegebene Parabel berühren, eine gerade Linie ist, so erhalten wir hieraus folgenden Satz. §. 52.

Wenn eine gerade Linie und ein Punkt gegeben ist, und man beschreibt zwei Parabeln, deren Achsen einer bestimmten Richtung parallel sind, welche sich in dem gegebenen Punkte rechtwinklig schneiden, und welche die gegebene Gerade berühren, so ist der Ort des zweiten Durchschnittspunktes dieser Parabeln eine andere Parabel, welche durch den gegebenen Punkt geht, und deren Achse derselben Richtung parallel ist.

Wir könnten diese Beispiele noch mit vielen andern vermehren; wir glauben aber, daß das bisher Beigebrachte vollkommen hinreichen wird, das Wesen der Methode kennen zu lehren. Doch wollen wir noch ein Beispiel hinzufügen, an welchem sich zeigen wird, daß jeder Satz, der vermittelst der Reciprocität verdoppelt zu werden fähig ist, mit Hülfe der in Rede stehenden Methode im Allgemeinen versechsfacht werden kann.

Wir nehmen jetzt an, daß die Gleichungen (1) u. (2) des §. 50. zu Grunde liegen, und betrachten den Lehrsatz (16), aus dem wir den Lehrsatz (25) vermittelst der Reciprocität abgeleitet haben.

Wenn wir nun setzen, daß die Cardinalpunkte p_1, p_2, p_3 des einen Systems in der Peripherie der in dem erstern Satze genannten Curve liegen, so entspricht dieser Curve eine Gerade, und den Seiten des eingeschriebenen Sechsecks entsprechen sechs Linien zweiten Grades, welche durch die Cardinalpunkte π_1, π_2, π_3 gehen und sechs auf der genannten Geraden liegende Punkte zu zwei und zwei verbinden. Demnach erhalten wir aus diesem erstern Satze den folgenden.

Wenn man auf einer Geraden sechs Punkte $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ beliebig annimmt, und sechs Linien zweiten Grades $\pi_1\pi_2\pi_3a_1a_2$, $\pi_1\pi_2\pi_3a_2a_3$, $\pi_1\pi_2\pi_3a_3a_4$, $\pi_1\pi_2\pi_3a_4a_5$, $\pi_1\pi_2\pi_3a_5a_6$ und $\pi_1\pi_2\pi_3a_6a_1$ beschreibt, welche durch drei feste Punkte π_1, π_2, π_3 gehen, und je zwei auf einander folgende Punkte der Geraden verbinden, so liegen die vierten Durchschnitte der ersten und vierten, der zweiten und fünften, der dritten und sechsten Curve auf einer durch die festen Punkte π_1, π_2, π_3 gehenden Linie zweiten Grades.

§. 52. Auf ähnliche Weise erhalten wir aus dem Lehrsatz (25) den folgenden.

Wenn man sechs Linien zweiten Grades beschreibt, welche durch die drei festen Punkte π_1, π_2, π_3 gehen und eine und dieselbe Gerade berühren; wenn man ferner die vierten Durchschnittspunkte von je zwei auf einander folgenden dieser Curven durch $a_1, a_2, \ldots a_6$ bezeichnet, und wenn man von Neuem drei Linien zweiten Grades $\pi_1\pi_2\pi_3a_1a_4$, $\pi_1\pi_2\pi_3a_2a_5$, $\pi_1\pi_2\pi_3a_3a_6$ beschreibt, welche durch die drei festen Punkte π_1, π_2, π_3 gehen und respective die Punkte a_1 u. a_4, a_2 u. a_5, a_3 u. a_6 verbinden, so schneiden sich diese drei Curven in einem und demselben Punkte.

Vermittelst der Reciprocität erhalten wir aus dem zuerst abgeleiteten Satze den folgenden.

Wenn man durch einen Punkt beliebig sechs Gerade $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ zieht, und sechs Linien zweiten Grades beschreibt, welche respective die Seiten derjenigen sechs Fünfecke berühren, die von drei festen Geraden π_1, π_2, π_3, und je zwei auf einander folgenden Geraden a_1 u. a_2, a_2 u. a_3 u. s. w. gebildet werden, so berühren die vierten gemeinschaftlichen Tangenten der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Curve eine und dieselbe, die drei festen Geraden π_1, π_2, π_3 berührende, Linie zweiten Grades.

Ferner erhalten wir aus dem andern abgeleiteten Satze:

Wenn man sechs Linien zweiten Grades beschreibt, welche drei feste Geraden π_1, π_2, π_3 berühren, und durch einen und denselben Punkt gehen; wenn man ferner die vierten gemeinschaftlichen Tangenten an je zwei auf einander folgende dieser sechs Curven durch $a_1, a_2, \ldots a_6$ bezeichnet, und wenn man von Neuem drei Linien zweiten Grades beschreibt, welche die Geraden π_1, π_2, π_3 und respective die Geraden a_1 u. a_4, a_2 u. a_5, a_3 u. a_6 berühren, so haben diese drei Curven eine und dieselbe gemeinschaftliche vierte Tangente.

Der Leser wird zu seiner Uebung aus den Lehrsätzen [13], [15], [21], [23], [24], [26] zwölf neue Sätze ableiten können.

Linien höherer Grade.

§. 53.

§. 53.

Eine Curve heißt eine Linie nten Grades, wenn ihre Gleichung in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten vom nten Grade ist, und diese Gleichung sich nicht in Factoren zerlegen läßt, die in Beziehung auf diese Coordinaten rational sind. Läßt sich eine gegebene Gleichung zwischen den Coordinaten x, y in rationale Factoren zerlegen, so drückt sie das System derjenigen Linien aus, welche durch diese einzelnen Factoren ausgedrückt werden, und daher kann man das System zweier Linien, von denen die eine vom pten, die andere vom qten Grade ist, als eine Linie des $(p+q)$ten Grades betrachten. Beispiele solcher Zerlegungen haben wir schon in §. 33. und in §. 38. gehabt.

Die Gleichung

$$y^3+xy^2-ax^2=0,$$

die sich nicht in rationale Factoren zerlegen läßt, drückt eine Linie dritten Grades aus. Die Gleichung

$$a^3y^3-a^2bxy^2+ab^2x^2y-a^3b^2y-b^3x^3+a^2b^3x=0$$

aber, die sich wie folgt

$$(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)(ay-bx)=0$$

zerlegen läßt, drückt die beiden Linien

$$a^2y^2+b^2x^2+a^2b^2=0 \quad \text{und} \quad ay-bx=0,$$

d. i. eine Ellipse und eine Gerade aus. Die Gleichung

$$y^3-(2b+c)xy^2+(b^2+2bc)x^2y-b^2cx^3=0,$$

welche sich folgendermaßen

$$(y-bx)^2(y-cx)=0$$

zerlegen läßt, gehört zweien Geraden an, von welchen die eine $y-bx=0$, und die andere $y-cx=0$ zur Gleichung hat.

Wenn eine Gleichung des nten Grades so beschaffen ist, daß sie nur für einige bestimmte Werthe von x reelle Werthe von y giebt, oder daß sie für keinen reellen Werth von x einen reellen Werth von y zuläßt, so drückt sie nur einzelne Punkte aus, oder sie hat keine geometrische Bedeutung. So z. B. drückt die Gleichung vierten Grades

§. 53. $y^4-6y^3+(2x^2-8x+23)y^2-(6x^2-20x+34)y+x^4-8x^3+27x^2-38x+26=0$ nur zwei beſtimmte Punkte aus. Denn dieſe Gleichung kann in zwei Factoren

$$\{(y-1)^2+(x-1)^2\}\{(y-2)^2+(x-3)^2\}=0$$

zerlegt werden, von denen ein jeder, als die Summe zweier Quadrate nur gleich Null werden kann, wenn ſeine Summanden ſelbſt gleich Null ſind. Die Coordinaten der beiden Punkte ſind demnach

$$\left\{\begin{matrix}x=1\\y=1\end{matrix}\right\} \text{ und } \left\{\begin{matrix}x=3\\y=2\end{matrix}\right\}.$$

Die Gleichung

$$y^4+2(x^2+1)y^2+x^4+1=0$$

hat keine geometriſche Bedeutung, was ſogleich in die Augen fällt, wenn man ſie wie folgt

$$(y^2+x^2)^2+2y^2+1=0$$

ſchreibt.

Die allgemeine Gleichung des nten Grades zwiſchen x und y kann auf zweierlei Weiſe geordnet werden. Man faßt entweder die Glieder, welche dieſelbe Potenz einer Veränderlichen enthalten, zuſammen, und ordnet ſie nach dieſen Potenzen, oder man nimmt die Glieder gleicher Dimenſionen zuſammen, und ordnet ſie nach dieſen Dimenſionen der Veränderlichen. Im erſten Falle hat man

$$\left.\begin{aligned}&\alpha y^n+(\alpha_1 x+\beta)y^{n-1}+(\alpha_2 x^2+\beta_1 x+\gamma)y^{n-2}\\&\qquad+(\alpha_3 x^3+\beta_2 x^2+\gamma_1 x+\delta)y^{n-3}\\&\qquad\qquad\vdots\\&+(\alpha_{n-1}x^{n-1}+\beta_{n-2}x^{n-2}+\ldots+\lambda_1 x+\mu)y\\&+(\alpha_n x^n+\beta_{n-1}x^{n-1}+\gamma_{n-2}x^{n-2}+\ldots+\mu_1 x+\nu)\end{aligned}\right\}=0\,,\ (1)$$

und im zweiten Falle

$$\left.\begin{aligned}&[\alpha y^n+\alpha_1 x y^{n-1}+\alpha_2 x^2 y^{n-2}+\ldots+\alpha_{n-1}x^{n-1}y+\alpha_n x^n]\\&\quad+[\beta y^{n-1}+\beta_1 x y^{n-2}+\ldots+\beta_{n-2}x^{n-2}y+\beta_{n-1}x^{n-1}]\\&\qquad\vdots\\&+[\lambda y^2+\lambda_1 xy+\lambda_2 x^2]+[\mu y+\mu_1 x]+\nu\end{aligned}\right\}=0\,.\ (2)$$

Bezeichnet man das Aggregat der Glieder nter Dimenſion durch $A^{(n)}$, das Aggregat der Glieder $(n-1)$ter Dimenſion durch $A^{(n-1)}$ u. ſ. f., ſo iſt die zweite Form der allgemeinen Gleichung durch §. 53.

$$A^{(n)}+A^{(n-1)}+A^{(n-2)}+\ldots+A^{(2)}+A^{(1)}+A^{(0)}=0 \qquad (3)$$

ausgedrückt.

Wie viele von den Coefficienten β, $\beta_1 \ldots \gamma$, $\gamma_1 \ldots$ u. ſ. w. auch gleich Null ſeyn mögen, ſo wird der Grad der Gleichung dadurch nicht erniedrigt. Durch eine Veränderung des Anfangspunktes der Coordinaten werden die, in $A^{(n)}$ enthaltenen, Glieder nter Dimenſion, wie man leicht findet, nicht geändert, und durch eine Veränderung der Lage der Coordinatenachſen können die eben genannten Glieder nicht weggeſchafft werden. Demnach kann der Grad einer Linie durch eine Transformation der Coordinaten nicht geändert werden.

Aufgabe [83]. Die Anzahl der Punkte zu finden, welche nöthig ſind, eine Linie nten Grades zu beſtimmen.

Da die Gleichung (2) $(n+1)$ Glieder nter, n Glieder $(n-1)$ter, $(n-1)$ Glieder $(n-2)$ter Dimenſion u. ſ. f. enthält, ſo hat ſie überhaupt

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ Glieder,}$$

und wenn man ſie durch einen Coefficienten dividirt, oder, was daſſelbe iſt, ihn gleich 1 ſetzt, und dieſen Coefficienten nicht mit zählt,

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\frac{n(n+3)}{2} \text{ Coefficienten,}$$

welche zu beſtimmen ſind. Nimmt man alſo $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte beliebig an, und ſetzt ihre Coordinaten nach einander für x und y in die Gleichung (1) oder (2), ſo erhält man eben ſo viele, nämlich $\frac{n(n+3)}{2}$ Gleichungen, aus welchen ſich die, in gleicher Anzahl vorhandenen, Coefficienten, welche ſie nur in erſter Potenz enthalten, auf reelle, und im Allgemeinen nur auf eine einzige Art beſtimmen laſſen.

Eine Linie nten Grades iſt daher im Allgemeinen durch $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte völlig beſtimmt. So z. B. gehören zur Beſtimmung einer Linie

§. 53. 3ten Grades 9, einer Linie 4ten Grades 14, einer Linie 5ten Grades 20 Punkte.

Es kann sich aber in besondern Fällen treffen, daß von den $\frac{n(n+3)}{2}$ Gleichungen, welche die gleiche Anzahl gegebener Punkte liefert, eine oder mehrere eine Folge der übrigen sind. Alsdann sind diese $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte nicht hinreichend, eine Linie nten Grades zu bestimmen, und es lassen sich vielmehr durch diese Punkte unendlich viele Linien nten Grades legen.

Es kann sich ferner in besondern Fällen treffen, daß die Coefficienten der Glieder nter Dimension zufolge dieser Bestimmung gleich Null werden. Alsdann ist die resultirende Gleichung der Curve von einem niedrigern Grade, und es läßt sich in diesem Falle durch die gegebenen $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte keine Curve vom nten Grade legen.

Aufgabe [84]. Es sind die auf dieselben Coordinatenachsen bezogenen Gleichungen einer Geraden und einer Linie nten Grades gegeben. Man soll die Coordinaten der Durchschnittspunkte beider Linien finden.

Es sey (1) die Gleichung der Curve und

$$y = ax + b \qquad (4)$$

die der Geraden. Da die Coordinaten der Durchschnittspunkte beide Gleichungen (1 u. 4) befriedigen müssen, so wird man diese Coordinaten durch Entwickelung ihrer Werthe aus den beiden genannten Gleichungen finden können. Eliminirt man zu dem Ende y, so erhält man eine Gleichung in x, welche vom nten Grade ist. Hat nun diese Gleichung n reelle Wurzeln, so wird man, indem diese in die Gleichung (4) substituirt werden, für y ebenfalls n reelle Werthe finden, und es schneidet alsdann die Gerade jene Linie des nten Grades in n Punkten, deren Coordinaten gefunden sind. Hat aber die Gleichung in x einige oder lauter imaginäre Wurzeln, so schneiden sich die beiden gegebenen Linien in weniger oder in gar keinen Punkten.

Demnach kann eine gerade Linie eine Linie nten Grades in nicht mehr als in n Punkten schneiden.

Aufgabe [85]. Es sind die Gleichungen zweier Linien nten und mten Grades gegeben. Man soll die Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte finden.

Da die Coordinaten der Durchschnittspunkte beide gegebenen Gleichungen befriedigen müssen, so ist weiter nichts nöthig, als die Werthe von x und y aus diesen beiden Gleichungen zu entwickeln. Man wird also zunächst eine dieser Größen, z. B. y, zu eliminiren haben. Bekanntermaßen kann diese Elimination, da die eine der beiden Gleichungen vom nten und die andere vom mten Grade ist, nur auf eine Gleichung in x führen, welche den (nm)ten Grad nicht übersteigt. Hat diese Gleichung lauter imaginäre Wurzeln, so sind alle Abscissen der Durchschnittspunkte imaginär, und es existiren alsdann keine reellen Durchschnittspunkte. Sind aber einige oder alle Wurzeln dieser Gleichung reell, so kann es sich doch ereignen, daß keine reellen Durchschnittspunkte vorhanden sind. Denn um die Durchschnittspunkte vollständig zu bestimmen, muß man noch, vermittelst einer der beiden gegebenen Gleichungen oder irgend einer Combination derselben, die Werthe von y aufsuchen, welche zu den für x gefundenen reellen Werthen gehören. Sind diese Werthe von y nun sämmtlich imaginär, so existirt kein reeller Durchschnittspunkt; sind sie aber sämmtlich oder zum Theil reell, so giebt es eben so viele reelle Durchschnittspunkte als reelle Werthe für y. §. 53.

Die Anzahl der reellen Durchschnittspunkte kann aber in keinem Falle größer als das Product der beiden Exponenten der Gleichungen, nämlich nicht größer als mn, seyn. Denn wie auch diese Durchschnittspunkte liegen mögen, so kann man offenbar immer die Abscissenachse so annehmen, daß nicht zwei Durchschnittspunkte dieselbe Abscisse haben. Alsdann hat jeder reelle Durchschnittspunkt seine eigene reelle Abscisse; da nun aber die durch Elimination von y entstandene Gleichung in x nicht mehr als mn Wurzeln haben kann, so können auch nicht mehr als mn reelle Durchschnittspunkte vorhanden seyn.

Zwei Linien vom nten und mten Grade schneiden sich daher höchstens in mn Punkten; und zwei Linien desselben nten Grades schneiden sich aufs höchste in n^2 Punkten.

Aus den Lösungen der vorigen Aufgaben ergeben sich einige Folgerungen, die nicht unberührt bleiben dürfen.

Nimmt man (n+1) in gerader Linie liegende und außerdem $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ Punkte, also zusammen $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte, beliebig an, und bestimmt nach Aufgabe (83) die Coefficienten der Gleichung (1) vermittelst der Coordina-

§. 53. ten dieſer Punkte, ſo wird man eine Gleichung vom nten Grade erhalten, die ſich in zwei Factoren vom $(n-1)$ten und vom erſten Grade zerlegen läßt, und welche daher im eigentlichen Sinne nicht eine Linie nten Grades, ſondern das Syſtem einer Linie $(n-1)$ten Grades und einer Geraden ausdrückt, und zwar iſt dieſe Gerade diejenige, welche die erſtgenannten $(n+1)$ Punkte enthält. Denn ließe ſich jene Gleichung vom nten Grade nicht ſo zerlegen, daß einer ihrer Factoren die eben genannte Gerade ausdrückt, ſo würde man durch Aufſuchung der Durchſchnittspunkte dieſer Geraden und der durch die Gleichung nten Grades ausgedrückten Linie nach Aufgabe (84) höchſtens n ſolcher Durchſchnittspunkte finden, da doch die Gleichung nten Grades eben ſo beſtimmt worden iſt, daß ſie durch die Coordinaten von $(n+1)$ Punkten der genannten Geraden befriedigt wird.

Es läßt ſich alſo durch $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte, von denen $(n+1)$ Punkte in gerader Linie liegen, keine Curve legen, die im eigentlichen Sinne eine Linie nten Grades iſt.

Auf ähnliche Weiſe ergiebt ſich, daß durch $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte, von denen $2n+1$ in einer Linie zweiten Grades liegen, keine Curve gelegt werden kann, die im eigentlichen Sinne vom nten Grade iſt, und daß die Gleichung nten Grades, welche von den Coordinaten ſolcher $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte befriedigt wird, eine Linie 2ten und eine Linie $(n-2)$ten Grades ausdrückt, von welchen die Linie 2ten Grades jene $(2n+1)$ Punkte, die Linie $(n-2)$ten Grades aber alle übrigen $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ Punkte enthält.

Lehrſatz [38]. Wenn man durch beliebig angenommene $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)$ Punkte mehrere Linien nten Grades legt, ſo ſchneiden ſich alle dieſe Curven nicht nur in dieſen $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)$ feſten Punkten, ſondern noch in andern $\left(\frac{n(n-3)}{2}+1\right)$ feſten Punkten.

So ſchneiden ſich alle Linien 3ten Grades, welche durch dieſelben 8 Punkte gehen, noch in einem beſtimmten 9ten Punkte, alle Linien vierten Grades, welche durch dieſelben 13 Punkte gehen, noch in 3 andern be-

stimmten Punkten, alle Linien 5ten Grades, welche durch dieselben 19 Punkte gehen, noch in 6 andern bestimmten Punkten u. s. w. §. 53.

Um diesen Satz zu erweisen, bemerken wir zunächst, daß, um die Coefficienten der allgemeinen Gleichung nten Grades (1) oder (2) zu bestimmen, welche von den Coordinaten der beliebig angenommenen $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)$ Punkte befriedigt wird, eben so viele Gleichungen gebildet werden können, zufolge der Aufgabe (83); und daß also, da die Anzahl dieser Coefficienten $\frac{n(n+3)}{2}$ ist, irgend einer dieser Coefficienten beliebig angenommen werden kann. Macht man daher zwei solche, aber von einander verschiedene Annahmen, so erhält man zwei Systeme von Werthen für die Coefficienten, und somit zwei Gleichungen nten Grades, welche zwei Curven ausdrücken, die beide durch die $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)$ Punkte gehen. Wir wollen diese Gleichungen durch $N = 0$ und $N' = 0$ bezeichnen.

Jede andere Linie nten Grades, welche durch die in Rede stehenden $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)$ Punkte geht, kann nun durch die Gleichung

$$N + \lambda N' = 0 \qquad (5)$$

ausgedrückt werden, wo λ einen constanten Factor bedeutet. Denn welches auch diese andere Linie nten Grades seyn mag, so ist sie (Aufg. 83.) durch $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte, also durch die mehrerwähnten $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)$ Punkte und durch noch einen andern Punkt ihrer Peripherie völlig bestimmt. Die Gleichung (5) aber wird von den Coordinaten der erstgenannten Punkte befriedigt, da ihre beiden Theile durch die Substitution dieser Coordinaten annullirt werden, und wenn man die Coordinaten des zuletzt genannten Punktes substituirt, so kann man λ, welches nur in erster Potenz vorkommt, immer so bestimmen, daß auch diese Substitution die Gleichung (5) befriedigen muß.

Da nun eine jede der in Rede stehenden Curven durch die Gleichung (5) auszudrücken ist, und diese Gleichung durch alle diejenigen Werthe von x und y befriedigt wird, welche zu gleicher Zeit

$$N = 0 \quad \text{und} \quad N' = 0$$

befriedigen, d. i. durch n^2 solcher Werthe, unter denen sich die Werthe der

§. 53. Coordinaten der zuerst genannten $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)$ Punkte befinden; so wird sie auch noch durch

$$n^2-\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)=\frac{n(n-3)}{2}+1$$

Coordinatenwerthe befriedigt, welche immer dieselben sind, was auch λ seyn mag; folglich gehen alle in Rede stehenden Curven durch andere $\left(\frac{n(n-3)}{2}+1\right)$ feste Punkte, w. z. e. w. *).

Es versteht sich von selbst, daß diese $\left(\frac{n(n-3)}{2}+1\right)$ Punkte zum Theil oder sämmtlich imaginär seyn, und daß sie auch in unendlicher Entfernung liegen können.

Lehrsatz [39]. Wenn von den n^2 Punkten, in welchen sich irgend zwei Linien $n$ten Grades schneiden, np Punkte auf einer Linie $p$ten Grades liegen, so kann durch die übrigen $n(n-p)$ Punkte eine Linie $(n-p)$ten Grades gelegt werden.

Es sey $P=0$ die Gleichung $p$ten Grades, welche die np Punkte enthält. Man bestimme (Aufg. 83.) die Gleichung $Q=0$ einer Linie $(n-p)$ten Grades, welche durch beliebige $\left(\frac{(n-p)(n-p+3)}{2}\right)$ Punkte von den übrigen $n(n-p)$ Punkten geht, und bilde sodann die Gleichung

$$PQ=0,$$

so ist diese vom $n$ten Grade, und drückt das System zweier Linien aus, welche $\left(np+\frac{(n-p)(n-p+3)}{2}\right)$ Punkte oder, was dasselbe ist,

$$\frac{n(n+3)}{2}+\frac{p(p-3)}{2}$$

von den n^2 Punkten enthalten. Welche positive ganze Zahl p nun auch seyn mag, so ist $\frac{p(p-3)}{2}\geqq -1$, also immer $\frac{n(n+3)}{2}+\frac{p(p-3)}{2}\leqq \frac{n(n+3)}{2}-1$; folglich geht das durch die Gleichung $PQ=0$ ausge-

*) Dieser Satz ist zuerst von Hrn. Plücker im 19ten Bande der Annales de mathématiques aufgestellt worden.

drückte Syſtem der beiden Curven, das wir als eine Linie nten Grades be- §. 53.
trachten können, noch durch die übrigen $\left(\frac{n(n-3)}{2} - \frac{p(p-3)}{2}\right)$ Punkte (vor. Lehrſ.). Da nun aber die Linie $P = 0$ mit einer der beiden in dem Lehrſatze genannten Linien nten Grades nicht mehr als np Punkte gemein haben (Aufg. 85.), alſo nicht mehr als np von den n^2 Punkten enthalten kann, ſo müſſen die übrigen $(n^2 - np)$ oder $n(n-p)$ Punkte in der Curve $Q = 0$ des $(n-p)$ten Grades liegen, w. z. e. w.

Lehrſatz [40]. Wenn drei Linien nten Grades durch dieſelben np Punkte gehen, die auf einer Linie pten Grades liegen, ſo liegen die übrigen $n(n-p)$ Punkte, in welchen ſich je zwei jener Curven noch ſchneiden, in drei Linien $(n-p)$ten Grades, welche ſich in denſelben $(n-p)^2$ Punkten ſchneiden.

Es ſeyen $N = 0$, $N' = 0$, $N'' = 0$ die Gleichungen jener drei Linien nten Grades, und $P = 0$ die Gleichung der Linie pten Grades, auf welcher ſie ſich ſchneiden. Es ſeyen ferner $Q' = 0$ und $Q'' = 0$ die Gleichungen der beiden Linien $(n-p)$ten Grades, welche reſpective durch die übrigen $n(n-p)$ Durchſchnitte der Curven $N = 0$ und $N' = 0$, und durch die übrigen $n(n-p)$ Durchſchnitte der Curven $N = 0$ und $N'' = 0$, nach dem vorigen Lehrſatze, gelegt werden können.

Da nun

$$N + \lambda N' = 0 \quad \text{und} \quad N + \lambda' N'' = 0$$

alle Linien nten Grades ausdrücken, welche durch die Durchſchnitte der Curven N und N', und durch die Durchſchnitte der Curven N und N'' gelegt werden können, ſo müſſen ſich λ und λ' ſo beſtimmen laſſen, daß

$$N + \lambda N' \equiv PQ' = 0 \quad \text{und} \quad N + \lambda' N'' \equiv PQ'' = 0 .$$

Zieht man dieſe identiſchen Gleichungen von einander ab, ſo kommt

$$\lambda N' - \lambda' N'' \equiv P(Q' - Q'') = 0 ,$$

und da die Gleichung $\lambda N' - \lambda' N'' = 0$ von den Coordinaten der Durchſchnittspunkte der beiden Curven $N' = 0$ und $N'' = 0$ befriedigt wird, und im Allgemeinen vom nten Grade iſt, ſo drückt ſie, und folglich auch die ihr identiſche Gleichung

$$P(Q' - Q'') = 0$$

eine Linie nten Grades aus, welche durch die n^2 Durchſchnitte der Linien $N' = 0$ und $N'' = 0$ geht. Da aber die Gleichung $P(Q' - Q'') = 0$

§. 53. das Product der beiden Gleichungen $P = 0$ und $Q' - Q'' = 0$ ist, so ist diese Linie nten Grades das System zweier Linien pten und $(n-p)$ten Grades, deren Gleichungen

$$P = 0 \quad \text{und} \quad Q' - Q'' = 0$$

sind. Es liegen also, von den n^2 Durchschnitten der Linien $N' = 0$ und $N'' = 0$, von welchen np Durchschnitte auf der Linie $P = 0$ sich befinden, die übrigen $n(n-p)$ Durchschnitte auf der Linie $Q' - Q'' = 0$, welche, wie man sieht, vom $(n-p)$ten Grade ist. Diese Curve aber geht durch die $(n-p)^2$ Durchschnittspunkte der beiden Linien $Q' = 0$ und $Q'' = 0$, w. z. e. w. *).

Aus den beiden letzten Sätzen, lassen sich mehrere andere als Corollare ableiten. Nimmt man z. B. an, daß die beiden Linien nten Grades zwei Systeme von n Geraden sind, so hat man, nach dem Lehrsatz (39):

Wenn von den n^2 Durchschnitten zweier Systeme von n Geraden, np Durchschnitte auf einer Linie pten Grades liegen, so liegen die übrigen $n(n-p)$ Durchschnitte auf einer Linie $(n-p)$ten Grades.

Setzt man $p = 2$, so ergiebt sich

Wenn von den n^2 Durchschnitten zweier Systeme von n Geraden, $2n$ Durchschnitte auf einer Linie 2ten Grades liegen, so liegen die übrigen $n(n-2)$ Durchschnitte auf einer Linie $(n-2)$ten Grades, und umgekehrt.

Es sey ein Polygon von $2n$ Seiten in einer Linie zweiten Grades eingeschrieben; alsdann können die Seiten geraden Ranges als das eine System von n Geraden, und die Seiten ungeraden Ranges als das andere System von eben so vielen Geraden angesehen werden. Es ergiebt sich somit aus dem so eben aufgestellten Satze:

In jedem $(2n)$-Eck, welches in einer Linie zweiten Grades eingeschrieben ist, liegen die Durchschnitte der (verlängerten) Seiten geraden Ranges mit denen des ungeraden Ranges, welche nicht anliegen, in einer Linie $(n-2)$ten Grades und umgekehrt.

Setzt man noch $n = 3$, so hat man den Pascal'schen Satz vom eingeschriebenen Sechsecke (§. 34. Lehrs. 16.).

---

*) Die beiden letzten Sätze sind zuerst von Hrn. Gergonne in den Annales de mathém. T. XVII. gegeben worden.

Wie sich aus dem Lehrsatze (40) Corollare ableiten lassen, wird der Leser leicht selbst finden. §. 53.

§. 54.

Aufgabe [86]. Es ist eine Linie nten Grades und die Richtung einer Geraden gegeben. Man soll den Ort des Punktes P finden, welcher so liegt, daß, wenn man durch ihn eine Gerade der gegebenen Richtung parallel zieht, die algebraische Summe aller Abschnitte dieser Geraden, welche einerseits von dem Punkte P und andererseits von der gegebenen Curve begrenzt werden, eine gegebene Größe habe.

Bezeichnen wir, wie im vorigen §., die gegebene Gleichung der Linie nten Grades in rechtwinkligen Coordinaten durch

$$A^{(n)}+A^{(n-1)}+A^{(n-2)}+\ldots+A^{(2)}+A^{(1)}+A^{(0)}=0 \qquad (1)$$

und die Coordinaten des gesuchten Punktes P durch x', y', wo

$$A^{(n)} = \alpha y^n + \alpha_1 x y^{n-1} + \alpha_2 x^2 y^{n-2} + \ldots + \alpha_n x^n$$
$$A^{(n-1)} = \beta y^{n-1} + \beta_1 x y^{n-2} + \beta_2 x^2 y^{n-3} + \ldots + \beta_{n-1} x^{n-1}$$

ist, so erhalten wir durch Transformation, indem wir den Punkt P zum Anfangspunkte der Coordinaten nehmen, und demgemäß $x+x'$ und $y+y'$ für x und y setzen, eine Gleichung von der Form

$$B^{(n)}+B^{(n-1)}+B^{(n-2)}+\ldots+B^{(1)}+B^{(0)}=0\,, \qquad (2)$$

wo $B^{(n)}$ das Aggregat der Glieder, welche in Beziehung auf x und y von der nten Dimension sind, $B^{(n-1)}$ das Aggregat der Glieder $(n-1)$ter Dimension, $B^{(n-2)}$ das Aggregat der Glieder $(n-2)$ter Dimension u. s. f. bezeichnen. Macht man die nöthige Entwickelung der Glieder höchster Dimensionen, so ergiebt sich

$$B^{(n)} = \alpha y^n + \alpha_1 x y^{n-1} + \alpha_2 x^2 y^{n-2} + \ldots + \alpha_n x^n$$
$$B^{(n-1)} = \{n\alpha y^{n-1} + (n-1)\alpha_1 x y^{n-2} + (n-2)\alpha_2 x^2 y^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}\} y'$$
$$+ \{\alpha_1 y^{n-1} + 2\alpha_2 x y^{n-2} + 3\alpha_3 x^2 y^{n-3} + \ldots + n\alpha_n x^{n-1}\} x'$$
$$+ \beta y^{n-1} + \beta_1 x y^{n-2} + \beta_2 x^2 y^{n-3} + \ldots + \beta_{n-1} x^{n-1}\,.$$

Transformirt man die Gleichung (2) wiederum in Polarcoordinaten, indem man $u\sin t$ und $u\cos t$ für y und x setzt, so erhält man eine Gleichung von der Form

§. 54. $$T_n u^n + T_{n-1} u^{n-1} + T_{n-2} u^{n-2} + \ldots + T_1 u + T_0 = 0 \,, \qquad (3)$$

wo T_n, T_{n-1}, $\ldots T_1$ Functionen von t, y' und x' sind, T_0 aber nur x' und y' enthält. Aus dieser Gleichung erhält u für ein bestimmtes t im Allgemeinen n verschiedene Werthe, deren algebraische Summe bekanntermaßen gleich $-\frac{T_{n-1}}{T_n}$ ist. Legt man nun diesem t denjenigen Werth φ bei, welcher den Winkel ausdrückt, den die gegebene Richtung mit der Abscissenachse bildet, und bezeichnet die gegebene Größe der Summe der Abschnitte durch C, so hat man

$$C = -\frac{T_{n-1}}{T_n} \quad \text{oder} \quad T_{n-1} + CT_n = 0 \,,$$

oder endlich, wenn man die angegebene Substitutionen ausführt,

$$\left.\begin{aligned} &\{n\alpha \sin^{n-1}\varphi + (n-1)\alpha_1 \cos\varphi \sin^{n-2}\varphi + \ldots + \alpha_{n-1}\cos^{n-1}\varphi\}y' \\ &+\{\alpha_1 \sin^{n-1}\varphi + 2\alpha_2 \cos\varphi \sin^{n-2}\varphi + \ldots + n\alpha_n \cos^{n-1}\varphi\}x' \\ &+\{\beta \sin^{n-1}\varphi + \beta_1 \cos\varphi \sin^{n-2}\varphi + \ldots + \beta_{n-1}\cos^{n-1}\varphi\} \\ &+C\{\alpha \sin^n\varphi + \alpha_1 \cos\varphi \sin^{n-1}\varphi + \ldots + \alpha_n \cos^n\varphi\} \end{aligned}\right\} = 0 \,. \quad (4)$$

Diese Gleichung, welche außer x' und y' nur gegebene Größen enthält, ist in Beziehung auf x' und y' vom ersten Grade. Der Ort des Punktes P ist demnach eine gerade Linie.

Wenn die gegebene Größe $C = 0$ ist, d. i. wenn die algebraische Summe der genannten Abschnitte gleich Null, oder, mit andern Worten, wenn die Summe der, auf der einen Seite des Punktes P liegenden, Abschnitte der Summe aller auf der andern Seite liegenden gleich ist, so heißt die Gerade, welche der Ort des Punktes P ist, ein Durchmesser der Curve. Die Lage eines Durchmessers der Linie nten Grades ist, wie man aus der Gleichung (4) sieht, in welcher $C = 0$ zu setzen ist, von den in der Gleichung dieser Curve vorkommenden Constanten, und von dem Winkel φ abhängig. Da nun dieser Winkel, wenn es nur darauf ankommt, irgend einen Durchmesser der Curve zu finden, beliebig angenommen werden kann, so sieht man, daß eine Linie nten Grades im Allgemeinen unendlich viele Durchmesser hat.

Fehlen in der Gleichung (1) der gegebenen Linie nten Grades alle Glieder (n—1)ter Dimension oder, was dasselbe ist, sind die Coefficienten

$\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$ sämmtlich gleich Null, so ist die Gleichung eines Durch- §. 54.
messers dieser Curve

$$\{n\alpha \sin^{n-1}\varphi + (n-1)\alpha_1 \cos\varphi \sin^{n-2}\varphi + \ldots + \alpha_{n-1}\cos^{n-1}\varphi\}y'$$
$$+ \{\alpha_1 \sin^{n-1}\varphi + 2\alpha_2 \cos\varphi \sin^{n-2}\varphi + \ldots + n\alpha_n \cos^{n-1}\varphi\}x' = 0, \quad (5)$$

und dieser Durchmesser geht, was auch φ für einen Werth haben mag, durch den Anfangspunkt der Coordinaten. Ist also eine Linie n ten Grades so beschaffen, daß aus ihrer Gleichung sämmtliche Glieder $(n-1)$ ter Dimension fortgeschafft werden können, so schneiden sich alle ihre Durchmesser in einem und demselben Punkte.

Hat die Gleichung einer Linie n ten Grades nur das eine Glied αy^n n ter Dimension, oder läßt sie sich auf eine solche Form bringen, so sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sämmtlich gleich Null, und die Gleichung eines Durchmessers ist alsdann

$$n\alpha \sin^{n-1}\varphi . y' + \{\beta \sin^{n-1}\varphi + \beta_1 \cos\varphi \sin^{n-2}\varphi + \ldots + \beta_{n-1}\cos^{n-1}\varphi\} = 0;$$

folglich sind in diesem Falle alle Durchmesser der Abscissenachse, und also auch einander parallel, mit Ausnahme desjenigen, welcher zu dem Winkel $\varphi = 0$ gehört, und dessen Lage in jedem Falle besonders bestimmt werden muß. Aehnliches findet Statt, wenn die Gleichung der Curve nur das eine Glied $\alpha_n x^n$ n ter Dimension enthält.

Wenn beide Fälle zugleich eintreffen, daß nämlich die Gleichung nur das eine Glied αy^n n ter Dimension und kein Glied $(n-1)$ ter Dimension enthält, oder auf eine solche Form gebracht werden kann, so ist die Gleichung eines Durchmessers

$$y' = 0,$$

welchen Werth man auch für φ, außer Null, annehmen mag. Die Curve hat alsdann im Allgemeinen nur diesen einen Durchmesser, welcher mit einer der Coordinatenachsen zusammenfällt. Dieser Durchmesser theilt alsdann nicht nur die Sehnen der Curve, die einer bestimmten Richtung parallel sind, so, daß die Summe der, auf der einen Seite liegenden, Stücke der Summe der, auf der andern Seite liegenden gleich ist, sondern er theilt alle Sehnen, wie sie auch gezogen seyn mögen, auf diese Weise.

Wenn in der Gleichung (1) alle Glieder der $(n-1)$ ten, $(n-3)$ ten, $(n-5)$ ten u. s. f. Dimension fehlen, oder, mit andern Worten, wenn die

§. 54. Gleichung einer Linie nten Grades in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten kein Glied von der (n—2h—1)ten Dimension enthält, oder auf eine solche Form gebracht werden kann, so wird sie nach der Transformation in Polarcoordinaten die Form

$$T_n u^n + T_{n-2} u^{n-2} + T_{n-4} u^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

bekommen, wo T_n, T_{n-2} u. s. w. Functionen von t sind. Ist n eine gerade Zahl, so kann man $u^2 = z$ setzen, wodurch man eine Gleichung in z erhält, die $\frac{1}{2}n$ Wurzeln hat, und die Quadratwurzeln dieser $\frac{1}{2}n$ Größen, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, geben die n Wurzeln der Gleichung in u. Daraus folgt, daß diese Gleichung eben so viele positive als negative, absolut genommen einander gleiche, Wurzeln habe, und daß also jede Gerade, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, von der Curve so geschnitten wird, daß sich auf beiden Seiten dieses Punktes gleiche Abschnitte befinden. Ist n eine ungerade Zahl, so hat die Gleichung in u kein constantes Glied, indem das constante Glied von der Dimension 0 ist; alsdann läßt sich die Gleichung in zwei Factoren

$$u\{T_n u^{n-1} + T_{n-2} u^{n-3} + T_{n-4} u^{n-5} + \text{etc.}\} = 0$$

zerlegen, so daß ein Werth von u gleich Null, alle andern Werthe von u aber zu zweien einander gleich und entgegengesetzt seyn müssen. Demnach wird, eben so wie im vorigen Falle, jede durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Gerade, so geschnitten, daß sich auf beiden Seiten dieses Punktes gleiche Abschnitte befinden. Einen Punkt, der diese Eigenschaft besitzt, nennt man **Mittelpunkt** der Curve.

Aufgabe [87]. Es sind zwei Linien nten Grades und die Richtungen zweier Geraden gegeben. Man soll den Ort des Punktes P finden, welcher so liegt, daß, wenn man durch ihn eine Gerade an die eine Curve der einen Richtung parallel, und eine andere Gerade an die andere Curve der zweiten Richtung parallel zieht, das Product der Abschnitte auf der einen Geraden und das Product der Abschnitte auf der andern Geraden, welche Abschnitte einerseits von dem Punkte P und andererseits respective von den Curven begrenzt werden, in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Es seyen

$$N = A^{(n)} + A^{(n-1)} + A^{(n-2)} + \ldots + A^{(0)} = 0 ,$$

$$N' = A_1^{(n)} + A_1^{(n-1)} + A_1^{(n-2)} + \ldots + A_1^{(0)} = 0 \qquad \text{§. 54.}$$

die auf dieſelben rechtwinkligen Coordinatenachſen bezogenen Gleichungen der gegebenen Curven, wo $A^{(n)}$, $A_1^{(n)}$ die Aggregate der Glieder nter Dimenſion $A^{(n-1)}$, $A_1^{(n-1)}$ die Aggregate der Glieder $(n-1)$ter Dimenſion u. ſ. w. bezeichnen. Es ſeyen ferner φ und ψ die beiden Winkel, welche die gegebenen Richtungen der beiden Geraden mit der Abſciſſenachſe bilden, und $\lambda : 1$ das gegebene Verhältniß. Bezeichnen wir die Coordinaten des geſuchten Punktes durch x', y' und transformiren beide Gleichungen, indem wir dieſen Punkt zum Anfangspunkte der Coordinaten nehmen, und demgemäß $x+x'$ und $y+y'$ für x und y ſetzen, ſo erhalten wir zwei Gleichungen von der Form

$$B^{(n)} + B^{(n-1)} + B^{(n-2)} + \ldots + B^{(0)} = 0,$$
$$B_1^{(n)} + B_1^{(n-1)} + B_1^{(n-2)} + \ldots + B_1^{(0)} = 0;$$

Setzen wir nun ferner, um zu Polarcoordinaten überzugehen, $u\sin t$ und $u\cos t$ für y und x, ſo erhalten wir die beiden Gleichungen

$$T_n u^n + T_{n-1} u^{n-1} + T_{n-2} u^{n-2} + \ldots + T_0 = 0,$$
$$T'_n u^n + T'_{n-1} u^{n-1} + T'_{n-2} u^{n-2} + \ldots + T'_0 = 0,$$

wo T_n, T_{n-1}, ... T'_n, T'_{n-1}... Functionen von x', y' und t ſind. Aus einer jeden dieſer Gleichungen erhält u bekanntermaßen n Werthe, deren Producte reſpective

$$\pm\frac{T_0}{T_n} \quad \text{und} \quad \pm\frac{T'_0}{T'_n}$$

ſind, wo die obern Zeichen, wenn n gerade, und die untern, wenn n ungerade iſt, zu nehmen ſind. Legt man nun dem t in dem erſten Ausdruck den Werth φ, und in dem zweiten den Werth ψ bei, ſo muß, zufolge der Aufgabe,

$$\frac{T_0}{T_n} = \lambda\frac{T'_0}{T'_n} \quad \text{oder} \quad T'_n T_0 - \lambda T_n T'_0 = 0$$

ſeyn. In dieſer Gleichung ſind aber T_n und T'_n nicht von x' und y', ſondern nur von φ u. ψ abhängig, alſo conſtante Größen, und T_0, T'_0 ergeben ſich aus N u. N', wenn man darin für x u. y bloß x' u. y' ſetzt. Laſſen wir alſo die Accente von x' u. y', welche jetzt nicht mehr nöthig ſind, weg, und bezeichnen den conſtanten Ausdruck $\frac{\lambda T_n}{T'_n}$ durch $-\lambda'$, ſo haben wir als

§. 54. Gleichung des gesuchten Ortes

$$N + \lambda' N' = 0 ,$$

der demnach eine Linie nten Grades ist, welche durch die n^2 Durchschnittspunkte der gegebenen Curven $N = 0$ und $N' = 0$ geht.

Wir wollen jetzt drei Linien nten Grades betrachten, die sich in denselben n^2 Punkten schneiden. Sind

$$N = 0 \quad \text{und} \quad N' = 0$$

die Gleichungen von zwei dieser Curven, so kann die dritte immer durch die Gleichung

$$N + \lambda' N' = 0$$

ausgedrückt werden (was im Beweise des Lehrsatzes (38) nachgewiesen ist), wo λ' einen unveränderlichen Werth hat. Soll diese Gleichung nun mit derjenigen identisch seyn, welche den in der vorigen Aufgabe gefundenen Ort des Punktes P ausdrückt, so muß

$$\lambda' = -\frac{T_n}{T'_n}\lambda$$

seyn. Da nun in dieser letzten Gleichung λ nur in erster Potenz vorkommt, so kann diese Größe, die wir jetzt als nicht gegeben betrachten, immer so bestimmt werden, daß die eben genannte Gleichung befriedigt wird; und hieraus ergiebt sich der folgende

Lehrsatz [41]. Wenn sich drei Linien nten Grades in denselben n^2 Punkten schneiden, und von einem Punkte einer dieser Curven zwei Gerade an die beiden andern Curven zweien beliebigen, aber unveränderlichen Richtungen parallel gezogen werden, so ist das Product der Abschnitte, welche auf der einen Geraden von dem genannten Punkte und der zweiten Curve begrenzt werden, zu dem Producte der Abschnitte, welche auf der andern Geraden von demselben Punkte und der dritten Curve begrenzt werden, in einem constanten Verhältnisse, wo auch jener Punkt auf der ersten Curve angenommen werden mag.

Offenbar kann man an die Stelle der zweiten und dritten Curve auch zwei Systeme von Geraden setzen, von welchen ein jedes aus n Geraden besteht, und es ist auch einleuchtend, daß man statt der beiden, zweien beliebigen, constanten Richtungen parallelen, Geraden zwei mal n Gerade nehmen kann, welche die Geraden der beiden Systeme unter beliebigen, aber constanten Winkeln treffen, somit haben wir den

Lehr-

Lehrsatz [42]. Wenn eine Linie $n$ten Grades durch die n^2 Durchschnitte zweier Systeme von n geraden Linien geht, und von einem Punkte der Curve $2n$ Gerade gezogen werden, welche die Geraden der beiden Systeme unter beliebigen, aber constanten Winkeln treffen, so ist das Verhältniß des Productes der n Geraden, welche an dem einen Systeme sich endigen, zu dem Producte der n Geraden, welche von dem andern Systeme begrenzt werden, immer dasselbe, wo auch jener Punkt auf der Curve angenommen werden mag. §. 54.

Nehmen wir jetzt an, daß von den n^2 Durchschnittspunkten der beiden genannten Systeme pn Punkte auf einer Linie $p$ten Grades, und also die übrigen $n(n-p)$ Punkte auf einer Linie $(n-p)$ten Grades liegen (vor. §.), so können diese beiden Curven als eine Linie $n$ten Grades betrachtet werden, und es kommt alsdann jedem Punkte der einen Curve sowohl als jedem Punkte der andern Curve die Eigenschaft zu, daß die von ihm an die n Geraden des einen Systems und an die n Geraden des andern Systems unter constanten Winkeln gezogenen Geraden zwei Producte bilden, deren Verhältniß unveränderlich ist.

Es sey ein Polygon von $2n$ Seiten in einer Linie zweiten Grades eingeschrieben; alsdann können die Seiten geraden Ranges als die n Geraden des einen Systems und die ungeraden Ranges als die n Geraden des andern Systems angesehen werden, und wir erhalten unmittelbar den

Lehrsatz [43]. Wenn ein $(2n)$-Eck in einer Linie zweiten Grades eingeschrieben ist, und von einem Punkte dieser Curve nach den Seiten des Polygons Gerade gezogen werden, welche diese Seiten unter beliebigen constanten Winkeln treffen, so ist das Product der n Geraden, welche an die Seiten geraden Ranges gezogen sind, zu dem Producte der n Geraden, welche an die Seiten ungeraden Ranges geführt worden, ein constantes, wo auch der Punkt in der Curve angenommen seyn mag. Und dieses Verhältniß ist auch dann noch dasselbe, wenn jener Punkt auf derjenigen Linie $(n-2)$ten Grades angenommen wird, welche sich durch die $n(n-2)$ Durchschnitte der verlängerten Seiten geraden und ungeraden Ranges legen läßt.

Aufgabe [88]. Es ist eine Linie $n$ten Grades und ein Punkt P, der nicht auf dieser Curve liegt, gegeben. Um den Punkt P dreht sich eine Gerade, die von der Curve in n (reellen oder imaginären) Punkten $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$ geschnitten wird, und auf dieser Geraden bewegt sich ein Punkt Q so, daß

§. 54.

$$\frac{1}{Pp_1}+\frac{1}{Pp_2}+\frac{1}{Pp_3}+\ldots.+\frac{1}{Pp_n}=\frac{1}{PQ}$$

ist. Es soll der Ort des Punktes Q gefunden werden.

Wir nehmen den gegebenen Punkt P zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten und bezeichnen die Gleichung der gegebenen Curve, wie in den vorigen Aufgaben, durch

$$A^{(n)}+A^{(n-1)}+A^{(n-2)}+\ldots.+A^{(0)}=0\ .$$

Transformiren wir diese Gleichung in Polarcoordinaten, indem wir $u\sin t$ und $u\cos t$ für y und x setzen, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$T_nu^n+T_{n-1}u^{n-1}+T_{n-2}u^{n-2}+\ldots.+T_2u^2+T_1u+T_0=0\ ;$$

und wenn wir die n Wurzeln dieser letzten Gleichung durch $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ bezeichnen, so ist bekanntermaßen

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\ldots.+\frac{1}{u_n}=-\frac{T_1}{T_0}\ .$$

Da nun aber offenbar $Pp_1=u_1, Pp_2=u_2, \ldots.Pp_n=u_n$ ist, so haben wir $\frac{1}{PQ}=-\frac{T_1}{T_0}$, oder, wenn wir den Radius vector von Q durch u' bezeichnen,

$$\frac{1}{u'}=-\frac{T_1}{T_0}\quad\text{oder}\quad T_1u'+T_0=0\ .$$

Da ferner $A^{(0)}=\nu$, $A^{(1)}=\mu y+\mu_1 x$ (S. 242.) also $T_0=\nu$, $T_1=\mu\sin t+\mu_1\cos t$, so haben wir

$$\mu u'\sin t+\mu_1u'\cos t+\nu=0\ ,$$

oder, wenn wir zu rechtwinkligen Coordinaten zurückkehren und die Coordinaten von Q, $u'\sin t=y'$, $u'\cos t=x'$ setzen,

$$\mu y'+\mu_1x'+\nu=0$$

als Gleichung des Ortes von Q, welcher also eine gerade Linie ist.

§. 55.

Eine Linie nten Grades ist entweder in einem endlichen Raume enthalten, wie die Ellipse, oder sie erstreckt sich ins Unendliche, wie die Hyperbel und Parabel.

Aufgabe [89]. Es ist die Gleichung einer Linie nten Grades

gegeben. Man soll finden, ob diese Curve sich ins Unendliche erstrek- §. 55.
ken kann.

Es sey wieder

$$A^{(n)}+A^{(n-1)}+A^{(n-2)}+\ldots+A^{(1)}+A^{(0)}=0 \qquad (1)$$

die Gleichung der gegebenen Curve in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten.

Transformirt man diese Gleichung in Polar-Coordinaten, indem man (§. 3. F. 12.) $\frac{u\sin(\alpha'-t)}{\sin\alpha'}$ und $\frac{u\sin t}{\sin\alpha'}$ für x und y setzt, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$T_nu^n+T_{n-1}u^{n-1}+T_{n-2}u^{n-2}+\ldots+T_2u^2+T_1u+T_0=0\,,$$

aus welcher Gleichung u im Allgemeinen n Werthe erhält. Um nun zu finden, ob ein Werth von u unendlich werden, und daher der Endpunkt des Leitstrahls u in unendlicher Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten liegen kann, setzen wir $u=\frac{1}{z}$, wodurch die Gleichung sich in

$$T_0z^n+T_1z^{n-1}+T_2z^{n-2}+\ldots+T_{n-2}z^2+T_{n-1}z+T_n=0$$

verwandelt. Soll aber $u=\infty$ seyn, so muß $z=\frac{1}{\infty}=0$ seyn, und da für $z=0$, in Folge der letzten Gleichung, auch $T_n=0$ seyn muß, so haben wir als Bedingung, daß die gegebene Curve sich ins Unendliche erstrecke, die analytische Bedingung, es müsse sich t so bestimmen lassen, daß $T_n=0$ werde. Es ist aber, da $A^{(n)}$ das Aggregat

$$\alpha y^n+\alpha_1xy^{n-1}+\alpha_2x^2y^{n-2}+\ldots+\alpha_nx^n$$

bedeutet,

$$T_n=\frac{1}{\sin^n\alpha'}\{\alpha\sin^nt+\alpha_1\sin(\alpha'-t)\sin^{n-1}t+\alpha_2\sin^2(\alpha'-t)\sin^{n-2}t+\ldots+\alpha_n\sin^n(\alpha'-t)\}\,,$$

oder, wenn man $\frac{\sin t}{\sin(\alpha'-t)}$ der Kürze wegen durch q bezeichnet,

$$T_n=\frac{\sin^n(\alpha'-t)}{\sin^n\alpha'}\{\alpha q^n+\alpha_1q^{n-1}+\alpha_2q^{n-2}+\ldots+\alpha_n\}\,.$$

Man sieht leicht ein, daß dieser Ausdruck von T_n nicht dadurch gleich Null werden kann, daß der Zähler des ersten Factors, $\sin^n(\alpha'-t)$, gleich Null ist; denn

§. 55. dadurch wird zugleich der zweite Factor $= \infty$, weil $q = \frac{\sin t}{\sin(\alpha' - t)}$ ist; es reducirt sich vielmehr der Werth von T_n für $\sin^n(\alpha' - t) = 0$, d. i. für $t = \alpha'$ oder $t = \pi + \alpha'$, wie man aus der vorletzten Gleichung sieht, auf α. Es kann daher T_n nur dadurch annullirt werden, daß der zweite Factor, also

$$\alpha q^n + \alpha_1 q^{n-1} + \alpha_2 q^{n-2} + \ldots + \alpha_n = 0 \qquad (2)$$

wird. Hat diese Gleichung eine oder mehrere reelle Wurzeln ϱ, so wird $T_n = 0$, wenn man t so nimmt, daß $\sin t = \varrho \sin(\alpha' - t)$, was immer möglich ist; hat diese Gleichung aber keine reelle Wurzel, so giebt es auch keinen reellen Werth für t, welcher $T_n = 0$ macht. Da nun die Gleichung (2), wie man leicht einsieht, aus dem Aggregate $A^{(n)}$ der Glieder höchster Dimension unmittelbar gebildet werden kann, indem man dasselbe durch x^n dividirt und q für $\frac{y}{x}$ setzt, so ergiebt sich folgende Regel:

Man dividire von der gegebenen Gleichung der Linie n ten Grades in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten nur das Aggregat der Glieder n ter Dimension durch x^n, setze q für $\frac{y}{x}$ und das Resultat gleich Null. Hat die auf diese Weise gebildete Gleichung eine oder mehrere reelle Wurzeln, so kann die Curve sich ins Unendliche erstrecken; hat sie nur imaginäre Wurzeln, so kann die Curve sich nicht ins Unendliche erstrecken, sondern ist in einem endlichen Raume enthalten. Dabei ist aber zu bemerken, daß, wenn die Gleichung in q von einem niedrigern Grade als vom n ten, also vom (n—m)ten ist, sie dennoch als eine Gleichung n ten Grades angesehen werden muß, deren höchste Glieder fehlen, und die somit wenigstens m reelle Wurzeln hat, die $= \infty$ sind.

Jede Linie von einem ungeraden Grade erstreckt sich ins Unendliche; denn wie groß man auch eine der beiden Coordinaten annehmen mag, so hat die andere in der höchsten Potenz vorkommende Coordinate immer wenigstens einen reellen Werth.

§. 56.

Unter den Linien eines jeden Grades sind diejenigen in analytischer Hinsicht die einfachsten, deren Ordinate eine ganze rationale Function der Abscisse ist, und deren Gleichungen also die Form

$$y = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots+Mx^{n-1}+Nx^n \qquad (1)$$ §. 56.

haben, oder durch Transformation der Coordinaten auf diese Form gebracht werden können. Solche Linien werden *parabolische Curven* genannt. Man muß diese Linien nicht mit *Parabeln höherer Art* verwechseln, unter welchen letztern man diejenigen Curven versteht, deren Gleichungen die Form $y^n = px^m$ haben.

Setzt man in die Gleichung (1) $x-\frac{M}{n.N}$ für x, d. i. transformirt man sie indem man einen in der Abscissenachse liegenden Punkt, dessen Abscisse $-\frac{M}{n.N}$ ist, zum Anfangspunkte der Coordinaten nimmt, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$y = A'+B'x+C'x^2+D'x^3+\ldots+L'x^{n-2}+Nx^n ,$$

in welcher kein Glied von der $(n-1)$ten Dimension vorkommt, wenn $n>2$ ist. Die neue Ordinatenachse ist also, wenn $n>2$ ist, der einzige Durchmesser der Curve (1), (§. 54.).

Daß sich jede parabolische Curve ins Unendliche erstreckt, kann nach der vorigen Aufgabe leicht gezeigt werden. Es folgt dies aber auch unmittelbar aus der Gleichung (1), indem zu jedem reellen Werth von x, wie groß er auch genommen werden mag, immer ein reeller Werth von y gehört.

Eine parabolische Curve $n$ten Grades ist, wenn die Lage der Coordinatenachsen gegeben ist, durch $(n+1)$ Punkte völlig bestimmt, indem ihre Gleichung (1) nicht mehr als $(n+1)$ Coefficienten enthält. Wenn die Coordinaten $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\ldots\alpha_n\beta_n$ dieser $(n+1)$ Punkte gegeben sind, so kann man zwar nach Aufgabe (83) (§. 53.) die Coefficienten der Gleichung dieser Curve bestimmen; man kann aber diese Gleichung auch unmittelbar auf folgende Weise darstellen.

Man setze nämlich

$$y = \beta X+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\ldots+\beta_nX_n , \qquad (2)$$

wo

$$X = \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\ldots(x-\alpha_n)}{(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)(\alpha-\alpha_3)(\alpha-\alpha_4)\ldots(\alpha-\alpha_n)} ,$$

$$X_1 = \frac{(x-\alpha)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\ldots(x-\alpha_n)}{(\alpha_1-\alpha)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)} ,$$

§. 56.

$$X_2 = \frac{(x-\alpha)(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\ldots(x-\alpha_n)}{(\alpha_2-\alpha)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$X_n = \frac{(x-\alpha)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_{n-1})}{(\alpha_n-\alpha)(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}$$

ist, so wird die Gleichung (2) die paraboliſche Curve ausdrücken, welche durch die gegebenen (n+1) Punkte geht. Denn da X, X_1, X_2 etc. ganze rationale Functionen des nten Grades von x ſind, ſo iſt auch der zweite Theil der Gleichung (2) eine ſolche Function; und

für $x = \alpha$ iſt $X = 1$, $X_1 = 0$, $X_2 = 0 \ldots X_n = 0$, alſo $y = \beta$,
für $x = \alpha_1$ iſt $X = 0$, $X_1 = 1$, $X_2 = 0 \ldots X_n = 0$, alſo $y = \beta_1$,
für $x = \alpha_2$ iſt $X = 0$, $X_1 = 0$, $X_2 = 1 \ldots X_n = 0$, alſo $y = \beta_2$,

$\vdots$

für $x = \alpha_n$ iſt $X = 0$, $X_1 = 0$, $X_2 = 0 \ldots X_n = 1$, alſo $y = \beta_n$.

Folglich geht die Curve durch die gegebenen (n+1) Punkte.

Wenn die Coefficienten A, B, ...N der Gleichung (1) gegebene numeriſche Werthe haben, ſo iſt es leicht, die Ordinaten zu ſo vielen gegebenen Abſciſſen zu berechnen als man will, und alsdann eben ſo viele Punkte der paraboliſchen Curve graphiſch zu beſtimmen. Bilden die gegebenen Werthe der Abſciſſen eine arithmetiſche Reihe erſter Ordnung, ſo läßt ſich die Berechnung der Ordinaten auf bloße Additionen zurückführen, indem y als das allgemeine Glied einer arithmetiſchen Reihe nter Ordnung angeſehen werden kann.

Aufgabe [90]. Die Gleichung

$$20000y = x^4 - 251x^3 + 20170x^2 - 566400x + 3888000 = 0 \quad (3)$$

einer paraboliſchen Curve iſt gegeben. Man ſoll, Behufs einer Verzeichnung dieſer Curve, die Werthe der Ordinaten y berechnen, welche zu den Abſciſſen x gleich 0, 10, 20, 30, ...150 gehören.

Wir ſetzen, um der Reihe für die Abſciſſen die Differenz 1 zu geben, $x = 10x'$, wodurch ſich die gegebene Gleichung, nach der Diviſion durch 20000, in

$$y = 0{,}5x'^4 - 12{,}55x'^3 + 100{,}85x'^2 - 283{,}2x' + 194{,}4 \quad (4)$$

verwandelt. Betrachten wir dieſen Ausdruck von y als das allgemeine Glied §. 56.
einer arithmetiſchen Reihe vierter Ordnung, bezeichnen den Werth von y für $x' = 0$ durch y_0, und die Anfangsglieder der Differenzen-Reihen durch Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_0$, ſo findet ſich, nach bekannten Regeln,

$y_0 = +194{,}4$, $\Delta y_0 = -194{,}4$, $\Delta^2 y_0 = 133{,}4$, $\Delta^3 y_0 = -57{,}3$, $\Delta^4 y_0 = +12$,

wonach wir durch bloße Addition die folgende Tafel bilden:

x'	x	y	Δy	Δ²y	Δ³y	Δ⁴y
0	0	+ 194,4				
			— 194,4			
1	10	0,0		+ 133,4		
			— 61,0		— 57,3	
2	20	— 61,0		+ 76,1		+ 12
			+ 15,1		— 45,3	
3	30	— 45,9		+ 30,8		+ 12
			+ 45,9		— 33,3	
4	40	0,0		— 2,5		+ 12
			+ 43,4		— 21,3	
5	50	+ 43,4		— 23,8		+ 12
			+ 19,6		— 9,3	
6	60	+ 63,0		— 33,1		+ 12
			— 13,5		+ 2,7	
7	70	+ 49,5		— 30,4		+ 12
			— 43,9		+ 14,7	
8	80	+ 5,6		— 15,7		+ 12
			— 59,6		+ 26,7	
9	90	— 54,0		+ 11,0		+ 12
			— 48,6		+ 38,7	
10	100	— 102,6		+ 49,7		+ 12
			+ 1,1		+ 50,7	
11	110	— 101,5		+ 100,4		+ 12
			+ 101,5		+ 62,7	
12	120	0,0		+ 163,1		+ 12
			+ 264,6		+ 74,7	
13	130	+ 264,6		+ 237,8		+ 12
			+ 502,4		+ 86,7	
14	140	+ 767,0		+ 324,5		
			+ 826,9			
15	150	+ 1593,9				

Wir haben nämlich zuerſt nur die Anfangsglieder aller Reihen und die mit $\Delta^4 y$ bezeichnete Reihe hingeſchrieben; ſodann durch ſucceſſive Addition der Glieder unter $\Delta^4 y$ zu dem Anfangsgliede unter $\Delta^3 y$ dieſe zweite Reihe gefunden; darauf haben wir die Reihe unter $\Delta^2 y$ durch ſucceſſive Addition der Glieder der ſo eben gefundenen Reihe zu dem Anfangsgliede $\Delta^2 y$, erhalten ꝛc. bis wir zu den Gliedern unter y gekommen ſind. Wir bemerken hierbei, daß es nicht gerade nothwendig iſt, die für x gegebene Reihe auf eine andere mit der Differenz 1 zu reduciren, um die Werthe von y auf die angegebene Art zu berechnen.

Vermittelſt der hier gefundenen Werthe von y iſt die Curve in Fig. 30. Fig. 30.
verzeichnet. Die Gerade DD', welche durch den Punkt der Abſciſſenachſe AX geht, für welchen $x = \frac{251}{4} = 62{,}75$, iſt der Durchmeſſer der Curve; und dieſe Gerade hat die Eigenſchaft jede gerade Linie CF ſo zu theilen, daß BC + BG = BE + BF iſt.

§. 56. Wenn die Abſciſſen keine arithmetiſche Reihe bilden, ſo kann man das, in der letzten Aufgabe angegebene, Verfahren nicht anwenden. Indeſſen laſſen ſich doch noch Abkürzungen zur Berechnung der Ordinaten anbringen. Es würde uns zu weit führen, dieſen Gegenſtand hier in ſeiner ganzen Ausdehnung zu behandeln, doch wollen wir noch bemerken, daß, wenn die paraboliſche Curve n ten Grades die Abſciſſenachſe in n reellen Punkten ſchneidet, der zweite Theil der Gleichung (1) ſich nothwendigerweiſe in n reelle Factoren erſten Grades zerlegen läßt; alsdann kann man dieſer Gleichung die Form

$$\log y = \log a + \log(x-a_1) + \log(x-a_2) + \log(x-a_3) + \ldots + \log(x-a_n)$$

geben, wodurch $\log y$ für jeden Werth von x durch bloße Addition, und dann auch y leicht gefunden werden kann.

§. 57.

Wenn die Ordinate einer Curve eine gebrochene rationale Function der Abſciſſe iſt, ſo läßt ſich die Berechnung der Ordinaten auf eine ähnliche Weiſe wie in der vorigen Aufgabe vereinfachen. Kommen aber in der Gleichung einer Linie n ten Grades beide Coordinaten in höhern Potenzen vor, ſo iſt es ſo leicht nicht, zu einer gegebenen Anzahl Werthe von x die zugehörigen Werthe von y zu berechnen. Hat die Gleichung in Beziehung auf y die quadratiſche Form, ſo kann man ſie auflöſen, und auf dieſe Weiſe die Werthe von y für jeden Werth von x beſtimmen; aber die Wurzelausziehungen, die zur Berechnung erforderlich ſind, verlängern dieſe bedeutend. Gehört die Gleichung n ten Grades in Beziehung auf eine der Coordinaten zu den cubiſchen oder biquadratiſchen, ſo iſt die Berechnung mehrerer Ordinatenwerthe, vermittelſt der ſtrengen Auflöſung der Gleichung, ſo beſchwerlich, daß es gerathener iſt, ſich mit Näherungswerthen zu begnügen, die immer hinreichen, wenn es nur auf eine Verzeichnung der Curve ankommt, und mit denen man ſich zu begnügen gezwungen iſt, wenn die Gleichung in Beziehung auf beide Coordinaten den vierten Grad überſteigt. Solche Näherungswerthe von y findet man entweder nach den bekannten Methoden zur Auflöſung numeriſcher Gleichungen, indem die gegebene Gleichung nach Subſtitution der für x angenommenen Werthe zu einer numeriſchen wird, oder dadurch, daß man aus der Gleichung das y in einer nach Potenzen von x fortſchreitenden Reihe entwickelt, und die Summe einer beliebigen Anzahl

von Gliedern dieſer Reihe für die gegebenen Werthe von x berechnet, wenn die Reihe für dieſe Werthe convergirt. §. 57.

Es giebt indeſſen viele Fälle, in welchen ſich die Werthe von y, vermittelſt ſchicklicher Subſtitutionen, leichter berechnen laſſen. Die folgende Aufgabe enthält ein Beiſpiel eines ſolchen Falles.

Aufgabe [91]. Es ſind drei Punkte A, B, C gegeben. Man ſoll den Ort des Punktes P finden, welcher ſo liegt, daß die Geraden, welche von dieſem Punkte P nach den gegebenen Punkten gezogen werden, gleiche Winkel APB, APC bilden. Fig. 31.

Wir nehmen die Verbindungslinien AB und AC zu Coordinatenachſen. Es ſey Winkel $BAC = \alpha$, $AB = a$ und $AC = b$. Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Punktes P, deſſen Ort geſucht wird, durch x, y, und die laufenden Coordinaten der Geraden AP, BP und CP durch t, u, ſo iſt (§. 4.)

$$\text{die Gleichung von BP;} \quad u = \frac{y}{x-a}(t-a),$$

$$\text{die Gleichung von CP;} \quad u-b = \frac{y-b}{x}t,$$

$$\text{die Gleichung von AP;} \quad u = pt,$$

wo p eine veränderliche Größe bezeichnet. Nach §. 6. (F. 2.) iſt

$$tang\,APB = \frac{\left(\frac{y}{x-a}-p\right)sin\,\alpha}{1+\left(\frac{y}{x-a}+p\right)cos\,\alpha+\frac{yp}{x-a}},$$

$$tang\,APC = \frac{\left(p-\frac{y-b}{x}\right)sin\,\alpha}{1+\left(p+\frac{y-b}{x}\right)cos\,\alpha+\frac{y-b}{x}p},$$

und da beide Winkel einander gleich ſeyn ſollen, ſo muß

$$\frac{y-p(x-a)}{(x-a)+[y+p(x-a)]cos\alpha+yp} = \frac{px-(y-b)}{x+(px+y-b)cos\alpha+(y-b)p}$$

ſeyn. Da ferner P in der Geraden AP liegt, ſo hat man auch $y = px$, und wenn man p vermittelſt dieſer Gleichung eliminirt,

$$\frac{ay}{y^2+x^2-ax+(2xy-ay)cos\alpha} = \frac{bx}{y^2+x^2-by+(2yx-bx)cos\alpha},$$

§. 57. oder

$$(ay-bx)(y^2+x^2+2xy\cos\alpha)-ab(y^2-x^2)=0 \qquad (1)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, welcher, wie man sieht, eine Linie dritten Grades ist.

Wir bemerken zunächst, daß die Gleichung (1) von folgenden drei Paar Werthen von x und y befriedigt wird:

$$\left\{\begin{matrix} y=0 \\ x=0 \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} y=0 \\ x=a \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} y=b \\ x=0 \end{matrix}\right\},$$

und daß also die Curve durch die Punkte A, B, C geht. Ferner bemerken wir, daß, wenn AB = AC, d. i. wenn a = b ist, die Gleichung (1) die Form

$$(y-x)(y^2+x^2+2xy\cos\alpha-ay-bx)=0$$

annimmt, und also eine den Winkel ABC halbirende Gerade und einen durch die Punkte A, B, C gehenden Kreis ausdrückt, was sich auf bloß geometrischem Wege leicht hätte finden lassen.

Was nun die Gestalt der Curve betrifft, so zeigt sich zuförderst, daß sie sich, als eine Linie von einem ungeraden Grade, ins Unendliche erstreckt (§. 55.). Um beliebig viele Punkte der Curve zu bestimmen, kann man auf verschiedene Weise verfahren. Zunächst ist klar, daß der Punkt P der Durchschnitt zweier ähnlichen Kreisbogen ist, die respective AB und AC zu Sehnen haben. Man kann daher, ohne die Gleichung der Curve zu benutzen, so viele Punkte der Curve verzeichnen als man will. Sollen aber diese Punkte durch ihre Coordinaten bestimmt werden, so kann man, um der cubischen Gleichung zu entgehen, die man aufzulösen haben würde, wenn man für beliebig angenommene Werthe von x die zugehörigen Werthe von y suchen wollte, auf folgende Weise verfahren. Man setze in die Gleichung (1) $y=px$, so kommt nach der Division durch x^2

$$(ap-b)(p^2+2p\cos\alpha+1)x-ab(p^2-1)=0,$$

woraus man

$$x=\frac{ab(p^2-1)}{(ap-b)(p^2+2p\cos\alpha+1)},$$

und sodann

$$y=\frac{ab(p^2-1)p}{(ap-b)(p^2+2p\cos\alpha+1)}$$

erhält. Hiernach kann man, für jeden beliebig angenommenen Werth von p, x und y berechnen.

Man kann aber auch zu einem ähnlichen Reſultate gelangen, wenn man §. 57.
die Gleichung (1) in Polar-Coordinaten (nach §. 3. F. 12.) transformirt, wodurch man

$$\{a\,sin t - b\,sin(\alpha - t)\}\{sin^2 t + 2\,sin t\,sin(\alpha - t)\,cos\alpha + sin^2(\alpha - t)\}u^3 - ab\,sin\alpha\{sin^2 t - sin^2(\alpha - t)\}u^2 = 0$$

erhält. Dieſe Gleichung läßt ſich durch u^2 dividiren, und da nach bekannten goniometriſchen Formeln

$$sin^2 t + 2\,sin t\,sin(\alpha - t)\,cos\alpha + sin^2(\alpha - t) = sin^2\alpha\ ;$$
$$sin^2 t - sin^2(\alpha - t) = sin(2t - \alpha)\,sin\alpha$$

iſt, ſo hat man

$$[a\,sin t - b\,sin(\alpha - t)]u = ab\,sin(2t - \alpha)\ . \qquad (2)$$

Ehe wir weiter gehen, wollen wir bemerken, daß dieſe letzte Gleichung auf eine einfache Weiſe vermittelſt eines Satzes der Trigonometrie hergeleitet werden kann. Man hat nämlich in den Dreiecken APB u. APC

$$tang\,APB = \frac{\overline{AB}\,.\,sin\,BAP}{\overline{AP} - \overline{AB}\,.\,cos\,BAP}\ ;\ tang\,APC = \frac{\overline{AC}\,.\,sin\,CAP}{\overline{AP} - \overline{AC}\,.\,cos\,CAP}\ ,$$

und, da die beiden Winkel APB und APC einander gleich ſeyn ſollen,

$$\frac{\overline{AB}\,.\,sin\,BAP}{\overline{AP} - \overline{AB}\,.\,cos\,BAP} = \frac{\overline{AC}\,.\,sin\,CAP}{\overline{AP} - \overline{AC}\,.\,cos\,CAP}\ ,$$

oder, wenn man für $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AP}$, BAP und CAP reſpective a, b, u, t und $(\alpha - t)$ ſetzt,

$$\frac{a\,sin\,t}{u - a\,cos\,t} = \frac{b\,sin(\alpha - t)}{u - b\,cos(\alpha - t)}\ ,$$

woraus ſich, nach Fortſchaffung der Nenner, die Gleichung (2) ergiebt. Dieſe letztere Art, um zu der Gleichung (2) zu gelangen, iſt zwar einfacher als diejenige, die wir zuerſt genommen haben, ſie ſetzt aber einen Satz vom Dreiecke als bekannt voraus.

Aus der Gleichung (2) kann man für jeden Werth von t den zugehörigen Werth von u leicht berechnen, indem dieſe Größe nur in erſter Potenz vorkommt. Um indeſſen der Gleichung eine etwas ſymmetriſchere Geſtalt zu geben, nehmen wir die Halbirungslinie des von den Geraden AB, AC eingeſchloſſenen Winkels α zur Abſciſſenachſe, indem wir $t + \frac{1}{2}\alpha$ ſtatt t ſetzen. Dadurch erhalten wir

$$[a\,sin(\tfrac{1}{2}\alpha + t) - b\,sin(\tfrac{1}{2}\alpha - t)]u = ab\,sin\,2t\ ,$$

§. 57. oder

$$[(a-b)\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos t+(a+b)\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin t]u = ab\sin 2t\ ;$$

und um dieſer letzten Gleichung eine für die Berechnung noch bequemere Form zu geben, ſetzen wir

$$a^2+2ab\cos\alpha+b^2=r^2\ ;\ \frac{a-b}{r}\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\varphi\ ;\ \frac{a+b}{r}\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\varphi\ ,$$

wodurch ſie ſich auf

$$(\sin\varphi\cos t+\cos\varphi\sin t)ru = ab\sin 2t\ ,$$

oder

$$\sin(\varphi+t)ru = ab\sin 2t \qquad (3)$$

reducirt, eine Gleichung, die zur Berechnung von u vermittelſt Logarithmen ſehr brauchbar iſt. Wir erhalten nämlich aus ihr

$$\log u = \log\frac{ab}{r}+\log\sin 2t-\log\sin(\varphi+t)\ .$$

Wir wollen beiſpielsweiſe

$$a = 1000\ ;\ b = 866\ ;\ \alpha = 150^0,\ \text{alſo}\ \tfrac{1}{2}\alpha = 75^0$$

ſetzen, woraus ſich näherungsweiſe

$$r=\sqrt{a^2+2ab\cos\alpha+b^2}=500\ ;\ \varphi=15^0\ ;\ \frac{ab}{r}=1732\ ;\ \log\frac{ab}{r}=3{,}2385479$$

ergiebt. Die Berechnung der Werthe von u kann nun nach dem in der folgenden Tafel enthaltenen Schema geführt werden, in welcher wir von den 35 verſchiedenen Werthen, die wir zwiſchen $t=0^0$ und $t=180^0$, Behufs der Verzeichnung der Curve in Fig. 31., für u berechnet haben, nur 12 aufnehmen wollen.

t	2t	φ+t	log sin 2t	log sin(φ+t)	log u	u
0	0	15	— ∞	. . . . .	— ∞	0,0
20	40	35	9,80806	9,75859	3,28801	+ 1941,4
40	80	55	9,99335	9,91336	3,31853	+ 2082,3
60	120	75	9,93753	9,98494	3,19113	+ 1553,0
80	160	95	9,53405	9,99777	2,77483	+ 594,0
90	180	105	— ∞	. . . . .	— ∞	0,0
100	200	115	9,53405	9,95727	2,81532	— 653,6
120	240	135	9,98494	9,84948	3,32659	— 2116,4
140	280	155	9,99335	9,62595	3,60595	— 4026,7
160	320	175	9,80807	8,94029	4,10633	—12774,0
165	330	180	. . . . .	— ∞	+ ∞	∞
170	340	185	9,53405	8,94029	3,83231	+ 6796,8
175	350	190	9,23967	9,23967	3,47048	+ 1732,0
180	360	195	— ∞	. . . . .	— ∞	0,0

Für Werthe von t, die größer als 180° sind, braucht man die Werthe von u nicht zu berechnen, weil, zufolge der Gleichung, der Werth von u für einen Winkel von (180+t)° dem Werthe von u für den Winkel von t° gleich und entgegengesetzt ist. §. 57.

Wenn wir uns die Aufgabe stellen, denjenigen Punkt P einer Kreislinie, deren Centrum A ist, zu finden, in welchem die Tangente oder, was auf dasselbe hinausläuft, der Radius mit zwei nach den gegebenen Punkten B u. C gezogenen Geraden PB und PC gleiche Winkel bildet; so erhalten wir jetzt, da die Curve (1) verzeichnet ist, diesen Punkt, durch den Durchschnitt derselben mit dem Kreise. Wir sehen zugleich, daß es immer zwei solche Punkte in der Kreislinie geben muß, wie groß auch der Radius seyn mag, da die Curve (1) durch den Mittelpunkt geht und sich mit zwei Schenkeln ins Unendliche erstreckt, und daß es auch vier solcher Punkte auf dem Kreise geben kann, was der Fall seyn wird, wenn der Radius des Kreises eine gewisse Größe nicht überschreitet. Wenn aber die Curve nicht verzeichnet wäre, so könnte der gesuchte Punkt der Kreislinie dadurch gefunden werden, daß man den gegebenen Radius für u in die Gleichung (3) substituirt, und sodann die Werthe von t aus derselben entwickelt. Man könnte ferner diesen Punkt vermittelst einer Linie zweiten Grades construiren; denn, wenn ϱ den gegebenen Radius bezeichnet, so ist die Gleichung des Kreises in Beziehung auf das zuerst angenommene schiefwinklige Coordinatensystem

$$y^2+x^2+2xy\cos\alpha-\varrho^2=0\ ,$$

und combiniren wir diese Gleichung mit der Gleichung (1), so ergiebt sich

$$\varrho^2(ay-bx)-ab(y^2-x^2)=0$$

oder

$$aby^2-abx^2-a\varrho^2y+b\varrho^2x=0\ ,$$

welches die Gleichung einer Hyperbel ist, die von den Coordinaten des gesuchten Punktes befriedigt werden muß. Wird also nur diese Hyperbel construirt, so giebt sie vermittelst ihrer Durchschnitte mit dem gegebenen Kreise den verlangten Punkt.

§. 58.

Das im vorigen Paragraphen gefundene Resultat, daß nämlich die Gleichung (1), wenn sie in Polar-Coordinaten transformirt wird, sich durch u^2 dividiren läßt, giebt zu der Frage Veranlassung, in welchen Fällen eine

§. 58. ähnliche Erniedrigung des Grades der Gleichung in Beziehung auf den Radius vector bei einer Gleichung nten Grades überhaupt Statt finden könne.

Fig. 31. Betrachtet man den Lauf der Curve in Fig. 31. näher, so sieht man, daß sie, wie jede Curve dritten Grades, von einer Geraden in drei Punkten geschnitten werden kann. Wäre also der Anfangspunkt der Polar-Coordinaten irgend ein beliebiger Punkt in der Ebene der Curve, so würde der Radius vector, der zu irgend einem Winkel t gehört, im Allgemeinen drei Werthe haben, oder wäre dieser Anfangspunkt irgend ein beliebiger Punkt der Curve, so würde ein Werth dieses Leitstrahls gleich Null seyn, so daß sich alsdann die Gleichung in zwei Factoren zerlegen lassen müßte, von welchen einer u wäre. Aber in der Lösung der vorigen Aufgabe ist der Anfangspunkt der Polar-Coordinaten nicht irgend ein beliebiger Punkt der Curve, sondern der Punkt A, durch welchen die Curve zweimal geht. Deshalb werden, was auch t seyn mag, zwei Werthe von u gleich Null oder, was dasselbe ist, die Gleichung läßt sich durch u^2 dividiren. Einen solchen Punkt, durch welchen eine Curve zweimal geht, nennt man einen doppelten Punkt. Geht die Curve dreimal, viermal oder überhaupt mehrere Male durch einen Punkt, so heißt er ein dreifacher, vierfacher oder überhaupt vielfacher Punkt der Curve. Man übersieht leicht, daß, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten ein m-facher Punkt einer Curve nten Grades ist, die Polargleichung der Curve in Beziehung auf u sich auf den (n — m)-ten Grad reducirt. Man darf aber nicht umgekehrt schließen, daß nämlich der Anfangspunkt der Coordinaten ein m-facher sey, wenn die Polargleichung einer Curve nten Grades in Beziehung auf u vom (n — m)ten Grade ist. Denn diese Polargleichung kann durch Zerlegung in Factoren entstanden seyn, von welchen keiner gleich u ist. So ist z. B. die Polargleichung der Linien zweiten Grades in Beziehung auf u nur vom ersten Grade, wenn ein Brennpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen wird (§. 33. G. 13 — 16).

Auf dem bisher Gesagten beruht ein Verfahren, die vielfachen Punkte einer Linie nten Grades aus ihrer Gleichung aufzufinden, was sich durch die Lösung der folgenden Aufgabe an einem Beispiele zeigen wird. Wir müssen aber zuvor noch bemerken, daß durch dieses Verfahren, außer den vielfachen Punkten einer Curve, auch diejenigen Punkte aufgefunden werden, deren Coordinaten zwar die Gleichung der Curve befriedigen, die aber nicht zu der stetigen Folge der Punkte dieser Linie gehören, sondern abgesondert

liegen, und daher isolirte oder auch conjugirte (zugehörige) Punkte genannt werden. §. 58.

Aufgabe [92]. Es ist die Gleichung

$$ky^2 = (x-a)(x-b)x \qquad (1)$$

einer Curve dritten Grades gegeben, wo a, b und k positive Größen bedeuten sollen, von denen die beiden ersten auch gleich Null seyn können. Man soll die vielfachen und isolirten Punkte der Curve finden, wenn sie dergleichen hat.

Wir transformiren die gegebene Gleichung (1), indem wir einen noch unbestimmten Punkt, dessen Coordinaten wir durch x', y' bezeichnen, zum neuen Anfangspunkte nehmen, und $x+x'$, $y+y'$ für x, y setzen, wodurch wir

$$ky^2-x^3+(a+b-3x')x^2+2ky'y-[(x'-a)x'+(x'-b)x'+(x'-a)(x'-b)]x \\ +ky'^2-(x'-a)(x'-b)x' = 0$$

erhalten. Setzen wir nun, um zu Polar-Coordinaten übergehen (§. 3. F. 12.), $y = \frac{u\sin t}{\sin\alpha}$; $x = \frac{u\sin(\alpha-t)}{\sin\alpha}$, so kommt

$$\left.\begin{array}{l} -\sin^3(\alpha-t).u^3+[k\sin^2t+(a+b-3x')\sin^2(\alpha-t)]\sin\alpha.u^2 \\ +[2ky'\sin t-\{(x'-a)x'+(x'-b)x'+(x'-a)(x'-b)\}\sin(\alpha-t)]\sin^2\alpha.u \\ +[ky'^2-(x'-a)(x'-b)x']\sin^3\alpha \end{array}\right\} = 0 .$$

Aus dieser Gleichung erhält u im Allgemeinen drei Werthe. Nimmt man aber den Anfangspunkt x'y' in der Curve an, so ist das letzte Glied der Gleichung gleich Null, nämlich

$$ky'^2-(x'-a)(x'-b)x' = 0 ; \qquad (2)$$

und alsdann läßt sich die Gleichung durch u dividiren, so daß ein Werth von u gleich Null ist, was auch t seyn mag. Soll aber der Punkt x'y' ein vielfacher Punkt der Curve seyn, so muß nicht nur dieser eine Werth von u, sondern es muß wenigstens noch ein Werth von u für jedes t gleich Null werden. Es muß daher

$$2ky'\sin t-\{(x'-a)x'+(x'-b)x'+(x'-a)(x'-b)\}\sin(\alpha-t) ,$$

für jeden Werth von t, gleich Null seyn; was nur Statt finden kann, wenn zu gleicher Zeit

$$y' = 0 , \quad (3) \quad \text{und} \quad (x'-a)x'+(x'-b)x'+(x'-a)(x'-b) = 0 \quad (4)$$

ist. Die Coordinaten eines vielfachen oder isolirten Punktes der Curve müs-

§. 58. sen also den Gleichungen (2), (3) und (4) zu gleicher Zeit Genüge leisten. Die Gleichung (3) reducirt die Gleichungen (2) und (4) auf

$$(x'-a)(x'-b)x' = 0 \quad ; \quad (x'-a)x'+(x'-b)x'+(x'-a)(x'-b) = 0 .$$

Die erste dieser beiden Gleichungen giebt für x' die drei Werthe a, b und 0; und diese Werthe, nach einander in die zweite Gleichung substituirt, reduciren den ersten Theil derselben, der Reihe nach, auf

$$(a-b)a \quad ; \quad (b-a)b \quad ; \quad ab .$$

Die Curve hat also nur in den Fällen einen vielfachen Punkt, wenn einer dieser Ausdrücke gleich Null, also wenn entweder

$$a = 0 \quad \text{oder} \quad b = 0 \quad \text{oder} \quad a = b$$

ist. Die Werthe von x' und y', welche die Gleichungen (2), (3) und (4) zu gleicher Zeit befriedigen, sind, wenn $a = 0$ ist: $x' = 0$, $y' = 0$, wenn $b = 0$ ist: $x' = 0$, $y' = 0$, und wenn $a = b$ ist: $x' = a = b$, $y' = 0$.

Ist $a = 0$, so findet man aus der Gleichung (1)

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x-b}{k}} ,$$

und man sieht, daß für alle Werthe von x, welche kleiner als b sind, y imaginär wird, ausgenommen für $x = 0$, für welchen Werth $y = 0$ wird. Der Anfangspunkt der Coordinaten gehört mithin, wenn $a = 0$ ist, nicht zu der stetigen Folge der Punkte der Curve; da aber seine Coordinaten die Gleichung der Curve befriedigen, so ist er ein isolirter oder conjugirter Punkt derselben.

Ist $b = 0$, so ist der Anfangspunkt der Coordinaten aus ähnlichen Gründen ein isolirter Punkt.

Ist $a = b$, so giebt die Gleichung (1)

$$y = \pm(x-a)\sqrt{\frac{x}{k}} ,$$

und y ist, für alle Werthe von x zwischen 0 und $+\infty$, reell. Der Punkt, dessen Coordinaten $x = a$ und $y = 0$ sind, liegt daher auf der Curve und ist ein doppelter Punkt, indem diese Coordinaten die Gleichungen (2), (3) u. (4) befriedigen.

Eine jede Curve ändert ihre Form, wenn sich die Coefficienten ihrer Gleichung verändern, und daher rührt es, daß die Curve der Gleichung (1) im Allgemeinen keinen vielfachen oder isolirten Punkt hat, sondern daß dies nur

in

in besondern Fällen Statt findet. Die folgende Betrachtung wird hierüber mehr Licht verbreiten. §. 58.

Aus der Gleichung (1) erhalten wir

$$y = \pm\sqrt{\frac{(x-a)(x-b)x}{k}}.$$

Ist nun $a > b$, so ergiebt sich hieraus unmittelbar Folgendes.

Für alle negativen Werthe von x ist	y imaginär.
Für alle Werthe von x zwischen 0 und b ist	y reell.
Für alle Werthe von x zwischen b und a ist	y imaginär.
Für alle Werthe von x zwischen a und $+\infty$ ist	y reell.

Nehmen wir z. B. $b = 20$, $a = 30$ und $k = 20$ an, und berechnen eine hinlängliche Anzahl Werthe für y, was vermittelst der Gleichung

$$\log y = \tfrac{1}{2}\{\log(x-30) + \log(x-20) + \log x - \log k\} \qquad (5)$$

leicht geschehen kann, so finden wir, daß die Curve, wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, die Gestalt der Figur 32. hat, die aus zwei abgesonderten Theilen ABED und FCG besteht. Fig. 32.

Lassen wir $a = 30$ und $k = 20$ unverändert, und nehmen b immer kleiner und kleiner, so zieht sich der reelle Theil ABED der Curve immer mehr und mehr zusammen, bis er endlich, für $b = 0$, in einen Punkt A degenerirt, wie in Figur 33. Dieser Punkt A ist nun der conjugirte Punkt, den wir oben gefunden haben. Fig. 33.

Lassen wir aber in der Gleichung (5) $b = 20 = k$ unverändert, und nehmen a kleiner und kleiner bis es $= b = 20$ wird, so nimmt der Zwischenraum zwischen dem Blatte ABED und dem andern Theile FCG der Curve immer mehr ab, bis endlich für $a = 20$ die Punkte B und C zusammenfallen, so daß die Curve, wie Figur 34., nicht mehr aus zwei abgesonderten Theilen besteht, und in B den doppelten Punkt hat, den wir oben gefunden haben. Fig. 34.

Lassen wir jetzt den gemeinschaftlichen Werth von $a = b$ immer mehr und mehr abnehmen, so zieht sich die Schleife ABED der Curve in Fig. 34. immer mehr und mehr zusammen, bis sie für $a = b = 0$ in einen Punkt A degenerirt, wie in Figur 35. Dieser Punkt A, welcher noch immer die Eigenschaft eines doppelten Punktes hat, und in welchem die Curve eine Spitze bildet, wird ein Rückkehrpunkt genannt. Fig. 35.

Die Curve in Figur 35., deren Gleichung

§. 58. $ky^3 = x^6$, (6)

ist eine Parabel höherer Ordnung, und wird semicubische Parabel oder (nach William Neil) Neilische Parabel genannt.

Wenn eine Linie nten Grades einen dreifachen Punkt hat, so wird man ihn auf ähnliche Weise aus der Gleichung der Curve auffinden können. Man wird nämlich einen noch unbestimmten Punkt x'y' zum Anfangspunkte der Coordinaten nehmen, die Gleichung sodann in Polar-Coordinaten transformiren, und die Coefficienten von u^2 und u und auch das letzte Glied gleich Null setzen, und x', y' so bestimmen, daß die auf diese Weise gebildeten Gleichungen unabhängig von t befriedigt werden.

Ueberhaupt werden, wenn eine Linie nten Grades einen m-fachen Punkt hat, die Coefficienten der letzten m Glieder der eben so transformirten Gleichung für jeden Werth von t gleich Null werden, wenn man für x' und y' die Coordinaten dieses m-fachen Punktes setzt.

Da die Gleichung

$$A^{(n)}+A^{(n-1)}+A^{(n-2)}+\ldots+A^{(m)}+\ldots+A^{(0)} = 0 ,$$

wenn sie in Polar-Coordinaten transformirt wird, die Form

$$T_n u^n + T_{n-1} u^{n-1} + T_{n-2} u^{n-2} + \ldots + T_m u^m + \ldots + T_0 = 0$$

annimmt, wo jedes einzelne Glied $T_m u^m$ aus jedem einzelnen Aggregate $A^{(m)}$ durch Substitution von $u\frac{sint}{sina}$ und $u\frac{sin(\alpha - t)}{sina}$ für y und x entstanden ist; so werden, wenn in der ersten Gleichung die letzten m Aggregate fehlen, auch in der letzten Gleichung die letzten m Glieder nicht vorhanden seyn, so daß sich diese Gleichung durch u^m wird dividiren lassen. Von den n Werthen, welche diese Gleichung giebt, werden also m Werthe gleich Null seyn. Daraus folgt, daß, wenn in der Gleichung einer Linie nten Grades, die auf rechtwinklige oder schiefwinklige Achsen bezogen ist, die Glieder der m niedrigsten Dimensionen fehlen, der Anfangspunkt der Coordinaten ein m-facher oder ein conjugirter Punkt ist.

§. 59.

Aufgabe [93]. Es ist die Gleichung einer Linie nten Grades und ein Punkt A gegeben. Man soll den Ort eines Punktes P finden, welcher so liegt, daß die Gerade AP der Summe der Abschnitte auf dieser selbigen (verlängerten) Geraden gleich sey, welche einerseits von

dem gegebenen Punkte A, und andererſeits von der gegebenen Curve begrenzt werden. §. 59.

Es ſey A der Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten und

$$A^{(n)}+A^{(n-1)}+A^{(n-2)}+\ldots+A^{(0)}=0 \qquad (1)$$

die Gleichung der gegebenen Curve in Beziehung auf dieſes Coordinatenſyſtem, wo

$$A^{(n)} = \alpha y^n + \alpha_1 x y^{n-1} + \alpha_2 x^2 y^{n-2} + \ldots + \alpha_n x^n$$
$$A^{(n-1)} = \beta y^{n-1} + \beta_1 x y^{n-2} + \beta_2 x^2 y^{n-3} + \ldots + \beta_{n-1} x^{n-1}$$

u. ſ. w.

iſt. Transformiren wir die Gleichung (1) in Polar-Coordinaten, ſo erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$T_n u^n + T_{n-1} u^{n-1} + T_{n-2} u^{n-2} + \ldots + T_0 = 0\,, \qquad (2)$$

und die Summe aller Abſchnitte einer unter dem Winkel t durch den Anfangspunkt A gezogenen Geraden iſt ſodann $-\frac{T_{n-1}}{T_n}$. Für den verlangten Punkt P dieſer Geraden, deſſen Radius vector wir durch u′ bezeichnen, haben wir daher

$$u' = -\frac{T_{n-1}}{T_n} \quad \text{oder} \quad T_n u' + T_{n-1} = 0\,. \qquad (3)$$

Multipliciren wir dieſe Gleichung mit u'^{n-1}, und laſſen in dem Producte die Accente, die jetzt nicht mehr nöthig ſind, fort, ſo kommt

$$T_n u^n + T_{n-1} u^{n-1} = 0\,. \qquad (4)$$

Da nun die beiden Glieder dieſer Gleichung die Anfangsglieder der Gleichung (2) ſind, ſo erhalten wir, wenn wir zu rechtwinkligen Coordinaten zurückkehren,

$$A^{(n)}+A^{(n-1)}=0 \qquad (5)$$

als Gleichung des geſuchten Ortes *). Dieſer Ort iſt daher im Allgemei-

*) Dieſe Art, die Gleichung (3) in rechtwinklige Coordinaten zu transformiren, könnte zu dem Zweifel Veranlaſſung geben, ob nicht durch die Multiplication mit u'^{n-1} ein fremder Factor in die Gleichung hineingekommen ſey. Wir wollen deshalb dieſe Transformation auf directem Wege bewerkſtelligen. Setzen wir für T_n und T_{n-1} die von ihnen vertretenen Ausdrücke, ſo hat die Gleichung (3) die Form

$$[\alpha \sin^n t + \alpha_1 \cos t \sin^{n-1} t + \ldots + \alpha_n \cos^n t]u' + [\beta \sin^{n-1} t + \beta_1 \cos t \sin^{n-2} t + \ldots + \beta_{n-1} \cos^{n-1} t] = 0\,,$$

§. 59. nen eine Linie nten Grades, deren Gleichung nur die Glieder nter und (n—1)ter Dimenſion der Gleichung der gegebenen Curve enthält, wenn beide Curven auf Coordinatenachſen bezogen ſind, die durch den gegebenen Punkt gehen; und, zufolge desjenigen, was zu Ende des vorigen §. bemerkt worden, iſt dieſer Punkt A ein (n—1)-facher oder ein iſolirter Punkt dieſer Ortscurve. Wenn die gegebene Curve eine Linie zweiten Grades, wenn alſo $n = 2$ iſt, ſo iſt der Punkt A ein einfacher Punkt der Linie zweiten Grades, welche der Ort des Punktes P iſt, wie denn überhaupt eine Linie zweiten Grades weder einen mehrfachen noch einen iſolirten Punkt hat.

Wir müſſen hierbei noch einen beſonderen Fall in Erwägung ziehen. Iſt nämlich die gegebene Linie nten Grades ſo beſchaffen, daß ſich alle ihre Durchmeſſer in einem und demſelben Punkte ſchneiden, und iſt dieſer Punkt der gegebene Punkt A, ſo wird in der Gleichung (1) das Aggregat $A^{(n-1)}$ fehlen (§. 54. S. 253.). Die Gleichung (3) reducirt ſich alsdann auf $u' = 0$ oder in rechtwinkligen Coordinaten auf $y^2+x^2 = 0$, und drückt keine Curve, ſondern den Punkt A aus.

Aufgabe [94]. Es ſind eine Linie nten Grades, eine Linie mten Grades und ein Punkt A gegeben. Es ſoll der Ort des Punktes P gefunden werden, welcher ſo liegt, daß die Gerade AP der Differenz der Summen der Abſchnitte auf dieſer ſelbigen (verlängerten) Geraden gleich ſey, welche einerſeits von dem Punkte A und andererſeits reſpective von den gegebenen Curven begrenzt werden.

Es ſey A der Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten und

$$A^{(n)} + A^{(n-1)} + A^{(n-2)} + \ldots\ldots + A^{(0)} = 0\,,$$
$$A_1^{(m)} + A_1^{(m-1)} + A_1^{(m-2)} + \ldots\ldots + A_1^{(0)} = 0$$

die Gleichungen der gegebenen Linien nten und mten Grades in Beziehung auf dieſes Coordinatenſyſtem. Transformirt man dieſe in Polar-Coordinaten, ſo ergeben ſich zwei Gleichungen von der Form

$$T_n u^n + T_{n-1} u^{n-1} + T_{n-2} u^{n-2} + \ldots\ldots + T_0 = 0\,,$$

---

und wenn wir (§. 3. F. 11.) $\frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}$, $\frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}}$ und $\sqrt{y^2+x^2}$ für sint, cost und u' ſetzen, und die Nenner wegſchaffen, ſo kommt

$$[\alpha y^n + \alpha_1 x y^{n-1} + \ldots + \alpha_n x^n] + [\beta y^{n-1} + \beta_1 x y^{n-2} + \ldots + \beta_{n-1} x^{n-1}] = 0\,,$$

welches die gefundene Gleichung (5) iſt.

$$T'_n u^n + T'_{n-1} u^{n-1} + T'_{n-2} u^{n-2} + \ldots + T'_0 = 0 . \qquad \text{§. 59.}$$

Die Summen der genannten Abschnitte sind alsdann respective durch $-\frac{T_{n-1}}{T_n}$ und $-\frac{T'_{m-1}}{T'_m}$ auszudrücken. Für den verlangten Punkt P, dessen Radius vector u' seyn mag, haben wir daher

$$u' = -\frac{T_{n-1}}{T_n} + \frac{T'_{m-1}}{T'_m} \quad \text{oder} \quad T_n T'_m u' + T_{n-1} T'_m - T_n T'_{m-1} = 0 .$$

Multiplicirt wir diese Gleichung mit u'^{n+m-1} und lassen im Producte die Accente fort, so kommt

$$T_n u^n . T'_m u^m + T_{n-1} u^{n-1} . T'_m u^m + T_n u^n . T'_{m-1} u^{m-1} = 0 ;$$

und da $T_n u^n = A^{(n)}$, $T_{n-1} u^{n-1} = A^{(n-1)}$, $T'_m u^m = A_1^{(m)}$, $T'_{m-1} u^{m-1} = A_1^{(m-1)}$, so ergiebt sich

$$A^{(n)} A_1^{(m)} + A^{(n-1)} A_1^{(m)} - A^{(n)} A_1^{(m-1)} = 0 \qquad (6)$$

für die Gleichung des gesuchten Ortes in rechtwinkligen Coordinaten. Dieser Ort ist demnach im Allgemeinen eine Linie (m+n)ten Grades, und, zufolge des vorigen §., ist der Punkt A ein (m+n−1)-facher oder ein isolirter Punkt dieser Curve.

Einen besondern Fall der so eben gelösten Aufgabe enthält die

Aufgabe [95]. Es ist ein Kreis, eine Gerade und ein Punkt A gegeben, welcher letztere auf demjenigen Durchmesser des Kreises liegt, der auf der gegebenen Geraden senkrecht steht. Man soll den Ort des Punktes P finden, welcher so liegt, daß, wenn die (verlängerte) Gerade AP den Kreis in M und M', und die Gerade in N schneidet, AP = AN − (AM + AM') sey.

Um die Lösung dieser Aufgabe unmittelbar aus der vorigen abzuleiten, brauchen wir nur die gegebene Gerade als die Linie nten Grades und den Kreis als die Linie mten Grades zu betrachten. Da nun, wenn r den Radius des Kreises, und b, c die Entfernungen des Mittelpunktes und der gegebenen Geraden von dem Punkte A bezeichnen, die Gleichungen der Geraden und des Kreises respective durch

$$x - c = 0 \quad \text{und} \quad y^2 + (x-b)^2 = r^2$$

auszudrücken sind, so haben wir

§. 59. $A^{(n)} = x$; $A^{(n-1)} = -c$; $A_1^{(m)} = y^2+x^2$; $A_1^{(m-1)} = -2bx$ zu setzen, wodurch wir aus (6) unmittelbar

$$x(y^2+x^2)-c(y^2+x^2)+2bx^2 = 0 \qquad (7)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes erhalten, der, wie man sieht, eine Linie 3ten Grades ist, deren Gestalt und Größe von dem Radius des gegebenen Kreises unabhängig ist, was auch aus der Lösung der vorigen Aufgabe vorauszusehen war. Entwickelt man y aus der gefundenen Gleichung (7), so kommt

$$y = \pm x\sqrt{\frac{c-2b-x}{x-c}}\,.$$

Es gehören also zu jedem Werthe von x zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe von y, und die sich ins Unendliche erstreckende Curve wird daher von der Abscissenachse, welche ein Durchmesser derselben ist, in zwei congruente Theile getheilt. Man sieht aus diesem Ausdrucke ferner, daß y nur reell wird, für $x = 0$ und für alle Werthe von x, welche den Ausdrücken $c-2b-x$ und $x-c$ gleiche Zeichen geben, oder, mit andern Worten, für $x = 0$ und für alle Werthe von x zwischen $c-2b$ und c. Die Curve liegt also gänzlich innerhalb des Raumes, der zwischen zweien, der Ordinatenachse in den Entfernungen $c-2b$ und c parallelen, Geraden enthalten ist. Es ist nun der Werth 0 nur dann zwischen $c-2b$ und c enthalten, wenn b und c von gleichen Zeichen und absolut genommen $2b \geqq c$ ist; daher ist der Anfangspunkt der Coordinaten ein doppelter Punkt der Curve, wenn b und c von gleichen Zeichen und absolut genommen $2b \geqq c$ ist, im entgegengesetzten Falle ist dieser Anfangspunkt ein isolirter Punkt der Curve.

Eine besondere Betrachtung verdient der Fall, in welchem $2b = c$. Alsdann geht die Gleichung (7) in

$$x(y^2+x^2)-cy^2 = 0 \qquad (8)$$

über, und die durch sie ausgedrückte Curve heißt **Cissoide**. Es können so
Fig. 36. viele Punkte P der Cissoide als man will dadurch gefunden werden, daß man über einer Geraden, gleich c, als Durchmesser einen Kreis beschreibt, von dem Anfangspunkte A des Durchmessers beliebig viele Gerade $\overline{AMN}$ zieht, und die Stücke AP gleich den, zwischen dem Kreise und der im Endpunkte B des Durchmessers errichteten Berührungslinie enthaltenen, Abschnitten MN nimmt, was sich aus dem oben Gesagten ergiebt. Dieselbe Curve kann aber auch leicht durch eine stetige Bewegung beschrieben werden, was sich durch die folgende Aufgabe zeigen wird.

Aufgabe [96]. Es ist eine Gerade DD′ und ein Punkt Q der Lage nach gegeben. Ein rechter Winkel, in welchem ein Schenkel unbegrenzt, der andere aber der Entfernung des Punktes Q von der Geraden DD′ gleich ist, bewegt sich so, daß der zuerst genannte Schenkel fortwährend durch den Punkt Q geht, während der Endpunkt F des andern Schenkels EF die Gerade DD′ beschreibt. Es soll der Ort des Halbirungspunktes P des Schenkels EF gefunden werden. §. 59. Fig. 36

Wir nehmen die Gerade DD′ zur Ordinatenachse und die durch Q auf ihr senkrecht gezogene XX′ zur Abscissenachse, bezeichnen die gegebene Länge EF = QC durch 2a, die veränderliche Ordinate von F durch y″, die veränderlichen Coordinaten von E durch x′, y′ und die von P durch x, y.

Die Gleichungen der Geraden FE und QE sind nun (§. 4. Aufg. 6.) respective

$$y-y'' = \frac{y'-y''}{x'}x \quad \text{und} \quad y = \frac{y'}{x'-2a}(x-2a) .$$

Weil aber diese Geraden auf einander senkrecht seyn sollen, so muß (§. 6.)

$$\frac{y'(y'-y'')}{x'(x'-2a)}+1 = 0 ;$$

weil ferner EF = 2a seyn soll, muß (§. 2.)

$$(y'-y'')^2+x'^2 = 4a^2 ;$$

und weil P der Halbirungspunkt von EF seyn soll, muß

$$x = \tfrac{1}{2}x' \quad \text{und} \quad y = \tfrac{1}{2}(y''+y')$$

seyn. Eliminirt man zwischen diesen letzten vier Gleichungen x′, y′ und y″, so kommt

$$(x^2-a^2)y^2+(x-a)^4 = 0 ,$$

oder

$$(x-a)\{(x+a)y^2+(x-a)^3\} = 0 .$$

Verlegt man den Anfangspunkt C der Coordinaten nach dem Halbirungspunkte A von CQ, indem man x+a für x setzt, so giebt die letzte Gleichung

$$x\{(x+2a)y^2+x^3\} = 0 ,$$

und wenn man noch die positiven Abscissen mit den negativen gegenseitig vertauscht, also −x statt x setzt,

$$x\{(x-2a)y^2+x^3\} = 0 ,$$

eine Gleichung, von welcher der erste Factor die Gerade AP′, der zweite Fac-

§. 59. tor aber eine Ciſſoide ausdrückt, was man durch Vergleichung dieſes Factors mit der Gleichung (8) unmittelbar findet.

§. 60.

Fig. 37. **Aufgabe** [97]. *Es iſt eine Gerade GG' und ein Punkt A außerhalb derſelben gegeben. Eine andere Gerade dreht ſich um den Punkt A, und auf derſelben bewegt ſich ein Punkt P ſo, daß ſeine Entfernung von dem Durchſchnittspunkte der beiden genannten Geraden eine gegebene Größe a hat. Es ſoll der Ort des Punktes P gefunden werden.*

Wir nehmen den Punkt A zum Anfangspunkte und die durch A der GG' parallele Gerade XX' zur Abſciſſenachſe rechtwinkliger Coordinaten, und bezeichnen den Abſtand des Punktes A von der Geraden GG' durch b. Die Gleichungen der Linie GG' und einer beliebigen durch A gezogenen Geraden ſind reſpective

$$y = b \quad \text{und} \quad y = nx . \tag{1}$$

Ein Punkt P dieſer letzten Geraden habe x', y' zu Coordinaten, ſo werden dieſe ihre Gleichung befriedigen, und wir haben daher

$$y' = nx' . \tag{2}$$

Da nun der Punkt P von dem Durchſchnittspunkte der beiden Geraden (1), deſſen Coordinaten wir x'', y'' nennen, den Abſtand a haben ſoll, ſo muß

$$(y''-y')^2+(x''-x')^2 = a^2 \tag{3}$$

ſeyn; und da x'', y'' die beiden Gleichungen (1) befriedigen müſſen, ſo haben wir ferner

$$y'' = b , \quad (4) \quad ; \quad y'' = nx'' , \tag{5}$$

Elimiriren wir nun zwiſchen den Gleichungen (2, 3, 4, 5) die drei Größen x'', y'' und n, und laſſen in der Finalgleichung die nicht mehr nöthigen Accente von x', y' fort, ſo haben wir

$$(y^2+x^2)(y-b)^2 = a^2y^2 , \tag{6}$$

welches die Gleichung des geſuchten Ortes, der, wie man ſieht, eine Linie vierten Grades iſt. Dieſe Curve führt den Namen **Conchoide**.

Wenn man die Parentheſen in der Gleichung (6) aufhebt, ſieht man, daß kein Glied, welches die Veränderlichen in der erſten Dimenſion enthält und kein conſtantes Glied in der Gleichung vorkommt. Demnach iſt der Anfangspunkt A der Coordinaten ein doppelter oder ein conjugirter Punkt.

Löſt man die Gleichung nach x auf, ſo kommt

$$x = \pm\frac{y}{y-b}\sqrt{a^2-(y-b)^2}\ ;$$ §. 60. Fig. 37

es gehören also zu jedem Werthe von y zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von x, und die Curve wird demnach von der Ordinatenachse, welche ein Durchmesser derselben ist, in zwei congruente Theile getheilt. Aus dem so eben aufgestellten Ausdrucke sieht man auch, daß x nur für $y = 0$ und für alle Werthe von y, welche zwischen $b+a$ und $b-a$ liegen, reell ist. Die Conchoide liegt also gänzlich in dem Raume, welcher zwischen zweien Parallelen enthalten ist, die von dem Punkte A die Entfernungen $b+a$ und $b-a$, oder von der Geraden GG' die Entfernungen a und $-a$ haben, und sie erstreckt sich innerhalb dieses Raumes ins Unendliche, da für $y = b$, $x = \infty$ wird. Wenn $a < b$, so ist der Anfangspunkt A nicht in dem eben genannten Raume enthalten, und dann ist daher dieser Punkt ein isolirter; wenn aber $a \gtreqless b$, so ist A ein doppelter Punkt. Wenn $a = b$ ist, bildet die Curve bei A eine Spitze; wenn $a > b$ eine Schleife.

Transformirt man die Gleichung (6) in Polar-Coordinaten, so kommt

$$u^2\{(u\sin t - b)^2 - a^2\sin^2 t\} = 0\ .$$

Der zweite Factor dieser Gleichung läßt sich wie folgt

$$\{u\sin t - b - a\sin t\}\{u\sin t - b + a\sin t\} = 0 \qquad (7)$$

zerlegen. Diese Polargleichung läßt sich auf eine einfache Weise aus der Aufgabe unmittelbar herleiten. Die Gleichung der gegebenen Geraden GG', $y = b$, in Polar-Coordinaten transformirt, ist

$$u\sin t - b = 0\ .$$

Da nun der Radius vector u' des Punktes P um a größer oder kleiner als der Radius vector u der gegebenen Geraden seyn soll, so hat man $u = u' \mp a$, und durch Substitution dieser beiden Werthe in die letzte Gleichung

$$(u'-a)\sin t - b = 0 \quad \text{oder} \quad (u'+a)\sin t - b = 0\ , \qquad (8)$$

welches die beiden Factoren der Gleichung (7) sind. Ein jeder dieser Factoren drückt beide Zweige BCD, B'C'D' der Curve vollständig aus, und der zweite Factor geht in den ersten über, wenn man u' und t mit $-u'$ und $\pi+t$ vertauscht.

§. 61.

Aufgabe [98]. Es ist ein Kreis und ein Punkt A gegeben. Durch den Punkt A sind gerade Linien gezogen und auf denselben, von den

§. 61. Durchschnitten des Kreises an gerechnet, gleiche Stücke abgeschnitten. Man soll den Ort des Endpunktes P dieser Abschnitte finden.

Wir nehmen den Punkt A zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten und die Gerade, welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht, zur Abscissenachse. Bezeichnen wir durch r den Radius, durch b die Abscisse des Mittelpunktes des Kreises, und durch a die gegebene Länge der genannten Abschnitte, so ist die Gleichung des Kreises

$$y^2+(x-b)^2 = r^2 ,$$

oder, wenn wir zu Polar-Coordinaten übergehen,

$$u^2-2bu\cos t+b^2-r^2 = 0 .$$

Da nun der Radius vector u' des Punktes P um a größer oder kleiner als der Radius vector u des Kreises seyn soll, so ist $u = u' \mp a$, und durch Substitution dieser Ausdrücke finden wir nach einander

$$(u'-a)^2-2b(u'-a)\cos t+b^2-r^2 = 0 , \qquad (1)$$

oder

$$(u'+a)^2-2b(u'+a)\cos t+b^2-r^2 = 0 . \qquad (2)$$

Man sieht leicht ein, daß diese beiden Gleichungen nur eine und dieselbe Curve ausdrücken; denn wenn man in die erste $-u'$ und $t+\pi$ für u' und t setzt, so erhält man die zweite Gleichung.

Ordnen wir beide Gleichungen nach u', so ist

$$u'^2-2(b\cos t+a)u'+a^2+2ba\cos t+b^2-r^2 = 0 ,$$
$$u'^2-2(b\cos t-a)u'+a^2-2ba\cos t+b^2-r^2 = 0 ;$$

und setzen wir, um zu rechtwinkligen Coordinaten zurückzukehren, $\sqrt{y^2+x^2}$ und $\frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}}$ für u' und $\cos t$ (§. 3.), so ergiebt sich

$$y^2+x^2-2bx-2a\sqrt{y^2+x^2}+a^2+\frac{2abx}{\sqrt{y^2+x^2}}+b^2-r^2 = 0 ,$$

$$y^2+x^2-2bx+2a\sqrt{y^2+x^2}+a^2-\frac{2abx}{\sqrt{y^2+x^2}}+b^2-r^2 = 0 ,$$

oder

$$\{y^2+x^2-2bx+a^2+b^2-r^2\}\sqrt{y^2+x^2}-\{2a(y^2+x^2)-2bax\} = 0 ,$$
$$\{y^2+x^2-2bx+a^2+b^2-r^2\}\sqrt{y^2+x^2}+\{2a(y^2+x^2)-2bax\} = 0 ,$$

zwei Gleichungen, die, wenn man sie rational macht, eine und dieselbe Gleichung, nämlich

$\{y^2+x^2-2bx+a^2+b^2-r^2\}^2(y^2+x^2)-4a^2\{y^2+x^2-bx\}^2=0$ (3) §. 61.

geben. Dieſe Gleichung des geſuchten Ortes iſt, wie man leicht einſehen wird, vom 6ten Grade, und enthält nach Aufhebung der Parentheſen kein Glied erſter Dimenſion und kein conſtantes Glied. Der gegebene Punkt A iſt daher ein doppelter oder ein conjugirter Punkt. Daß die Curve in einem endlichen Raume enthalten iſt, ergiebt ſich ſowohl aus ihrer Conſtruction, als daraus, daß die Gleichung in q, welche ſich aus den Gliedern höchſter Dimenſion findet (§. 55. G. 2), im gegenwärtigen Falle

$$(q^2+1)^3=0$$

iſt, die, wie man ſieht, keine reellen Wurzeln hat.

Die Curve, welche, da y nur in Potenzen mit geraden Exponenten in der Gleichung vorkommt, von der Abſciſſenachſe, die ein Durchmeſſer der Curve iſt, in zwei congruente Theile getheilt wird, nimmt ſehr verſchiedene Geſtalten an, nach den Werthen von a, b und r. In Fig. 38. iſt $a=1$, $r=2$, $b=4$ angenommen; in Fig. 39. iſt $a=4$, $r=1$, $b=2$; in Fig. 40. iſt $a=1$, $r=3$, $b=2$. Fig. 38., 39., 40.

Um zu finden, ob die Curve außer dem Punkte A noch andere Doppelpunkte habe, transformiren wir die Gleichung (3), indem wir $y+y'$ und $x+x'$ für y und x ſetzen. Dadurch erhalten wir

$$\{y^2+x^2+2y'y+2(x'-b)x+y'^2+x'^2-2bx'+a^2+b^2-r^2\}^2(y^2+x^2+2y'y+2x'x+y'^2+x'^2)$$
$$-4a^2\{y^2+x^2+2y'y+(2x'-b)x+y'^2+x'^2-bx'\}^2=0,$$

und ſoll dieſe Gleichung nach dem Aufheben der Parentheſen keine Glieder erſter Dimenſion und kein conſtantes Glied enthalten, ſo muß

$$y'^2+x'^2-2bx'+a^2+b^2-r^2=0 \quad \text{und} \quad y'^2+x'^2-bx'=0$$

ſeyn, woraus ſich $x'=\frac{a^2+b^2-r^2}{b}$ und $y'=\pm\frac{\sqrt{(r^2-a^2)(a^2+b^2-r^2)}}{b}$

ergiebt. Iſt nun der unter dem Wurzelzeichen ſtehende Ausdruck poſitiv, was nur Statt findet, wenn $r^2>a^2>(r^2-b^2)$, ſo hat die Curve außer dem Punkte A noch zwei doppelte Punkte, deren Coordinaten eben gefunden ſind. Iſt aber jener Ausdruck negativ, was Statt findet, wenn $a^2<(r^2-b^2)$ oder wenn $a^2>r^2$, ſo hat die Curve außer A keinen doppelten Punkt.

Wir gehen jetzt zu einigen beſondern Fällen. Es ſey zuerſt $b=r$; alsdann liegt der Punkt A auf der Peripherie des gegebenen Kreiſes. Die Gleichung (3), welche für dieſen Fall in

$$\{y^2+x^2-2rx+a^2\}^2(y^2+x^2)-4a^2\{y^2+x^2-rx\}^2=0$$

§. 61. übergeht, läßt sich wie folgt

$$\{(y^2+x^2-2rx)^2-a^2(y^2+x^2)\}\cdot\{y^2+x^2-a^2\}=0$$

zerlegen. Der Ort des Punktes P besteht also aus zwei Curven, von de-
Fig. 41. nen die erste eine, in Fig. 41. verzeichnete, Linie vierten Grades, die zweite aber ein Kreis ist, der um den gegebenen Punkt A als Mittelpunkt mit dem Radius a beschrieben ist. Wenn man für den gegenwärtigen Fall die Aufgabe darauf beschränkt, den Ort des Punktes P zu finden, welcher auf den, durch einen auf dem Kreise liegenden Punkt A gezogenen, Geraden von dem zweiten Durchschnittspunkte dieser Geraden und des Kreises die gegebene Entfernung a haben soll, so gehört der durch den zweiten Factor ausgedrückte Kreis nicht zur Lösung der Aufgabe. Da die Gleichung

$$(y^2+x^2-2rx)^2-a^2(y^2+x^2)=0\,, \qquad (4)$$

wenn man die Parenthesen aufhebt, keine Glieder erster Dimension und kein constantes Glied enthält, so ist der Punkt A ein doppelter oder conjugirter Punkt dieser Linie vierten Grades. Geht man jetzt zu den Polargleichungen (1) u. (2) zurück, welche sich, da $b^2-r^2=0$ ist, durch $u'-a$ oder $u'+a$ dividiren lassen, und verwirft diesen Factor, welcher den eben erwähnten Kreis ausdrückt, so hat man

$$u'-a-2r\cos t=0 \quad \text{oder} \quad u'+a-2r\cos t=0$$

als Polargleichungen der in Rede stehenden Linie vierten Grades, von welchen die eine in die andere übergeht, wenn man u' und t mit $-u'$ und $\pi+t$ vertauscht. Diese Linie vierten Grades hat wieder verschiedene Gestalten, je nachdem $a>2r$, $a<2r$ oder $a=2r$ ist. Aus der ersten Polargleichung (wir unterlassen die Betrachtung der zweiten, da sie nur eine andere Form der ersten ist) erhalten wir für $u'=0$, $\cos t=-\frac{a}{2r}$. Ist nun $a>2r$, so ist $-\frac{a}{2r}<-1$, und also für $u'=0$ $\cos t<-1$, was unmöglich ist. Daher kann, wenn $a>2r$ ist, u' nicht gleich Null seyn; also gehört der Punkt a alsdann nicht zu der stetigen Folge der Punkte in der Curve, und dieser Punkt ist daher, für $a>2r$, ein isolirter. Ist aber $a<2r$ oder $a=2r$, so ist der Punkt A ein Doppelpunkt.

In dem particulären Falle, in welchem $a=2r$, heißt die Curve, deren Gleichung nun in rechtwinkligen Coordinaten

$$(y^2+x^2)^2-4r(y^2+x^2)x-4r^2y^2=0\,, \qquad (5)$$

und deren Polargleichung §. 61.

$$u = 2r(1+\cos t) \qquad (6)$$

ist, Cardioide, Fig. 42. Fig. 42.

§. 62.

Aufgabe [99]. Von dem Mittelpunkte einer gegebenen Hyperbel sind auf die Tangenten dieser Curve Perpendikel herabgelassen. Man soll den Ort der Fußpunkte dieser Senkrechten finden.

Es sey

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$$

die Gleichung der Hyperbel in rechtwinkligen Coordinaten. Die Gleichung der Tangente in einem Punkte $x'y'$ dieser Curve ist (§. 35. S. 8)

$$a^2y'y - b^2x'x + a^2b^2 = 0 ,$$

und die Gleichung der, vom Mittelpunkte der Hyperbel auf diese Tangente gefällten, Senkrechten ist demnach

$$b^2x'y + a^2y'x = 0 .$$

Da nun der Punkt $x'y'$ auf der Hyperbel liegt, so haben wir auch

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 + a^2b^2 = 0 ,$$

und wenn man x' und y' zwischen den drei letzten Gleichungen eliminirt,

$$(y^2+x^2)^2 + b^2y^2 - a^2x^2 = 0 , \qquad (1)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, der also eine Linie vierten Grades ist, welche, wie man aus der Form des Aggregates der Glieder vierter Dimension sieht, in einem endlichen Raume enthalten ist. Da y sowohl als x nur in Potenzen mit geraden Exponenten in der Gleichung vorkommen, so sind die Coordinatenachsen zwei Durchmesser der Curve, welche sie in vier congruente Theile theilen, und der Anfangspunkt der Coordinaten (der Mittelpunkt der Hyperbel) ist der Mittelpunkt der Curve (§. 54.). Löst man die Gleichung (1) nach y und x auf, so kommt

$$y = \pm\sqrt{\frac{-(b^2+2x^2) \pm \sqrt{b^4+4(a^2+b^2)x^2}}{2}} ,$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2-2y^2 \pm \sqrt{a^4-4(a^2+b^2)y^2}}{2}} .$$

Von den vier Werthen von y sind, wie man sieht, zwei Werthe für jedes x imaginär; die beiden andern Werthe sind reell so lange

§. 62. $b^4+4(a^2+b^2)x^2 > (b^2+2x^2)^2$,

d. i. so lange $x^2 < a^2$ oder, mit andern Worten, für alle Werthe von x, welche zwischen $-a$ und $+a$ liegen. Was die Werthe von x betrifft, so sind sie alle vier reell, so lange $a^4-4(a^2+b^2)y^2 > 0$, d. i. für alle Werthe von y, welche zwischen $-\frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ und $+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ liegen. Denn für $y^2 < \frac{a^4}{4(a^2+b^2)}$ ist nicht nur die letzte Wurzelgröße in dem Ausdruck für x reell, sondern es ist auch $2y^2 < \frac{a^4}{2(a^2+b^2)}$, demnach erstens a^2-2y^2 eine positive Größe, und zweitens $a^2-2y^2 > \sqrt{a^4-4(a^2+b^2)y^2}$. Die Curve ist also in dem Raume eines Rechtecks enthalten, dessen Seiten gleich 2a und $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ sind.

Der Anfangspunkt der Coordinaten oder der Mittelpunkt der Curve ist ein Doppelpunkt; denn die Gleichung (1) enthält keine Glieder 1ster und 0ter Dimension.

Wenn die gegebene Hyperbel gleichseitig ist, so geht die Gleichung (1), da alsdann $b = a$ ist, in

$$(y^2+x^2)^2+a^2(y^2-x^2) = 0 \qquad (2)$$

über. Die durch diese Gleichung (2) ausgedrückte Curve, welche in Fi-
Fig. 43. gur 43. verzeichnet ist, heißt Lemniscate. Um ihre Polargleichung zu finden, setzen wir $u\sin t$ und $u\cos t$ für y und x, wodurch wir, nach der Division durch u^2

$$u^2+a^2(\sin^2 t-\cos^2 t) \quad \text{oder} \quad u^2-a^2\cos 2t = 0 \qquad (3)$$

erhalten.

Fig. 44. **Aufgabe [100]. In einem gegebenen Kreise AMB ist ein Durchmesser AB gezogen, auf demselben sind senkrechte Ordinaten errichtet, und von den Fußpunkten N dieser Ordinaten sind Perpendikel NQ auf die, nach den Endpunkten M dieser Ordinaten gezogenen, Radien CM gefällt, sodann ist auf den Ordinaten NM, NP = NQ gemacht. Es soll der Ort des Punktes P gefunden werden.**

Es sey der Mittelpunkt C des gegebenen Kreises der Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten, AB die Abscissenachse und der Radius gleich a. Bezeichnen wir nun die Coordinaten CN und NP des Punktes P durch x

und y, NM aber durch y'', so ist die Gleichung der Geraden CM, wenn §. 62.
ihre laufenden Coordinaten durch x', y' bezeichnet werden,

$$y' = \frac{y''}{x} x' ,$$

und daher die Länge des von N auf sie gefällten Perpendikels (§. 7. Aufg. 12.)

$$NQ = \frac{y''x}{\sqrt{x^2+y''^2}} = NP = y .$$

Nun ist aber M ein Punkt des Kreises, und daher

$$y''^2+x^2 = a^2 ,$$

folglich

$$\frac{\sqrt{a^2-x^2}.x}{a} = y ,$$

oder

$$a^2y^2 - a^2x^2 + x^4 = 0$$

die Gleichung des gesuchten Ortes, der also eine Linie des vierten Grades ist. Diese Curve hat eine der Lemniscate ähnliche Gestalt.

Aufgabe [101]. Die Grundlinie eines Dreiecks ist gegeben. Man soll den Ort des Scheitels finden, wenn das Product der Seiten dem Quadrate der halben Grundlinie gleich ist.

Es sey die gegebene Grundlinie gleich 2e. Wir nehmen die Grundlinie zur Abscissenachse und die Senkrechte in ihrem Halbirungspunkte zur Ordinatenachse. Wenn nun x, y die Coordinaten des Scheitels bezeichnen, so hat man $\sqrt{y^2+(x-e)^2}$ und $\sqrt{y^2+(x+e)^2}$ für die Längen der Seiten (§. 2.); und folglich

$$\sqrt{y^2+(x-e)^2}.\sqrt{y^2+(x+e)^2} = e^2 ,$$

oder, wenn man quadrirt,

$$(y^2+x^2)^2+2e^2(y^2-x^2) = 0 ,$$

welches die Gleichung des gesuchten Ortes, der demnach eine Lemniscate ist. Die halbe Achse dieser dieser Lemniscate, nämlich a, ist gleich $e\sqrt{2}$.

Hieraus ergiebt sich folgende merkwürdige Eigenschaft der Lemniscate. Fig. 43
Nimmt man auf der Achse der Curve zu beiden Seiten des Mittelpunktes zwei Punkte F und F' so an, daß $CF = CF' = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, und zieht nach irgend einem Punkte P der Lemniscate die Geraden FP und F'P, so ist immer $FP \times F'P = \frac{1}{2}a^2$.

§. 63.

§. 63.

Eine Curve, die mit einer Linie nten Grades in der Verwandtschaft der Collineation steht, ist nothwendigerweise auch eine Linie nten Grades. Denn sieht man jene Linie nten Grades als gegeben an, so wird sich die Gleichung einer ihr collinearen Curve aus der Gleichung der gegebenen durch Substitution der Ausdrücke (2) des §. 11. herleiten lassen; durch diese Substitution wird aber der Grad der Gleichung, wie man leicht einsieht, nicht geändert.

Ganz anders verhält es sich mit zwei Curven, die in derjenigen Verwandtschaft stehen, welche wir in den §§. 50. und 51. betrachtet haben. Denn setzt man in die Gleichung einer Linie nten Grades für die rechtwinkligen oder schiefwinkigen Coordinaten t, u die Ausdrücke (5) des §. 50., deren Zähler und Nenner Functionen zweiten Grades von x u. y sind, so geben die Glieder nter Dimension andere Glieder, deren Zähler und Nenner von der (2n)ten Dimension sind, und schafft man nun diesen Nenner fort, so hat man eine Gleichung, die im Allgemeinen vom (2n)ten Grade ist. In besondern Fällen kann indessen der Grad der Gleichung einer Curve, welche mit einer Linie nten Grades in der genannten Verwandtschaft steht, von einem niedrigern Grade als vom (2n)ten seyn. Dies ist schon daraus klar, daß, wenn einer Linie N_1 des nten Grades eine Linie N_2 des (2n)ten Grades entspricht, auch umgekehrt der Curve N_2 die Curve N_1 entsprechen muß, weil die in Rede stehende Art des Entsprechens eine gegenseitige ist.

In dem allgemeinen Falle, in welchem einer Linie nten Grades im Systeme (Σ) eine Linie (2n)ten Grades im Systeme (S) entspricht, sind die Cardinalpunkte dieses letztern Systems n-fache Punkte dieser Curve. Um dies zu erweisen, seyen t, u rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinaten im Systeme (Σ), und

$$A^{(n)}+A^{(n-1)}+A^{(n-2)}+\ldots+A^{(0)} = 0$$

die Gleichung einer Linie nten Grades in diesem Systeme (Σ), in welcher $A^{(n)}$, $A^{(n-1)}$ u. s. w. die Aggregate der Glieder nter, (n—1)ter etc. Dimension bedeuten. Die Gleichung der Curve, welche mit dieser Linie in der genannten Verwandtschaft steht, wird nun durch Substitution der Ausdrücke

$$u = \frac{A'B'' - A''B'}{AB' - A'B} \quad ; \quad t = \frac{A''B - AB''}{AB' - A'B}$$

gefunden. Bezeichnen wir diese Bruchfunctionen, der Kürze wegen, durch

$\frac{P}{N}$ und $\frac{Q}{N}$, so giebt irgend ein Aggregat $A^{(n-m)}$ einen Ausdruck von der Form $\frac{R}{N^{n-m}}$, dessen Zähler R in Beziehung auf P und Q vom $(n-m)$ten Grade ist. Schafft man also, nach der Substitution, sämmtliche Nenner durch Multiplication mit N^n weg, so erhält man aus diesem Gliede $\frac{R}{N^{n-m}}$ ein Aggregat RN^m, welches in Beziehung auf P, Q u. N offenbar von der nten Dimension ist. Demnach besteht die so erhaltene Gleichung aus Gliedern, die sämmtlich von der nten Dimension in Beziehung auf P, Q und N, und folglich von der (2n)ten Dimension in Beziehung auf x u. y sind. Nimmt man nun einen neuen Anfangspunkt der Coordinaten x, y an, so hat man in die erhaltene Gleichung, oder in die Functionen N, P u. Q, überall $x'+a$ und $y'+b$ für x und y zu setzen, wo a u. b die Coordinaten des neuen Anfangspunktes bedeuten. Wählt man einen der Cardinalpunkte zu diesem neuen Anfangspunkte, dessen Coordinaten, zufolge Desjenigen, was in §. 50. gezeigt worden, die drei Functionen N, P und Q zu gleicher Zeit auf Null reduciren, so ist klar, daß diese Functionen durch jene Substitution die Form $fy'^2+gx'y'+hx'^2+iy'+kx'$, in der kein constantes Glied vorkommt, annehmen müssen, weil sie sonst für $x'=0$ und $y'=0$ nicht auf Null reducirt würden. Transformirt man also die durch diese Substitutionen entstehende Gleichung in Polarcoordinaten dadurch, daß man überall $u\sin t$ und $u\cos t$ für y' und x' setzt, so nehmen die Functionen N, P und Q die Form $\{(f\sin^2 t+g\sin t\cos t+h\cos^2 t)u+i\sin t+k\cos t\}u$ oder kürzer $(\lambda u+\mu)u$ an. Ein jedes der vorher genannten Aggregate, welches in Beziehung auf N, P und Q vom nten Grade ist, wird also die Form Vu^n annehmen, wo V eine Function von u und t bedeutet, die in Beziehung auf u vom nten Grade ist. Die Summe aller dieser Aggregate, oder die Polargleichung der in Rede stehenden Curve, wird also aus zwei Factoren bestehen, von denen der eine eine Function von u und t, die in Beziehung auf u vom nten Grade, und von denen der andere u^n selbst ist. Es werden also von den 2n Werthen, welche u für irgend einen Werth von t erhält, n Werthe gleich Null seyn, woraus denn folgt, daß der neue Anfangspunkt der Coordinaten oder der Cardinalpunkt im Allgemeinen ein nfacher Punkt ist, was gezeigt werden sollte. §. 63.

§. 63. Wir gehen jetzt zu einigen Anwendungen der in §. 50. u. 51. aufgestellten Theorie.

Wir nehmen an, daß die Constanten in den Gleichungen (1) und (2) des §. 50. so particularisirt seyen, daß diese die Definition der Verwandtschaft aussprechenden Gleichungen die Formen

$$yu+xt-a^2=0\,,\quad (1)\quad ;\quad xu-yt=0\,,\quad (2)$$

annehmen, und daß die beiden Coordinatensysteme der xy und tu rechtwinklig sind. Alsdann haben wir

$$u=\frac{a^2y}{y^2+x^2}\quad ;\quad t=\frac{a^2x}{y^2+x^2}\,,\qquad (3)$$

und umgekehrt

$$y=\frac{a^2u}{u^2+t^2}\quad ;\quad x=\frac{a^2t}{u^2+t^2}\,.\qquad (4)$$

Einer Geraden in dem einen der beiden Systeme, deren Gleichung $mu+nt+1=0$ seyn mag, entspricht in dem andern Systeme ein Kreis, dessen Gleichung $y^2+x^2+ma^2y+na^2x=0$, und der durch den Anfangspunkt der xy, den einzigen Cardinalpunkt dieses Systems, geht. Eben so entspricht einer Geraden im Systeme xy ein Kreis, der durch den einzigen Cardinalpunkt des Systems tu geht. Zwei solche Kreise schneiden sich zufolge Desjenigen, was in §. 51. gezeigt worden, unter demselben Winkel, unter welchen sich die Geraden des andern Systems schneiden, denen sie entsprechen.

Wir bemerken noch Folgendes: Einem Kreise in dem einen der beiden Systeme, welcher nicht durch dessen Cardinalpunkt geht, entspricht in dem andern Systeme wiederum ein Kreis. Denn ist

$$u^2+t^2+mu+nt+p=0$$

die Gleichung eines Kreises in dem einen Systeme, so erhält man durch Substitution der Ausdrücke (3)

$$\frac{a^4(y^2+x^2)}{(y^2+x^2)^2}+\frac{a^2(my+nx)}{y^2+x^2}+p=0\,,$$

oder

$$p(y^2+x^2)+a^2my+a^2nx+a^4=0$$

als Gleichung der jenem Kreise entsprechenden Curve, die, wie man sieht, auch ein Kreis ist.

Es sey nun zunächst

$$u^2-t^2+a^2=0$$

die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel im Systeme tu. Durch Substitution der Ausdrücke (3) erhalten wir als Gleichnng der ihr entsprechenden Curve §. 63.

$$(y^2+x^2)^2+a^2(y^2-x^2) = 0 ,$$

welche also (§. 62. S. 2) eine Lemniscate ist. Der Anfangspunkt der tu ist der Mittelpunkt der Hyperbel und zugleich der Cardinalpunkt ihres Systems. Der Anfangspunkt der xy ist der Mittelpunkt der Lemniscate und zugleich der Cardinalpunkt in ihrem Systeme. Daher entsprechen allen, an der Hyperbel nicht durch ihren Mittelpunkt gezogenen, Geraden Kreise, welche durch den Mittelpunkt der Lemniscate gehen; und allen, nicht durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehenden, Kreisen entsprechen Kreise, welche nicht durch den Mittelpunkt der Lemniscate gehen.

Es sey ferner

$$u^2-at = 0$$

die Gleichung einer Parabel im Systeme tu. Durch Substitution der Ausdrücke (3) erhalten wir als Gleichung der ihr entsprechenden Curve

$$x(y^2+x^2)-ay^2 ,$$

welche also (§. 59. S. 8.) eine Cissoide ist. Der Scheitel der Parabel ist, als Anfangspunkt der tu, der Cardinalpunkt ihres Systems; und der Doppelpunkt der Cissoide ist, als Anfangspunkt der xy, der Cardinalpunkt in deren System. Daher entsprechen allen Geraden, welche an der Parabel nicht durch ihren Scheitel gezogen werden, Kreise, welche durch den Doppelpunkt der Cissoide gehen; und allen Kreisen, welche nicht durch den Scheitel der Parabel gelegt werden, Kreise, die nicht durch den Doppelpunkt der Cissoide gehen.

Es sey als letztes Beispiel

$$u^2+at-\frac{a^2}{4} = 0$$

die Gleichung einer Parabel im Systeme tu. Durch Substitution der Ausdrücke (3) erhalten wir als Gleichung der ihr entsprechenden Curve

$$(y^2+x^2)^2-4a(y^2+x^2)x-4a^2y^2 = 0 ,$$

welche also (§. 61. S. 5) eine Cardioide ist. Der Anfangspunkt der tu ist der Brennpunkt der Parabel und der Cardinalpunkt ihres Systems. Der Anfangspunkt der xy ist der Doppelpunkt der Cardioide und zugleich der Cardinalpunkt in deren System. Daher entsprechen den Geraden, welche in

§. 63. der Parabel durch ihren Brennpunkt gezogen werden, gerade Linien, welche durch den Doppelpunkt der Cardioide gehen; und den Kreisen, welche nicht durch den Brennpunkt der Parabel gehen, Kreise, welche den Doppelpunkt der Cardioide nicht enthalten.

Man sieht leicht ein, daß sich aus diesen Beziehungen zwischen der Lemniscate, der Cissoide und Cardioide einerseits und der Hyperbel und Parabel andererseits eine Menge Sätze, die von Linien zweiten Grades erwiesen sind, unmittelbar auf die genannten drei Curven übertragen lassen. Wir wollen nur einige hiervon geben.

Lehrsatz [44]. Nimmt man auf einer Lemniscate, Cissoide oder Cardioide zwei Punkte beliebig an, und beschreibt durch diese eine Reihe von Kreisen, so schneidet ein jeder dieser Kreise die Curve in noch zwei Punkten. Legt man nun durch jede solche zwei Punkte und durch den Doppelpunkt der Curve von Neuem Kreise, so berühren sich diese letztern sämmtlich in diesem Doppelpunkte.

Dieser Satz ergiebt sich nämlich aus dem im §. 47. erwiesenen Lehrsatz (27).

Lehrsatz [45]. Zieht man durch den gemeinschaftlichen Doppelpunkt p zweier Cardioiden zwei beliebige Gerade, von welchen die erste die eine Curve in den Punkten a und α und die andere Curve in den Punkten a' und α', von welchen ferner die zweite Gerade jene Curve in b und β und diese in b' und β' schneidet, so bestimmen die eben genannten Punkte respective acht Kreise, die wir durch die Punkte, welche sie enthalten, bezeichnen. Von diesen Kreisen schneiden sich pab und pa'b', paβ und pa'β', pbα und pb'α', p$\beta\alpha$ und p$\beta'\alpha'$ in p und in vier Punkten, welche mit p auf einem und demselben Kreise L_1 liegen; ferner schneiden sich pab und p$\alpha'\beta'$, paβ und pa'b', pbα und pβ'a', p$\beta\alpha$ und pb'a' in p und in vier Punkten, welche ebenfalls mit p auf einem und demselben Kreise L_2 befindlich sind.

Dieser Satz ist aus dem in §. 45. aufgestellten Satze von confocalen Linien zweiten Grades abgeleitet.

Transſcendente Linien.

§. 64. §. 64.

Eine Curve, deren auf rechtwinklige oder ſchiefwinklige Achſen bezogene Gleichung keine algebraiſche rationale iſt, und in keine ſolche verwandelt werden kann, heißt eine transſcendente Linie. Die Curve z. B., deren Gleichung $y = x^{\sqrt{2}}$ iſt, gehört zu den transſcendenten Linien, da dieſe Gleichung nicht rational gemacht werden kann.

Unter den transſcendenten Linien iſt eine der einfachſten diejenige, deren Gleichung in rechtwinkligen oder ſchiefwinkligen Coordinaten

$$y = ab^{\frac{x}{c}} \qquad (1)$$

iſt. Dieſer Gleichung (1) kann man aber auch die Form

$$x = \frac{c}{log\, b} log \frac{y}{a} \qquad (2)$$

geben, weshalb die Curve logarithmiſche Linie genannt wird.

Die beiden Conſtanten b und c fließen in eine einzige zuſammen, da $b^{\frac{x}{c}} = \left(b^{\frac{1}{c}}\right)^x$ iſt, und daher kann man eine beliebige Zahl, z. B. die Zahl e, deren natürlicher Logarithmus gleich 1 iſt, zur Baſis der in der Gleichung (1) vorkommenden Potenz annehmen, indem man $e^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{1}{c}}$ ſetzt, woraus $m = \frac{c}{log.nat.b}$ folgt. Dadurch nimmt die Gleichung (1) die Geſtalt

$$y = ae^{\frac{x}{m}} \qquad (3)$$

an. Die Conſtante a kann durch eine bloße Verlegung des Anfangspunkts der Coordinaten weggeſchafft werden; denn ſetzt man $x + m log \frac{m}{a}$ (wo der Logarithmus im natürlichen Syſtem genommen iſt) für x, ſo kommt

$$y = ae^{\frac{x}{m} + log \frac{m}{a}} = ae^{\frac{x}{m}} . e^{log \frac{m}{a}} = ae^{\frac{x}{m}} . \frac{m}{a},$$

oder endlich

$$y = me^{\frac{x}{m}} . \qquad (4)$$

§. 64. Für jeden Werth von x ist y reell, und zwar hat y nur einen reellen positiven Werth, wenn $\frac{x}{m}$ eine ganze Zahl oder ein Bruch mit einem ungeraden Nenner ist, hingegen zwei reelle entgegengesetzte Werthe, wenn $\frac{x}{m}$ ein Bruch mit einem geraden Nenner ist. Für $x = 0$ ist $y = m$, für $x = -\infty$ ist $y = \frac{m}{\infty} = 0$, für $x = +\infty$ ist $y = \infty$. Die Curve

Fig. 45. (Fig. 45.) erstreckt sich also, wenn m positiv ist, auf der Seite der positiven Ordinaten ins Unendliche, indem sie sich der negativen Seite der Abscissenachse immer mehr und mehr nähert, ohne sie je zu erreichen. Die auf der Seite der negativen Ordinaten liegenden Punkte, deren Coordinaten die Gleichung der Curve befriedigen, bilden keine stetige Folge, wiewohl sie in unbegrenzter Anzahl verhanden sind.

Nimmt man die Abscissen Ap_1, Ap_2, Ap_3 u. s. w. so an, daß $p_1p_2 = p_2p_3 = p_3p_4 =$ u. s. f., und bezeichnet Ap_1 durch h, p_1p_2 durch i, so ergeben sich die Ordinaten

$$p_1q_1 = me^{\frac{h}{m}}\ ;\ p_2q_2 = me^{\frac{h}{m}}.e^{\frac{i}{m}}\ ;\ p_3q_3 = me^{\frac{h}{m}}.e^{\frac{2i}{m}}\ ;$$

$$p_4q_4 = me^{\frac{h}{m}}e^{\frac{3i}{m}} \text{ u. s. f.}$$

Die Ordinaten bilden also eine geometrische Reihe, wenn die Abscissen in arithmetischer Reihe fortschreiten.

Fig. 46. Aufgabe [102]. Eine logarithmische Linie CBD, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten $y = me^{\frac{x}{m}}$, ist so um die Ordinatenachse gedreht, daß sie die Lage C'BD' annimmt, in welcher sich der Zweig BC', der sich vorher der negativen Seite der Abscissenachse ohne Aufhören näherte, nun der positiven Seite dieser Achse nähert. Das Stück der auf der Abscissenachse errichteten Senkrechten MN'N, welches von den beiden Curven CBD und C'BD' begrenzt wird, ist in P halbirt. Man soll den Ort des Halbirungspunktes finden.

Da $y = me^{\frac{x}{m}}$ die Gleichung der Curve CBD ist, so hat man $y = me^{-\frac{x}{m}}$ als Gleichung der Curve C'BD'. Nun ist $MP = \frac{1}{2}(MN' + MN)$, und wenn man AM durch x bezeichnet, $MN = me^{\frac{x}{m}}$, $MN' = me^{-\frac{x}{m}}$;

folglich, wenn MP = y gesetzt wird, §. 64.

$$y = \tfrac{1}{2}m\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right), \qquad (5)$$

welches die Gleichung des gesuchten Ortes ist.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, was auch aus der Construction klar ist, daß die stetige Folge der Punkte in der Curve EBF gänzlich auf der Seite der positiven Ordinaten liegt, wenn, wie wir es annehmen wollen, m positiv ist. Ferner ergiebt sich, daß die Ordinatenachse die Curve in zwei congruente Theile theilt; dann legt man dem x zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe $+\alpha$ und $-\alpha$ bei, so erhält man für y denselben Werth, nämlich $\tfrac{1}{2}m\left(e^{\frac{\alpha}{m}} + e^{-\frac{\alpha}{m}}\right)$.

Aus der Gleichung (5) kann man auch x durch y ausdrücken. Zu dem Ende multipliciren wir die Gleichung mit $e^{\frac{x}{m}}$, so kommt

$$ye^{\frac{x}{m}} = \tfrac{1}{2}m\left(e^{\frac{2x}{m}} + 1\right),$$

woraus wir $e^{\frac{x}{m}} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - m^2}}{m}$, und also für x die beiden Werthe

$$x = m\,log\frac{y + \sqrt{y^2 - m^2}}{m} \quad ; \quad x = m\,log\frac{y - \sqrt{y^2 - m^2}}{m} \qquad (6)$$

erhalten, die allerdings einander gleich und entgegengesetzt sind, indem $\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - m^2}}{m}\right) \cdot \left(\frac{y - \sqrt{y^2 - m^2}}{m}\right) = 1$ ist.

Die Curve (5) wird Kettenlinie genannt (weil eine Kette oder vielmehr ein vollkommen biegsamer, in allen seinen Theilen gleicher, nicht dehnbarer Faden, auf welchen in allen Punkten gleiche und parallele Kräfte wirken, ihre Gestalt annimmt).

Von den merkwürdigen Eigenschaften dieser Curve wollen wir jetzt nur die folgende anführen, welche sie mit der geraden Linie gemein hat.

Dividirt man die Summe zweier Ordinaten M'P' und M''P'', welche in einer gegebenen Entfernung M'M'' = 2h von einander errichtet sind, durch die Ordinate MP, welche diese Entfernung halbirt, so ist der Quotient eine constante Größe, d. h. immer derselbe, wo auch die beiden Ordinaten M'P', M''P'' errichtet seyn mögen, wenn nur ihre Entfernung 2h dieselbe ist.

Denn bezeichnet man MP, M'P' u. M''P'' respective durch y, y' u. y''

§. 64. und AM durch x; so ist $AM' = x - h$ und $AM'' = x + h$. Daher hat man

$$y = \tfrac{1}{2}m\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) ; \quad y' = \tfrac{1}{2}m\left(e^{\frac{x}{m}-\frac{h}{m}} + e^{-\frac{x}{m}+\frac{h}{m}}\right) ;$$

$$y'' = \tfrac{1}{2}m\left(e^{\frac{x}{m}+\frac{h}{m}} + e^{-\frac{x}{m}-\frac{h}{m}}\right) ,$$

oder, wenn man, der Kürze wegen, $e^{\frac{x}{m}} = u$ und $e^{\frac{h}{m}} = v$ setzt,

$$y = \tfrac{1}{2}m\left(u + \frac{1}{u}\right) ; \quad y' = \tfrac{1}{2}m\left(u\frac{1}{v} + \frac{1}{u}v\right) ; \quad y'' = \tfrac{1}{2}m\left(uv + \frac{1}{u}\frac{1}{v}\right) ;$$

also

$$y' + y'' = \tfrac{1}{2}m\left(u + \frac{1}{u}\right)\left(v + \frac{1}{v}\right) ,$$

und folglich

$$\frac{y' + y''}{y} = v + \frac{1}{v} = e^{\frac{h}{m}} + e^{-\frac{h}{m}} ,$$

was auch x seyn mag. Es hat also $\frac{y' + y''}{y}$ immer denselben Werth, wo auch die Punkte M' und M'' auf der Abscissenachse liegen mögen, wenn nur M'M'' dieselbe Länge 2h hat.

§. 65.

Fig. 47. **Aufgabe [103].** Die Grundlinie AB eines Dreiecks ABC ist gegeben. In diesem Dreiecke verhält sich ein Abschnitt BN der Grundlinie, welchen der von dem Scheitel C des Dreiecks herabgelassene Perpendikel bildet, zur Grundlinie AB wie der an dem andern Abschnitte liegende Winkel BAC zu einem rechten Winkel. Es soll der Ort des Scheitels C gefunden werden.

Es sey die gegebene Grundlinie = a. Bezeichnen wir nun AN durch x, NC durch y und Winkel BAC durch t; so ist, zufolge der Aufgabe,

$$a - x : a = t : \tfrac{1}{2}\pi ,$$

und ferner die Gleichung der den Punkt C enthaltenden Geraden AC

$$y = tang\,t . x .$$

Aus der ersten Gleichung ergiebt sich $t = \frac{\pi(a-x)}{2a}$, und durch Substitution in die zweite Gleichung

$$y = x\,tang\frac{\pi(a-x)}{2a} \qquad (1)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes. Die Curve ist unter dem Namen der Quadratrix des Dinostratus bekannt. Vermittelst der trigonometrischen Tafeln kann man beliebig viele Punkte der Curve bestimmen. §. 65.

Für $x = \pm a$ oder $\pm 3a$ oder $\pm 5a$ u. s. w. wird $y = 0$. Die Curve schneidet also die Abscissenachse in unendlich vielen Punkten.

Für $x = \pm 2a$ oder $\pm 4a$ oder $\pm 6a$ u. s. w. ist $tang\frac{\pi(a-x)}{2a} = \infty$ und somit $y = \infty$. Die Curve hat demnach unzählig viele, sich ins Unendliche erstreckende Zweige.

Für $x = 0$ findet man $y = 0.tang\frac{1}{2}\pi = 0.\infty$ oder auch $y = \frac{0.sin\frac{1}{2}\pi}{cos\frac{1}{2}x} = \frac{0}{0}$. Um den wahren Werth dieses Ausdrucks zu finden, kann man folgendermaßen verfahren. Es ist $y = x\,tang\frac{\pi(a-x)}{2a} = \frac{x\,cos\frac{\pi x}{2a}}{sin\frac{\pi x}{2a}}$ oder, wenn man für $cos\frac{\pi x}{2a}$ und $sin\frac{\pi x}{2a}$ die ihnen gleichgeltenden Reihen setzt,

$$y = \frac{x - \frac{1}{1.2}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 x^3 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^4 x^5 - \ldots.}{\frac{\pi}{2a}x - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^3 x^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^5 x^5 - \ldots.}.$$

Hebt man diesen Ausdruck durch x, und setzt alsdann $x = 0$, so kommt

$$y = \frac{2a}{\pi},$$

was gefunden werden sollte.

Es ist noch zu bemerken, daß in dem eigentlichen Sinne der Aufgabe der Winkel t nicht kleiner als Null und nicht größer als zwei rechte Winkel seyn kann; daß daher $\frac{\pi(a-x)}{2a} \geqq 0$ und $\frac{\pi(a-x)}{2a} \leqq \pi$; woraus $x \leqq a$ und $x \geqq -a$ folgt, so daß, in diesem Sinne, x zwischen den Grenzen a und $-a$ enthalten ist, und also nur der Theil BCD der Curve zur Lösung der Aufgabe gehört.

Aufgabe [104]. Es sey M irgend ein Punkt der Peripherie eines Kreises, dessen Radius gegeben ist. Auf einem gegebenen Durchmesser AB dieses Kreises oder auf seiner Verlängerung ist ein Punkt N so be- Fig. 48.

§. 65. stimmt, daß AN : AO = Bogen AM : Quadranten AD. Es ist ferner NP senkrecht auf AB errichtet und in Länge gleich der ihr parallelen MQ gemacht. Man soll den Ort des Punktes P finden.

Bezeichnet man den Radius des gegebenen Kreises durch a, den veränderlichen Winkel AOM durch t, AN und NP durch x und y, so ist zufolge der Aufgabe

$$x : a = at : \frac{a\pi}{2},$$

woraus $t = \frac{\pi x}{2a}$. Ferner ist $MP = MQ = a\sin t$, also $y = a\sin t$, oder durch Substitution

$$y = a\sin\frac{\pi x}{2a}, \qquad (2)$$

welches die Gleichung des gesuchten Ortes ist. Die Curve ist unter dem Namen der Quadratrix des Tschirnhausen bekannt.

Da $\sin\frac{\pi x}{2a}$ nie größer als $+1$ und nie kleiner als -1 werden kann, so kann auch y nicht größer als a und nicht kleiner als $-a$ werden. Die Curve ist also gänzlich in dem Raume enthalten, der zwischen zweien, dem Durchmesser AB in der Entfernung des Radius a, parallel laufenden Geraden liegt. Für $x = 0$ oder $= \pm 2a$ oder $= \pm 4a$ u. s. w. ist $y = 0$; für $x = \pm a$ oder $x = \pm 3a$ oder $x = \pm 5a$ u. s. w. ist $y = \pm a$.

Setzt man für x nach einander irgend zwei Werthe, α und $\alpha \pm 4na$, die um 4na von einander verschieden sind, wo n irgend eine ganze Zahl bedeutet, so erhält y einen und denselben Werth, nämlich

$$a\sin\frac{\pi\alpha}{2a} = a\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2a} + 2n\pi\right).$$

Die Curve besteht demnach aus unendlich vielen congruenten Zügen.

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten nach einem der Punkte, in welchen die Curve die Abscissenachse schneidet, indem man $x \pm 2na$ statt x setzt, so kommt $y = a\sin\left(\frac{\pi x}{2a} \pm n\pi\right)$, also

$$y = +a\sin\frac{\pi x}{2a} \quad \text{oder} \quad y = -a\sin\frac{\pi x}{2a}, \qquad (3)$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist, welche Gleichungen mit der Gleichung (2) dieselbe Form haben. Setzt man für x zwei gleiche, einander entgegen-

gesetzte Werthe $+\alpha$ und $-\alpha$, so erhält man für y ebenfalls zwei gleiche, einander entgegengesetzte Werthe $+\beta$ und $-\beta$, man mag die eine oder die andere der beiden Gleichungen (3) nehmen. Da nun eine Gerade, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten und einen Punkt $\alpha\beta$ geht, auch den Punkt, dessen Coordinaten $-\alpha$, $-\beta$ sind, enthält, so folgt, daß eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Gerade, welche die Curve in einem Punkte schneidet, diese Linie wenigstens noch in einem Punkte treffen wird, und, da $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{(-\alpha)^2+(-\beta)^2}$, daß beide Punkte gleich weit vom Anfangspunkte entfernt sind. Dieser Anfangspunkt ist daher ein Mittelpunkt der Curve. Dies läßt sich auch dadurch zeigen, daß man $\sin\frac{\pi x}{2a}$ in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt; denn alsdann erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche nur ungerade Potenzen dieser Größen enthält, woraus denn nach §. 54. (S. 254.) folgt, daß der Anfangspunkt der Coordinaten ein Mittelpunkt der Curve ist. Da nun bei unserer Transformation n beliebig und auf unzählig viele Arten angenommen werden kann, so ergiebt sich, daß die Curve unendlich viele Mittelpunkte habe. §. 65.

(Den Namen Quadratrix führt diese Curve und die vorher erwähnte, weil beide zur Quadratur des Kreises benutzt werden können.)

§. 66.

An einem Kreise ABM sind Tangenten gezogen und auf einer jeden derselben sind vom Berührungspunkte an, nach derselben Richtung hin, Stücke BB', CC', DD' u. s. w. abgeschnitten, welche respective den Bogen AB, AC, AD u. s. w., die von einem festen Punkte A und den Berührungspunkten B, C, D u. s. w. begrenzt werden, gleich sind. Die Endpunkte B', C', D' u. s. w. bilden in ihrer Continuität eine Curve, welche die Kreisevolvente genannt wird. Fig. 49.

Stellt man sich einen vollkommen biegsamen, nicht dehnbaren Faden ohne Dicke vor, der um den Kreis umgewickelt und in irgend einem Punkte M der Kreislinie befestigt ist; ferner daß dieser Faden von dem Kreise abgewikkelt werde, indem er in seinem Endpunkte A angespannt gehalten wird, so beschreibt dieser Punkt ein Stück der genannten Curve, woher ihr Name kommt.

Aufgabe [195]. Die Polargleichung der Kreisevolvente zu finden.

Bezeichnet man den Winkel AOB, welchen ein nach einem der Berüh-

§. 66. chung. (3), $y = a - a\cos t$, leicht einzusehen. Für $y = 0$ ist, aus der Gleichung (4), $x = 0$, oder $= \pm 2\pi a$, oder $= \pm 4\pi a$ u. s. f. Die Cycloide trifft also die Abscissenachse in unendlich vielen Punkten, welche um $2\pi a$, d. i. um die Länge der Peripherie des erzeugenden Kreises, von einander entfernt sind. Für $y = 2a$ ist $x = \pm\pi a$, oder $\pm 3\pi a$, oder $\pm 5\pi a$ u. s. f.; die Punkte E, F etc., welche die Scheitel genannt werden, haben demnach die gleiche Entfernung von einander. Daß die Curve aus unendlich vielen congruenten Zügen besteht, ist ebenfalls leicht einzusehen.

Wenn ein Kreis auf einer festen Geraden rollt, ohne verschoben zu werden, so beschreibt irgend ein bestimmter Punkt seiner Ebene eine Curve, welche geschweifte oder gedehnte Cycloide genannt wird, wenn dieser Punkt innerhalb der Kreisfläche, und welche verkürzte oder verschlungene Cycloide heißt, wenn dieser Punkt außerhalb der Kreisfläche liegt.

Aufgabe [107]. Es soll die Gleichung der gedehnten oder verkürzten Cycloide gefunden werden.

Fig. 51. Es sey XX' die gegebene unbegrenzte Gerade, MPN der rollende Kreis in einer seiner Lagen, in welcher er die Gerade XX' im Punkte M berührt, P' oder P'' sey der beschreibende Punkt und P derjenige, in welchem die Verbindungslinie des Punktes P' oder P'' und des Mittelpunktes den Kreis trifft. Es sey ferner A derjenige Punkt auf XX', in welchem sich P bei einer frühern Lage des Kreises befand; a sey der Radius des Kreises und OP' oder OP'' gleich b.

Nehmen wir A zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten und XX' zur Abscissenachse, so ist AQ' oder AQ'' gleich x und Q'P' oder Q''P'' gleich y. Nun haben wir $AQ' = AM - Q'M$ oder $AQ'' = AM - Q''M$, und, wie man leicht einsieht, AM = Bogen MP. Wenn wir nun den Bogen MP durch at bezeichnen, so findet sich

$$x = at - b\sin t \quad ; \quad y = a - b\cos t \,, \qquad (5)$$

es mögen x, y die Coordinaten von P' oder von P'' seyn. Aus der letzten Gleichung ergiebt sich $\cos t = \frac{a-y}{b}$, also $\sin t = \frac{\sqrt{b^2-(a-y)^2}}{b}$, und daher giebt die vorletzte Gleichung

$$x = a.arc\left(\cos = \frac{a-y}{b}\right) - \sqrt{b^2 - b(a-y)^2} \,, \qquad (6)$$

welches die gesuchte Gleichung ist. Sie drückt die gedehnte Cycloide aus,

wenn $b < a$, und die verkürzte, wenn $b > a$ ist. Da $\cos t$ nicht kleiner als -1 und nicht größer als $+1$ werden kann, so folgt aus der Gleichung (5), $y = a - b\cos t$, daß y nicht kleiner als $a-b$ und nicht größer als $a+b$ werden kann. Für $y = a-b$ ist, aus der Gleichung (6), $x = 0$, oder $= \pm 2a\pi$, oder $= \pm 4a\pi$ u. s. f. Die gedehnte oder verkürzte Cycloide trifft also eine, der Geraden XX' in der Entfernung $a-b$ parallele, gerade Linie CD oder CD' in unzählig vielen Punkten, welche um $2\pi a$, d. i. um die Länge der Peripherie des erzeugenden Kreises von einander entfernt sind. Für $y = a+b$ ist $x = \pm\pi a$, oder $= \pm 3\pi a$, oder $= \pm 5\pi a$ u. s. f.; die höchsten Punkte der Curve liegen demnach in einer, ebenfalls der Geraden XX' parallelen, geraden Linie EF oder E'F' und haben von einander die gleiche Entfernung. §. 66.

Nimmt man die Gerade CD oder CD' zur Abscissenachse und den Punkt A' oder A'' zum Anfangspunkte der Coordinaten, indem man $y+a-b$ für y setzt, so verwandeln sich die Gleichungen (5 u. 6) in

$$x = at - b\sin t \quad ; \quad y = b - b\cos t \; ; \qquad (7)$$

$$x = a.arc\left(\cos = \frac{b-y}{b}\right) - \sqrt{2by - y^2} \; . \qquad (8)$$

Setzt man nun $x = 0$, so ergiebt sich, aus der ersten Gleichung, $b\sin t = at$, welche letzte Gleichung befriedigt wird, wenn man $t = 0$ setzt, woraus sich alsdann, vermittelst der zweiten Gleichung, $y = 0$ ergiebt. Für die gedehnte Cycloide giebt es keinen andern Werth von t, welcher der Gleichung $b\sin t = at$ Genüge leistet; denn diese giebt $\frac{\sin t}{t} = \frac{a}{b}$ und es ist für jene Curve $\frac{a}{b} > 1$, während für jeden Werth von t, außer 0, $\frac{\sin t}{t} < 1$ ist. Für die verkürzte Cycloide, für welche $\frac{a}{b} < 1$ ist, giebt es außer 0 noch einen andern Werth τ von t, welcher dem Punkte K entspricht. Aehnliche Resultate ergeben sich, wenn man $x = \pm 2\pi a$ oder $= \pm 4\pi a$ u. s. f. f. setzt.

§. 67.

Wenn ein Kreis MPS auf der Peripherie eines andern Kreises AMB fortrollt, so beschreibt irgend ein Punkt P seiner Peripherie eine Curve, welche **Epicycloide** oder **Hypocycloide** genannt wird, je nachdem der beweg- Fig. 52

§. 67. liche und der feste Kreis sich von außen oder von innen berühren. Bei derselben Bewegung beschreibt ein Punkt P' oder P'' der sich wälzenden Kreisebene eine Curve, welche gedehnte Epicycloide oder Hypocycloide genannt wird, wenn dieser Punkt innerhalb des Kreises, und die verkürzte heißt, wenn er außerhalb der Kreisfläche liegt. Der feste Kreis wird die Basis genannt.

Aufgabe [108]. Die Gleichungen der gemeinen, der gedehnten und der verkürzten Epicycloide und Hypocycloide zu finden.

Es sey (Fig. 52.) C der Mittelpunkt des festen Kreises, sein Radius = r; O der Mittelpunkt des rollenden Kreises in einer seiner Lagen, sein Radius = a. Ferner sey OP' oder OP'' gleich b, M sey der Berührungspunkt beider Kreise in ihrer gegenwärtigen Lage, und A derjenige Punkt des festen Kreises, auf welchem sich der Punkt P in einer frühern Lage des rollenden Kreises befand. Wir nehmen C zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten und den verlängerten Radius AC zur Abscissenachse, fällen die Senkrechten PN, OT, P'N' und P''N'', und bezeichnen den Winkel OCA durch t.

I. Für die gemeine Epicycloide ist nun CN = x, NP = y. Ferner haben wir

$$x = CN = CT + TN \quad ; \quad y = NP = TR = TO - OR$$

und

$$CT = CO\cos t = (r+a)\cos t \quad ; \quad TO = CO\sin t = (r+a)\sin t .$$

Nun ist Bogen PQ = PM — MQ, Bogen PM = AM, AM = rt, Winkel $MOQ = \frac{1}{2}\pi - ACM = \frac{1}{2}\pi - t$, folglich Bogen $MQ = a(\frac{1}{2}\pi - t)$, und demnach Bogen $PQ = rt - \frac{1}{2}a\pi + at$, also Winkel $POQ = \frac{(r+a)t - \frac{1}{2}a\pi}{a}$

$= \frac{r+a}{a}.t - \frac{1}{2}\pi$, somit $TN = a\sin\left(\frac{r+a}{a}.t - \frac{1}{2}\pi\right) = -a\cos\frac{r+a}{a}.t$

und $OR = a\cos\left(\frac{r+a}{a}.t - \frac{1}{2}\pi\right) = a\sin\frac{r+a}{a}.t$. Hieraus folgt nun

$$\left.\begin{aligned} x &= (r+a)\cos t - a\cos\frac{r+a}{a}.t \\ y &= (r+a)\sin t - a\sin\frac{r+a}{a}.t \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

ein System von zwei Gleichungen, welches die gemeine Epicycloide ausdrückt,

drückt, und zwischen welchen man t eliminiren müßte, um eine einzige Gleichung für diese Curve zu erhalten. §. 67.

II. Für die gemeine Hypocycloide kann man auf dieselbe Weise verfahren; es lassen sich aber auch die Gleichungen für diese Curve unmittelbar aus den, für die Epicycloide gefundenen, ableiten, indem man nur a mit —a zu vertauschen braucht. Setzen wir also in die Gleichungen (1) —a für a, r—a für r+a, $\cos\frac{r-a}{-a}t = \cos\frac{r-a}{a}t$ für $\cos\frac{r+a}{a}t$ und $\sin\frac{r-a}{-a}t = -\sin\frac{r-a}{a}t$ für $\sin\frac{r+a}{a}t$, so erhalten wir für die gemeine Hypocycloide

$$\left.\begin{aligned} x &= (r-a)\cos t + a\cos\frac{r-a}{a}.t \\ y &= (r-a)\sin t - a\sin\frac{r-a}{a}.t \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

III. Für die gedehnte oder verkürzte Epicycloide ist die Herleitung der Gleichungen der unter I. ähnlich. Ist die Entfernung OP' oder OP" gleich b, so findet man die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= (r+a)\cos t - b\cos\frac{r+a}{a}.t \\ y &= (r+a)\sin t - b\sin\frac{r+a}{a}.t \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

IV. Für die gedehnte oder verkürzte Hypocycloide findet man

$$\left.\begin{aligned} x &= (r-a)\cos t + b\cos\frac{r-a}{a}.t \\ y &= (r-a)\sin t - b\sin\frac{r-a}{a}.t \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Wir wollen zunächst bemerken, daß die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= (r+a)\cos t - b\cos\frac{r+a}{a}.t \\ y &= (r+a)\sin t - b\sin\frac{r+a}{a}.t \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

die Gleichungen (1), (2) und (4) als besondere Fälle in sich schließen, welche letztern aus diesen Gleichungen (3) entstehen, wenn man respective,

§. 67. erstens a für b, zweitens —a für b und —a für a, und drittens —b für b und —a für a setzt.

Wenn der bewegliche Kreis aus einer gewissen Lage zu rollen anfängt, so wird derjenige Punkt seiner Peripherie, der mit dem festen Kreise bei jener Lage in Berührung war, wieder mit dem festen Kreise in Berührung kommen, nachdem der Bogen des festen Kreises, auf welchem die Bewegung geschehen ist, der Peripherie des sich wälzenden Kreises gleich geworden. Während dieser Bewegung ist ein bestimmter Zug der in Rede stehenden Curve beschrieben worden; und es leuchtet ein, daß bei fortgesetzter Bewegung des rollenden Kreises ein zweiter, dritter u. s. w. Zug der Curve beschrieben werden wird, und daß alle diese Züge einander gleich seyn werden. Demnach besteht unsere Curve im Allgemeinen aus unendlich vielen einander gleichen Zügen. In den besondern Fällen, in welchen das Verhältniß der Radien beider Kreise rational ist, wird aber der Punkt des rollenden Kreises, der beim Anfange der Bewegung mit dem festen Kreise in Berührung war, nach einer oder mehrern Umwälzungen jenes Kreises gerade wieder an der Stelle seyn, in welcher er sich beim Anfange der Bewegung befand, und bei fortgesetzter Bewegung wird also der beschreibende Punkt denselben Zug oder dieselben Züge durchlaufen, die er bereits beschrieben hat. In diesen besondern Fällen besteht die Curve also aus einer begrenzten Anzahl gleicher Züge. In dem Falle aber, in welchem das Verhältniß der Radien beider Kreise irrational ist, kommt der genannte Punkt niemals wieder auf der Stelle mit dem festen Kreise in Berührung, auf welcher er sich im Anfange der Bewegung befand, und die Curve muß als aus unendlich vielen gleichen Zügen bestehend angesehen werden.

Dieselben Folgerungen lassen sich aus den Gleichungen (3) der Curve ableiten. Wenn nämlich das Verhältniß $r : a$ dasjenige zweier ganzen Zahlen $q : p$ ist, so ist auch $\frac{r+a}{a} \cdot t = (q+p) \cdot \frac{t}{p}$, und die Gleichungen (3) sind alsdann, wenn man noch, der Kürze wegen, $q+p = m$ setzt, $x = (r+a)\cos t - b\cos m\frac{t}{p}$, $y = (r+a)\sin t - b\sin m\frac{t}{p}$. Nun ist aber, wenn n irgend eine ganze Zahl bedeutet, $\cos\tau = \cos(\tau \pm 2np\pi)$; $\sin\tau = \sin(\tau \pm 2np\pi)$; $\cos\left(m\frac{\tau \pm 2np\pi}{p}\right) = \cos(m\frac{\tau}{p} \pm 2nm\pi) = \cos m\frac{\tau}{p}$; $\sin\left(m\frac{\tau \pm 2np\pi}{p}\right) = \sin m\frac{\tau}{p}$; woraus sich ergiebt, daß x und y dieselben Werthe bekommen, man mag $t = \tau$ oder $t = \tau \pm 2np\pi$ setzen.

Was nun die durch Elimination von t herzustellende Gleichung der Curve betrifft, so sieht man leicht ein, daß dieselbe nicht transscendent ist, wenn das Verhältniß r : a rational ist. Wenn nämlich, wie vorher, q : p dies Verhältniß in ganzen Zahlen ausdrückt, und man setzt $t = p\vartheta$, $p+q = m$, so nehmen die Gleichungen (3) die Form §. 67.

$$x = (a+r)\cos p\vartheta - b\cos m\vartheta\ ,$$
$$y = (a+r)\sin p\vartheta - b\sin m\vartheta$$

an. Nun lassen sich nach den bekannten Formeln $\sin p\vartheta$, $\sin m\vartheta$, $\cos p\vartheta$ und $\cos m\vartheta$ durch $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ auf rationale Weise ausdrücken, da, wie wir jetzt voraussetzen, p und m ganze Zahlen sind. Durch Substitution dieser Ausdrücke findet man also für x und y zwei rationale Functionen von $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$, und eliminirt man zwischen den, auf diese Weise gebildeten beiden Gleichungen und der Gleichung $\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$ noch $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$, so erhält man die verlangte Gleichung zwischen x und y, die offenbar eine algebraische seyn wird.

Wenn das Verhältniß der beiden Radien irrational ist, so ist es immer gerathen, das System der beiden Gleichungen (3) unverändert beizubehalten. Indessen dürfen wir nicht unbemerkt lassen, daß die Elimination von t vollzogen und eine Gleichung zwischen x und y hergestellt werden kann, die Radien beider Kreise mögen commensurabel oder incommensurabel seyn, und zwar auf folgende Weise.

Bezeichnet man $\frac{r+a}{a}$ durch i, so daß also i sowohl eine rationale als eine irrationale Zahl bedeutet, so erhält man aus den Gleichungen (3)

$$\left.\begin{matrix}(r+a)\cos t = x+b\cos it\\ (r+a)\sin t = y+b\sin it\end{matrix}\right\} \text{ und } \left\{\begin{matrix}b\cos it = (r+a)\cos t - x\\ b\sin it = (r+a)\sin t - y\end{matrix}\right\},$$

und wenn die einzelnen Theile dieser Gleichungen quadrirt und die Quadrate sodann addirt werden,

$$(r+a)^2 = y^2+x^2+2by\sin it+2bx\cos it+b^2\ ,$$
$$b^2 = y^2+x^2-2(r+a)y\sin t-2(r+a)x\cos t+(r+a)^2\ .$$

Nun ist bekanntermaßen, wenn man $e^{t\sqrt{-1}}$ durch ν bezeichnet,

$$\sin t = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\nu - \frac{1}{\nu}\right) \quad ; \quad \cos t = \tfrac{1}{2}\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right) ;$$

§. 67. $$\sin it = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\nu^i - \frac{1}{\nu^i}\right) \quad ; \quad \cos it = \tfrac{1}{2}\left(\nu^i + \frac{1}{\nu^i}\right),$$

und die Substitution dieser Ausdrücke in die vorigen Gleichungen giebt, nach Fortschaffung der Nenner,

$$b\left(x - y\sqrt{-1}\right)\nu^{2i} + [y^2 + x^2 + b^2 - (r+a)^2]\nu^i + b\left(x + y\sqrt{-1}\right) = 0,$$
$$(r+a)\left(x - y\sqrt{-1}\right)\nu^2 - [y^2 + x^2 + (r+a)^2 - b^2]\nu + (r+a)\left(x + y\sqrt{-1}\right) = 0.$$

Eliminirt man nun ν, so kommt

$$\left.\begin{array}{l} b\big[y^2+x^2+(r+a+b)(r+a-b) \pm \left(y^2+x^2-(r+a+b)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^2+x^2-(r+a-b)^2\right)^{\frac{1}{2}}\big]^i \\ \qquad + 2^{i-1}(r+a)^i\left(x - y\sqrt{-1}\right)^{i-1} \times \\ \big[y^2+x^2-(r+a+b)(r+a-b) \pm \left(y^2+x^2-(r+a+b)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^2+x^2-(r+a-b)^2\right)^{\frac{1}{2}}\big] \end{array}\right\} = 0,$$

eine Gleichung, welche allerdings nur rational gemacht werden kann, wenn i eine rationale Zahl ist.

Wenn es nicht darauf ankommt, ν zu eliminiren, ehe das Verhältniß der beiden Radien bekannt ist, sondern wenn nur die goniometrischen Functionen weggeschafft werden sollen, so kann man auch folgendermaßen verfahren.

Die Gleichungen

$$x = (r+a)\cos t - b\cos it \quad ; \quad y = (r+a)\sin t - b\sin it$$

geben nach der Substitution der oben genannten Ausdrücke

$$2x = (r+a)\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right) - b\left(\nu^i + \frac{1}{\nu^i}\right) \; ; \; 2y\sqrt{-1} = (r+a)\left(\nu - \frac{1}{\nu}\right) - b\left(\nu^i - \frac{1}{\nu^i}\right),$$

oder, wenn man die Nenner wegschafft,

$$b\nu^{2i} - (r+a)\nu^{i+1} + 2x\nu^i - (r+a)\nu^{i-1} + b = 0,$$
$$b\nu^{2i} - (r+a)\nu^{i+1} + 2y\sqrt{-1}\nu^i + (r+a)\nu^{i-1} - b = 0.$$

Nimmt man die halbe Summe und die halbe Differenz dieser Gleichungen, so ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{rl} b\nu^i - (r+a)\nu + (x + y\sqrt{-1}) &= 0 \\ (x - y\sqrt{-1})\nu^i - (r+a)\nu^{i-1} + b &= 0 \end{array}\right\}. \quad (5)$$

Wir wollen jetzt, als Anwendung des bisher Gezeigten, für einige bestimmte Verhältnisse der Radien beider Kreise die Gleichungen der Epicycloiden und Hypocycloiden aufstellen.

1) Es sey der Radius des beweglichen Kreises dem des festen gleich, §. 67.
und es werde die dadurch erzeugte Epicycloide gesucht.

Wir setzen in die Gleichungen (1) $a = r$ und erhalten

$$x = 2r\cos t - r\cos 2t \quad ; \quad y = 2r\sin t - r\sin 2t \; .$$

Diese Gleichungen verwandeln sich, in Folge der bekannten Formeln $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ und $\sin 2t = 2\cos t \sin t$, in

$$x = r[2\cos t - 2\cos^2 t + 1] \quad ; \quad y = r[2\sin t - 2\cos t \sin t] \; .$$

Verlegen wir nun, um die Elimination etwas zu vereinfachen, den Anfangspunkt der Coordinaten, indem wir $r - x$ statt x setzen, so kommt

$$x = 2r\cos t[\cos t - 1] \quad ; \quad y = 2r\sin t[1 - \cos t] \; ,$$

woraus wir durch Division $\tang t = -\frac{y}{x}$, und somit $\cos t = \frac{-x}{\sqrt{y^2+x^2}}$ finden. Quadriren wir aber die einzelnen Theile der eben erhaltenen Gleichungen, so ergiebt sich durch Addition $y^2 + x^2 = 4r^2[1 - \cos t]^2$ oder $\sqrt{y^2+x^2} = 2r[1 - \cos t]$, und wenn wir hierin den so eben für $\cos t$ gefundenen Ausdruck substituiren,

$$y^2 + x^2 = 2r[\sqrt{y^2+x^2} + x] \; .$$

Hieraus erhalten wir

$$(y^2+x^2)^2 - 4r(y^2+x^2)x - 4r^2y^2 = 0 \qquad (6)$$

als Gleichung der gesuchten Epicycloide, und diese Curve ist also (§. 61. S. 5) eine Cardioide.

Zu demselben Resultate würden wir gelangt seyn, wenn wir uns der Gleichungen (5) bedient hätten, welche für den gegenwärtigen Fall, da $b = a = r$ und $i = \frac{r+a}{a} = 2$ ist,

$$r\nu^2 - 2r\nu + (x + y\sqrt{-1}) = 0 \quad \text{und} \quad (x - y\sqrt{-1})\nu^2 - 2r\nu + r = 0$$

sind.

2) Es sey der Radius des rollenden Kreises halb so groß als der des festen, und es werde die dadurch erzeugte Epicycloide gesucht.

Hier ist $b = a = \frac{1}{2}r$, und $i = \frac{r+a}{a} = 3$. Die Gleichungen (5) sind also für den gegenwäreigen Fall

$$r\nu^3 - 3r\nu + 2(x + y\sqrt{-1}) = 0 \; ; \; 2(x - y\sqrt{-1})\nu^3 - 3r\nu^2 + r = 0 \; ,$$

§. 67. aus welchen sich durch Elimination von ν

$$4(y^2+x^2-r^2)^3 = 27r^4y^2\,, \qquad (7)$$

oder

$$y^6+(3x^2-3r^2)y^4+(3x^4-6r^2x^2-\tfrac{15}{4}r^4)y^2+x^6-3r^2x^4+3r^4x^2-r^6 = 0 \qquad (7)$$

als Gleichung der gesuchten Epicycloide ergiebt.

3) Es sey der Radius des rollenden Kreises wieder halb so groß als der des festen, und es werde die durch den erstern erzeugte Hypocycloide gesucht.

Benutzen wir hier die Gleichungen (2), so haben wir $\frac{1}{2}r$ für a, und 1 für $\frac{r-a}{a}$ zu setzen; dies giebt

$$x = r\cos t \quad \text{und} \quad y = 0\,.$$

Die gesuchte Hypocycloide ist demnach eine gerade Linie und zwar ein Durchmesser des festen Kreises.

4) Es sey der Radius des beweglichen Kreises gleich dem dritten Theile vom Radius des festen Kreises, und es werde die durch den erstern erzeugte Hypocycloide gesucht.

Hier ist $b = a = -\frac{1}{3}r$ und $i = \frac{r+a}{a} = -2$; demnach geben die Gleichungen (5)

$$r\nu^{-2}+2r\nu-3(x+y\sqrt{-1}) = 0\;;\; 3(x-y\sqrt{-1})\nu^{-2}-2r\nu^{-3}-r = 0\,,$$

woraus wir durch Elimination von ν

$$y^4+2(x^2+4rx+r^2)y^2+x^4-\tfrac{8}{3}rx^3+2r^2x^2-\tfrac{1}{3}r^4 = 0 \qquad (8)$$

als Gleichung der gesuchten Curve erhalten.

5) Es sey $b = a = -\frac{1}{4}r$, also $i = -3$; so ist in Folge der Gleichungen (5)

$$r\nu^{-3}+3r\nu-4(x+y\sqrt{-1}) = 0\,,$$
$$4(x-y\sqrt{-1})\nu^{-3}-3r\nu^{-4}-r = 0\,,$$

woraus durch Elimination von ν

$$(y^2+x^2-r^2)^3+27r^2x^2y^2 = 0 \qquad (9)$$

gefunden wird, als Gleichung der von einem Kreise mit dem Radius $\frac{r}{4}$ beschriebenen Hypocycloide.

6). Es sey wieder der Radius des rollenden Kreises halb so groß als der des festen, und es werde die gedehnte oder verkürzte Hypocycloide gesucht, welche ein bestimmter Punkt in der Ebene des zuerst genannten Kreises beschreibt. §. 67.

Bezeichnen wir die Entfernung des beschreibenden Punktes vom Mittelpunkte seines Kreises, wie oben, durch b, so haben wir in die Gleichungen (4) nur $a = \frac{1}{2}r$ zu setzen. Dies giebt uns

$$x = (\tfrac{1}{2}r + b)\cos t \quad ; \quad y = (\tfrac{1}{2}r - b)\sin t ,$$

also

$$\cos t = \frac{x}{\frac{1}{2}r + b} \quad ; \quad \sin t = \frac{y}{\frac{1}{2}r - b}$$

und wenn wir quadriren und addiren,

$$\frac{y^2}{(\frac{1}{2}r - b)^2} + \frac{x^2}{(\frac{1}{2}r + b)^2} = 1$$

als Gleichung der gesuchten Hypocycloide, welche somit eine Ellipse ist, deren Achsen $r - 2b$ und $r + 2b$ sind.

Der folgende Lehrsatz läßt sich vermittelst der Gleichungen (1) und (2) leicht erweisen.

Lehrsatz [46]. I. Jede Hypocycloide, welche durch einen Kreis erzeugt ist, dessen Radius a größer als der der Basis r ist, ist einer Epicycloide gleich, welche über derselben Basis von einem Kreise erzeugt wird, dessen Radius die Differenz der genannten Radien $a - r$ ist.

II. Jede Hypocycloide, welche durch einen Kreis erzeugt ist, dessen Radius a kleiner als der der Basis r ist, ist einer zweiten Hypocycloide gleich, welche über derselben Basis von einem Kreise erzeugt wird, dessen Radius die Differenz der genannten Radien $r - a$ ist.

Um den ersten Theil dieses Satzes zu erweisen, setzen wir in die Gleichungen (2) der Hypocycloide $a = r + c$, wo c nur eine positive Größe bedeutet, da der Voraussetzung zufolge $a > r$. Da nun $r - a = -c$ ist, so erhalten wir

$$x = -c\cos t + (r + c)\cos\frac{c}{r + c}\cdot t \quad ; \quad y = -c\sin t + (r + c)\sin\frac{c}{r + c}\cdot t$$

oder, wenn man $t = \frac{r + c}{c}\vartheta$ setzt,

$$x = (r + c)\cos\vartheta - c\cos\frac{r + c}{c}\vartheta \quad ; \quad y = (r + c)\sin\vartheta - c\sin\frac{r + c}{c}\vartheta .$$

§. 67. aus welchen sich durch Elimination von ν

$$4(y^2+x^2-r^2)^3 = 27r^4y^2 , \qquad (7)$$

oder

$$y^6+(3x^2-3r^2)y^4+(3x^4-6r^2x^2-\tfrac{15}{4}r^4)y^2+x^6-3r^2x^4+3r^4x^2-r^6 = 0 \qquad (7)$$

als Gleichung der gesuchten Epicycloide ergiebt.

3) Es sey der Radius des rollenden Kreises wieder halb so groß als der des festen, und es werde die durch den erstern erzeugte Hypocycloide gesucht.

Benutzen wir hier die Gleichungen (2), so haben wir $\frac{1}{2}r$ für a, und 1 für $\frac{r-a}{a}$ zu setzen; dies giebt

$$x = r\cos t \quad \text{und} \quad y = 0 .$$

Die gesuchte Hypocycloide ist demnach eine gerade Linie und zwar ein Durchmesser des festen Kreises.

4) Es sey der Radius des beweglichen Kreises gleich dem dritten Theile vom Radius des festen Kreises, und es werde die durch den erstern erzeugte Hypocycloide gesucht.

Hier ist $b = a = -\frac{1}{3}r$ und $i = \frac{r+a}{a} = -2$; demnach geben die Gleichungen (5)

$$r\nu^{-2}+2r\nu-3(x+y\sqrt{-1}) = 0 \; ; \; 3(x-y\sqrt{-1})\nu^{-2}-2r\nu^{-3}-r = 0 ,$$

woraus wir durch Elimination von ν

$$y^4+2(x^2+4rx+r^2)y^2+x^4-\tfrac{8}{3}rx^3+2r^2x^2-\tfrac{1}{3}r^4 = 0 \qquad (8)$$

als Gleichung der gesuchten Curve erhalten.

5) Es sey $b = a = -\frac{1}{4}r$, also $i = -3$; so ist in Folge der Gleichungen (5)

$$r\nu^{-3}+3r\nu-4(x+y\sqrt{-1}) = 0 ,$$
$$4(x-y\sqrt{-1})\nu^{-3}-3r\nu^{-4}-r = 0 ,$$

woraus durch Elimination von ν

$$(y^2+x^2-r^2)^3+27r^2x^2y^2 = 0 \qquad (9)$$

gefunden wird, als Gleichung der von einem Kreise mit dem Radius $\frac{r}{4}$ beschriebenen Hypocycloide.

6). Es sey wieder der Radius des rollenden Kreises halb so groß als der des festen, und es werde die gedehnte oder verkürzte Hypocycloide gesucht, welche ein bestimmter Punkt in der Ebene des zuerst genannten Kreises beschreibt. §. 67.

Bezeichnen wir die Entfernung des beschreibenden Punktes vom Mittelpunkte seines Kreises, wie oben, durch b, so haben wir in die Gleichungen (4) nur $a = \frac{1}{2}r$ zu setzen. Dies giebt uns

$$x = (\tfrac{1}{2}r + b)\cos t \quad ; \quad y = (\tfrac{1}{2}r - b)\sin t ,$$

also

$$\cos t = \frac{x}{\frac{1}{2}r + b} \quad ; \quad \sin t = \frac{y}{\frac{1}{2}r - b}$$

und wenn wir quadriren und addiren,

$$\frac{y^2}{(\frac{1}{2}r - b)^2} + \frac{x^2}{(\frac{1}{2}r + b)^2} = 1$$

als Gleichung der gesuchten Hypocycloide, welche somit eine Ellipse ist, deren Achsen $r - 2b$ und $r + 2b$ sind.

Der folgende Lehrsatz läßt sich vermittelst der Gleichungen (1) und (2) leicht erweisen.

Lehrsatz [46]. I. Jede Hypocycloide, welche durch einen Kreis erzeugt ist, dessen Radius a größer als der der Basis r ist, ist einer Epicycloide gleich, welche über derselben Basis von einem Kreise erzeugt wird, dessen Radius die Differenz der genannten Radien $a - r$ ist.

II. Jede Hypocycloide, welche durch einen Kreis erzeugt ist, dessen Radius a kleiner als der der Basis r ist, ist einer zweiten Hypocycloide gleich, welche über derselben Basis von einem Kreise erzeugt wird, dessen Radius die Differenz der genannten Radien $r - a$ ist.

Um den ersten Theil dieses Satzes zu erweisen, setzen wir in die Gleichungen (2) der Hypocycloide $a = r + c$, wo c nur eine positive Größe bedeutet, da der Voraussetzung zufolge $a > r$. Da nun $r - a = -c$ ist, so erhalten wir

$$x = -c\cos t + (r + c)\cos\frac{c}{r + c}\cdot t \quad ; \quad y = -c\sin t + (r + c)\sin\frac{c}{r + c}\cdot t$$

oder, wenn man $t = \frac{r + c}{c}\vartheta$ setzt,

$$x = (r + c)\cos\vartheta - c\cos\frac{r + c}{c}\vartheta \quad ; \quad y = (r + c)\sin\vartheta - c\sin\frac{r + c}{c}\vartheta .$$

§. 67. Diese Gleichungen geben aber durch Elimination von ϑ, wie man leicht einsieht, wenn man sie mit den Gleichungen (1) vergleicht, die Gleichung derjenigen Epicycloide, deren Basis den Radius r hat, und welche von einem Kreise erzeugt wird, dessen Radius c folglich gleich a — r ist, was zu zu zeigen war.

Um die Richtigkeit des zweiten Theiles nachzuweisen, setzen wir in die Gleichungen (2) $a = r - c$, wo c nur eine positive Größe bedeutet, da der Voraussetzung zufolge $a < r$. Indem nun $r - a = c$ ist, erhalten wir

$$x = c\cos t + (r-c)\cos\frac{c}{r-c}.t \quad ; \quad y = c\sin t - (r-c)\sin\frac{c}{r-c}.t \,,$$

oder, wenn wir $t = \frac{c-r}{c}.\vartheta$ setzen,

$$x = (r-c)\cos\vartheta + c\cos\frac{r-c}{c}\vartheta \quad ; \quad y = (r-c)\sin\vartheta - c\sin\frac{r-c}{c}\vartheta \,,$$

zwei Gleichungen, welche eine Hypocycloide ausdrücken, deren Basis r, und deren erzeugender Kreis c oder r — a zum Radius hat, was behauptet worden ist.

Wenn der Radius des erzeugenden Kreises $= \infty$ ist, so geht dieser Kreis in eine gerade Linie, und die Epicycloide oder Hypocycloide in die Kreisevolvente über, deren Gleichung wir im vorigen §. aufgestellt haben. Die gedehnte oder verkürzte Epicycloide geht aber unter derselben Voraussetzung in eine Curve über, deren Gleichung wir für einen besondern Fall in der folgenden Aufgabe aufsuchen wollen.

Fig. 53. Aufgabe [109]. Der unbegrenzte Schenkel eines rechten Winkels wälzt sich auf der Peripherie eines gegebenen Kreises. Der andere Schenkel jenes Winkels sey dem Radius dieses Kreises gleich und nach seiner Seite hin gekehrt. Es soll der Ort des Endpunktes dieses zweiten Schenkels gefunden werden.

Es sey CSP der rechte Winkel in einer seiner Lagen, dessen unbegrenzter Schenkel CS den Kreis ABD in D berührt; es sey ferner SP dem Radius des Kreises OD gleich. Nehmen wir nun an, daß B derjenige Punkt des Kreises ist, auf welchem der Punkt S bei einer frühern Lage des rechten Winkels sich befand, so ist DS = Bogen BD. Wir ziehen OD, OP und OB, und errichten OA senkrecht auf OB; so ist, wegen der rechten Winkel bei D und S, und weil OD = SP, ODSP ein Rechteck, also Winkel

POD gleich einem rechten, und deshalb Winkel BOD = AOP, folglich OP = DS = Bogen BD = Bogen AE. Bezeichnen wir also den Winkel AOP durch t, den Radius vector OP durch u und den Radius des Kreises durch r, so ist Bogen AE = rt, folglich §. 67.

$$u = rt \qquad (10)$$

die gesuchte Gleichung des Ortes von P.

§. 68.

Eine Spirale ist eine krumme Linie, welche unzählig viele sich immer erweiternde oder verengende Umläufe um einen festen Punkt macht, so daß sie in diesem Punkte ihren Anfang hat, oder daß sie sich diesem Punkte ohne Aufhören nähert.

Eine der einfachsten Spiralen ist die zu Ende des vorigen §. gefundene Curve, deren Gleichung

$$u = rt\,, \qquad (1)$$

und welche archimedische oder auch cononsche Spirale genannt wird. Diese Spirale kann man sich auch auf folgende Weise erzeugt vorstellen. Eine unbegrenzte gerade Linie OP drehe sich um einen festen Punkt O, und Fig. 53. auf derselben bewege sich ein Punkt P dergestalt, daß die Wege, die dieser Punkt auf der Geraden zurücklegt, den Winkeln proportional seyen, welche die Gerade zurücklegt; der Punkt P beschreibt alsdann eine archimedische Spirale. Denn sind für zwei verschiedene Lagen des Punktes P, dessen Polarcoordinaten u und t respective r′, r″ und ϑ', ϑ'', indem O zum Anfangspunkte angenommen wird, so muß für jede andere Lage jenes Punktes

$$r''-r' : u-r' = \vartheta''-\vartheta' : t-\vartheta'$$

seyn, woraus

$$u = \frac{r''-r'}{\vartheta''-\vartheta'}\left(t - \frac{r''\vartheta'-r'\vartheta''}{r''-r'}\right).$$

Setzt man nun $\frac{r''-r'}{\vartheta''-\vartheta'} = r$ und verlegt die Abscissenachse, indem man $t+\frac{r''\vartheta'-r'\vartheta''}{r''-r'}$ für t setzt, so kommt man zu der Gleichung (1).

Aus dieser Gleichung (1) sieht man, daß u für jeden Werth von t reell ist, namentlich ist für die Werthe 0, 2π, 4π, 6π etc. u gleich 0, $2\pi r$, $4\pi r$, $6\pi r$ etc. Ueberhaupt ist für zwei Werthe, ϑ und $\vartheta+2\pi$, von t, welche um vier rechte Winkel von einander verschieden sind, u gleich

§. 68. $r\vartheta$ und $r\vartheta + 2r\pi$, und es sind demnach die zwei zugehörigen Werthe von u um $2r\pi$ von einander verschieden. Jede Gerade, welche von dem Anfangspunkte O aus gezogen wird, schneidet also die Curve in unzählig vielen Punkten, welche diese Gerade in gleiche Theile, gleich $2r\pi$, theilen; und dasselbe findet mit der Verlängerung dieser Geraden Statt.

Setzt man für t einen negativen Winkel, so wird u negativ, und der Endpunkt dieses Leitstrahls liegt also nicht auf dem Schenkel des eben genannten Winkels, sondern auf dessen Verlängerung über O hinaus. Nimmt man auf negative Winkel Rücksicht, was zuweilen absichtlich unterlassen wird, so ist auch der in der Fig. 53. feiner gezeichnete Theil als zu der Curve gehörig anzusehen, der aber dem andern Theile völlig gleich ist und nur eine umgekehrte Lage hat.

Aufgabe [110]. Eine gerade Linie dreht sich um einen festen Punkt A, und auf derselben bewegt sich ein Punkt P so, daß sich die Winkel, welche die Gerade AP mit einer gegebenen Richtung bildet, umgekehrt wie die nten Potenzen der Länge von AP verhalten. Es soll der Ort des Punktes P gefunden werden.

Wir nehmen den Punkt A zum Anfangspunkte, und eine der gegebenen Richtung parallele Gerade zur Achse der Polarcoordinaten. Sind nun für irgend eine Lage der beweglichen Geraden die Coordinaten des Punktes P gleich α und r, so muß für jede andere Lage

$$\alpha : t = u^n : r^n$$

seyn, woraus sich

$$u^n t = r^n \alpha \qquad (2)$$

ergiebt. Welches nun auch die Zahl n seyn mag, so hat u für jeden positiven Werth von t wenigstens eine reelle Wurzel; die durch die Gleichung (2) ausgedrückten Curven sind daher Spirallinien.

Fig. 54. Wenn $n = 1$ ist und also die Gleichung (2) in

$$ut = r\alpha \qquad (3)$$

übergeht, so heißt die dadurch ausgedrückte Curve reciproke oder (wegen der Aehnlichkeit der Gleichung (3) mit der Gleichung $xy = \frac{1}{4}e^2$ (§. 29. S. 26)) hyperbolische Spirale. Setzt man in $u = \frac{r\alpha}{t}$ das $t = 0$, so ist $u = \infty$; läßt man nun t nach und nach wachsen, so wird u immer kleiner und kleiner; der Punkt P nähert sich also dem Anfangspunkte im-

mer mehr und mehr, ohne ihn je zu erreichen, oder, mit andern Worten, die Spirale macht unzählig viele, sich immer mehr und mehr verengende Windungen um den Anfangspunkt A, den sie niemals erreicht. Da für negative Werthe von t auch u negative Werthe erhält, so gilt hier das Nämliche, was wir in dieser Beziehung vorher von der archimedischen Spirale bemerkt haben. §. 68.

Indem $y = u \sin t$ ist (§. 3. F. 10.), so giebt die Gleichung (3) $y = \frac{\sin t}{t} . r\alpha$; und da, wenn nicht $t = 0$, $\frac{\sin t}{t} < 1$, so ist immer $y < r\alpha$, ausgenommen, wenn $t = 0$ ist, in welchem Falle aber $u = \infty$ wird. Hieraus ergiebt sich, daß die Curve nicht die Gerade MN erreicht, welche von dem Anfangspunkte A die Entfernung $AQ = r\alpha$ hat, daß sie ihr aber immer näher und näher kommt.

Nimmt man auf der hyperbolischen Spirale irgend einen Punkt P an, und beschreibt mit dem Radius vector AP um A einen Kreis, so ist der Bogen PR dieses Kreises $= AP \times t = ut = r\alpha$, also eine constante Größe, wo auch der Punkt P auf der Curve angenommen seyn mag.

Wenn $n = 2$ ist, und also die Gleichung (2) in Fig. 55.

$$u^2 t = r^2 \alpha \qquad (4)$$

übergeht, so heißt die Curve Lituus *). Setzt man $t = 0$, so wird $u = \infty$; läßt man t wachsen, so wird u immer kleiner und kleiner; der Punkt P nähert sich also dem Punkte A immer mehr und mehr, oder die Spirale macht unzählig viele, sich immer mehr und mehr verengende Windungen um den Punkt A, den sie nie erreicht. Es kann hier t nicht negativ genommen werden, weil $u = \pm r\sqrt{\frac{\alpha}{t}}$ für jeden negativen Werth von t imaginär wird. Da aber u zwei gleiche und entgegengesetzte reelle Werthe bekommt, wenn t positiv ist, so besteht auch diese Curve aus zwei vollkommen gleichen Theilen, die so um den Punkt A liegen, daß dieser einen Mittelpunkt bildet.

Nimmt man auf der Curve irgend einen Punkt P an, und beschreibt mit dem Radius vector AP einen Kreis, so ist der Sector RAP dieses Kreises, welcher zwischen diesem Radius und der Geraden liegt, von welcher die t an gerechnet sind, $= \overline{AP}^2 \times t = u^2 t = r^2 \alpha$, also eine constante Größe.

*) Cotes. Harmonia mensurarum (1722), p. 85.

§. 68. **Aufgabe [111].** *Eine gerade Linie dreht sich um einen festen Punkt A, und auf derselben bewegt sich ein Punkt P so, daß, während die Winkel, welche von der Geraden beschrieben werden, in arithmetischer Progression wachsen, die Längen von AP in geometrischer Progression zunehmen. Es soll der Ort des Punktes P gefunden werden.*

Bezeichnet man eine in arithmetischer Progression stehende Reihe von Winkeln, welche die Gerade AP mit der Abscissenachse bildet, durch

$$0\ ,\ \vartheta\ ,\ 2\vartheta\ ,\ 3\vartheta\ ,\ \ldots\ n\vartheta\ ,\ (n+1)\vartheta\ ,\ \ldots\ ,$$

so sind die zugehörigen Längen von AP durch

$$r\ ,\ r\varepsilon\ ,\ r\varepsilon^2\ ,\ r\varepsilon^3\ ,\ \ldots\ r\varepsilon^n\ ,\ r\varepsilon^{n+1}\ ,\ \ldots$$

zu bezeichnen. Setzt man nun $n\vartheta = t$ und $r\varepsilon^n = u$, so ergiebt sich durch Elimination von n

$$u = re^{\frac{t}{\vartheta}}$$

als Gleichung der gesuchten Curve. Was nun auch ε und ϑ seyn mögen, so kann man immer $\varepsilon^{\frac{1}{\vartheta}} = e^{\frac{1}{m}}$ setzen, wo e die Zahl, deren natürlicher Logarithmus gleich 1 ist, bedeuten soll, woraus denn $m = \frac{\vartheta}{log.nat.\varepsilon}$ folgt; und dadurch nimmt die Gleichung der Curve die Form

$$u = re^{\frac{t}{m}} \qquad (5)$$

an. Entwickelt man t, so kommt $t = m\,log\,\frac{u}{r}$, weshalb die Curve *logarithmische Spirale* genannt wird.

Zu jedem positiven Werthe von t gehört ein reeller Werth von u, welcher positiv und größer als r, und zu jedem negativen Werthe von t gehört ein reeller Werth von u, welcher positiv und kleiner als r ist. Für $t = +\infty$ wird $u = \infty$, für $t = 0$ wird $u = r$ und für $t = -\infty$ wird
Fig. 56. $u = 0$. Die Curve, welche sich auf der einen Seite ins Unendliche erstreckt, nähert sich auf der andern Seite dem Anfangspunkte A unbegrenzt, ohne ihn je zu erreichen. Außer den positiven Werthen hat der Radius vector auch noch negative Werthe, wenn $\frac{t}{m}$ ein Bruch mit geradem Nenner ist; aber diese negativen Leitstrahlen geben keine continuirliche Folge von Punkten.

§. 69.

Eine Curve, welche mit einer transſcendenten Linie in der Verwandtſchaft der Collineation ſteht, iſt, wie man leicht einſehen wird, auch eine transſcendente Linie. Wir wollen hier nur den Fall der Aehnlichkeit in Erwägung nehmen, und in dieſer Beziehung die logarithmiſche Spirale betrachten.

Es ſey $u = re^{\frac{t}{m}}$ die Gleichung einer logarithmiſchen Spirale. Verändert man die Lage der Geraden, von welcher die t an gerechnet ſind, um den Winkel ϑ, ohne den Anfangspunkt zu ändern, ſo nimmt dieſe Gleichung die Form $u = re^{\frac{t-\vartheta}{m}} = re^{-\frac{\vartheta}{m}} e^{\frac{t}{m}}$ an. Geht man nun zu rechtwinkligen Coordinaten über, ſo kommt für die erſte Lage der Geraden, von welcher die t an gerechnet ſind,

$$\sqrt{y^2+x^2} = re^{\frac{1}{m} arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)}, \qquad (1)$$

und für die zweite Lage

$$\sqrt{y^2+x^2} = re^{-\frac{\vartheta}{m}} e^{\frac{1}{m} arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)}.$$

Verlegt man noch den Anfangspunkt der xy bei der zweiten Lage der Coordinatenachſen nach einem Punkte, deſſen Coordinaten $-\alpha$ und $-\beta$ ſeyn mögen, ſo erhält man

$$\sqrt{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2} = re^{-\frac{\vartheta}{m}} e^{\frac{1}{m} arc\left(tang = \frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)}, \qquad (2)$$

und nimmt man man die Logarithmen, ſo ergiebt ſich aus (1) und (2)

$$\frac{y}{x} = tang\left[m \log \frac{\sqrt{y^2+x^2}}{r}\right], \qquad (3)$$

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha} = tang\left[\frac{m \log \frac{\sqrt{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}}{r}}{e^{-\frac{\vartheta}{m}}}\right], \qquad (4)$$

zwei Gleichungen, welche dieſelbe logarithmiſche Spirale auf verſchiedene Coordinatenſyſteme bezogen ausdrücken. Denkt man ſich aber nun beide Coordinatenſyſteme zur Congruenz gebracht, ſo drückt die Gleichung (3) eine logarithmiſche Spirale aus, welche ihren Pol im Anfangspunkte des ge-

§. 69. meinschaftlichen Coordinatensystems hat; die Gleichung (4) aber drückt eine der erstern gleiche Spirale aus, deren Pol die Coordinaten α, β hat, und in welcher jede Gerade, die einer Geraden in der ersten Spirale entspricht, mit dieser den Winkel ϑ bildet.

Um nun diejenige Curve zu finden, welche der Spirale (3) ähnlich ist und ähnlich liegt, setzen wir, in Folge der Gleichungen (3) des §. 17., $ay+b$ für y, und $ax+c$ für x in die obige Gleichung (3). Dies giebt, wenn wir die Zähler und Nenner der darin vorkommenden Brüche durch a dividiren,

$$\frac{y+\frac{b}{a}}{x+\frac{c}{a}} = tang\left(m\,log.\frac{\sqrt{\left(y+\frac{b}{a}\right)^2+\left(x+\frac{c}{a}\right)^2}}{ra^{-1}}\right). \qquad (5)$$

Da aber a, b und c willkürliche Constanten sind, so wollen wir sie so bestimmen, daß

$$\frac{b}{a} = -\beta \;;\; \frac{c}{a} = -\alpha \;;\; ra^{-1} = re^{-\frac{\vartheta}{m}} \qquad (6)$$

werde. Dadurch wird die aus (3) erhaltene Gleichung (5) der Gleichung (4) identisch, und es ist demnach eine der logarithmischen Spirale ähnliche Curve diese selbige Spirale in einer andern Lage. Daß die Bestimmung der drei Constanten möglich ist, erhellet von selbst; denn man findet $a = e^{\frac{\vartheta}{m}}$; $b = -\beta e^{\frac{\vartheta}{m}}$; $c = -\alpha e^{\frac{\vartheta}{m}}$. Die Gleichungen (3) des §. 17. nehmen nun, wenn wir, um die Verwechselung mit Polarcoordinaten zu vermeiden, das dortige t und u durch x' und y' bezeichnen, die Form

$$y' = e^{\frac{\vartheta}{m}}(y-\beta) \quad ; \quad x' = e^{\frac{\vartheta}{m}}(x-\alpha)$$

an. Hieraus sieht man, daß der Anfangspunkt der $x'y'$, d. i. der Pol der logarithmischen Spirale in ihrer durch die Gleichung (3) ausgedrückten Lage, dem Punkte $\alpha\beta$, d. i. dem Pole dieser Spirale in der Lage, welche durch die Gleichung (4) angegeben ist, entspricht; denn für $y' = 0$ und $x' = 0$ ergiebt sich $y = \beta$ und $x = \alpha$.

Hätten wir die Gerade, von welcher die t in der Gleichung $u = re^{\frac{t}{m}}$

angerechnet sind, nicht um den Winkel ϑ, sondern um einen Winkel $\vartheta+2\pi$ oder allgemeiner um einen Winkel $\vartheta\pm 2i\pi$ aus ihrer Lage gedreht, wo i irgend eine ganze Zahl bedeutet, so hätten wir sie dadurch offenbar nicht in eine dritte Lage gebracht. Wir können demnach statt $e^{\frac{\vartheta}{m}}$ überall $e^{\frac{\vartheta}{m}\pm\frac{2i\pi}{m}}$ setzen, was die Gleichung (4) auch wirklich nicht verändert; denn es ist, wenn wir der Kürze wegen $\sqrt{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}$ durch U bezeichnen, §. 69.

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha}=tang\left[m\,log\frac{U}{re^{-\frac{\vartheta}{m}\mp\frac{2i\pi}{m}}}\right]=tang\left[m\,log\frac{U}{re^{-\frac{\vartheta}{m}}\cdot e^{\mp\frac{2i\pi}{m}}}\right]$$

$$=tang\left[m\,log\frac{U}{re^{-\frac{\vartheta}{m}}}\mp 2i\pi\right]=tang\left[m\,log\frac{U}{re^{-\frac{\vartheta}{m}}}\right].$$

Aber die Constanten a, b und c erhalten hierdurch andere Werthe, nämlich

$$a=e^{\frac{\vartheta}{m}\pm\frac{2i\pi}{m}};\quad b=-\beta e^{\frac{\vartheta}{m}\pm\frac{2i\pi}{m}};\quad c=-\alpha e^{\frac{\vartheta}{m}\pm\frac{2i\pi}{m}},$$

und für die Coordinaten x_1, y_1 des Aehnlichkeitspunktes, die wir aus den Gleichungen $y'=ay+b$ und $x'=ax+c$ finden, indem wir $x=x'$ und $y=y'$ setzen, ergiebt sich alsdann

$$x_1=\frac{\alpha}{1-e^{\frac{-\vartheta\pm 2i\pi}{m}}};\quad y_1=\frac{\beta}{1-e^{\frac{-\vartheta\pm 2i\pi}{m}}},$$

so daß es eine unendliche Menge von Aehnlichkeitspunkten für beide Curven in denselben beiden Lagen giebt, welche, da $\frac{y_1}{x_1}=\frac{\beta}{\alpha}$ ist, mit den beiden Polen in gerader Linie liegen. Alle diese Aehnlichkeitspunkte fallen aber zusammen, wenn die beiden Pole auf einander liegen; denn alsdann ist $\alpha=0$ und $\beta=0$, also auch $x_1=y_1=0$. Der gemeinschaftliche Pol ist alsdann der Aehnlichkeitspunkt, und selbst wenn $\vartheta=0$ ist, d. i. wenn beide Curven zur Congruenz gebracht sind — eine Lage, für welche die oben angegebenen Gleichungen zwischen x, y, x' und y' in $y'=e^{\pm 2i\pi}y$ und $x'=e^{\pm 2i\pi}x$ übergehen — sind die verschiedenen Windungen der Curve als einander ähnlich und ähnlich-liegend anzusehen.

§. 69. Zwei gleiche logarithmiſche Spiralen ſind alſo, wie ſie auch liegen mögen, wenn nur ihre Windungen ſich nach derſelben Kreisrichtung reſpective erweitern und verengen, als ähnliche und ähnlich-liegende Curven zu betrachten.

Wir unterlaſſen es, die Folgerungen hier auszuführen, die ſich aus dieſer merkwürdigen Eigenſchaft der logarithmiſchen Spirale in Beziehung auf eingeſchriebene Figuren leicht ergeben.

§. 70.

Eine Curve, welche mit einer transſcendenten Linie in derjenigen Verwandtſchaft ſteht, die wir in den §§. 50. u. 51. betrachtet haben, iſt ſelbſt eine transſcendente Linie.

Wir wollen, wie in §. 63., die Gleichungen

$$yy'+xx'-a^2=0\ ,\quad (1)\quad ;\quad xy'-yx'=0 \qquad (2)$$

zu Grunde legen (indem wir, um Verwechſelungen zu vermeiden, für die dortigen t und u hier x' und y' ſetzen), aus welchen ſich

$$y'=\frac{a^2y}{y^2+x^2}\quad ;\quad x'=\frac{a^2x}{y^2+x^2} \qquad (3)$$

ergeben.

Aufgabe [112]. Diejenigen Curven zu finden, welche mit der archimediſchen, der hyperboliſchen Spirale, dem Lituus und der logarithmiſchen Spirale in der, durch die Gleichungen (1) u. (2) ausgedrückten, Verwandtſchaft ſtehen.

Bezeichnen wir die Polarcoordinaten des Syſtems xy durch t, u, und diejenigen des Syſtems x'y' durch t', u', ſo iſt

$$y=u\sin t\ ;\ x=u\cos t\ ;\ y'=u'\sin t'\ ;\ x'=u'\cos t'\ ;$$

und die Gleichungen (3) geben

$$u'\sin t'=\frac{a^2\sin t}{u}\quad ;\quad u'\cos t'=\frac{a^2\cos t}{u}\ .$$

Dividiren wir die einzelnen Theile dieſer Gleichungen durch einander, ſo kommt

$$\frac{\sin t'}{\cos t'}=\frac{\sin t}{\cos t}\quad \text{oder}\quad \operatorname{tang} t'=\operatorname{tang} t\ ,$$

woraus

$$t'=t \qquad (4)$$

folgt.

folgt. Addiren wir aber die Quadrate der einzelnen Theile dieſer Gleichungen, ſo ergiebt ſich $u'^2 = \frac{a^4}{u^2}$ oder §. 79.

$$u' = \frac{a^2}{u} . \qquad (5)$$

Dieſelben Reſultate können wir auch unmittelbar aus den Gleichungen (1) u. (2) erhalten; denn durch Subſtitution der genannten Ausdrücke von x, y, x' u. y' verwandeln ſich dieſe Gleichungen in

$uu'(\sin t \sin t' + \cos t \cos t') - a^2 = 0$; $uu'(\cos t \sin t' - \sin t \cos t') = 0$,

oder in

$$uu' \cos(t' - t) - a^2 = 0 \quad ; \quad uu' \sin(t' - t) = 0 ,$$

woraus ſich $\sin(t' - t) = 0$, alſo $t' = t$, ſodann $\cos(t' - t) = \cos 0 = 1$ und $uu' - a^2 = 0$, wie vorher, ergiebt.

I. Einer archimediſchen Spirale, deren Gleichung $u' = rt'$, entſpricht nun, in Folge der Gleichungen (4) u. (5), eine Curve, deren Gleichung $\frac{a^2}{u} = rt$, oder $ut = \frac{a^2}{r}$, und die alſo eine hyperboliſche Spirale iſt (§. 68. S. 3).

II. Hieraus iſt zugleich klar, daß umgekehrt einer hyperboliſchen Spirale eine archimediſche Spirale entſpricht.

III. Dem Lituus, deſſen Gleichung $u'^2 t' = r^2 \alpha$ (§. 68. S. 4), entſpricht, in Folge der Gleichungen (4) u. (5), eine Curve, deren Gleichung $\frac{a^4 t}{u^2} = r^2 \alpha$ oder $u^2 = \frac{a^4}{r^2 \alpha} t$ iſt, und welche parabolische Spirale genannt wird.

IV. Der logarithmiſchen Spirale, deren Gleichung $u' = re^{\frac{t'}{m}}$ (§. 68. S. 5), entſpricht eine Curve, deren Gleichung $\frac{a^2}{u} = re^{\frac{t}{m}}$ oder $u = \frac{a^2}{r} e^{-\frac{t}{m}}$ iſt. Dieſe Curve iſt ebenfalls eine logarithmiſche Spirale, und zwar iſt ſie der erſtern gleich und hat mit ihr denſelben Pol, nur macht ſie ihre Windungen nach entgegengeſetzter Kreisrichtung. Denn dreht man die Gerade, von welcher die t, in der Gleichung $u = \frac{a^2}{r} e^{-\frac{t}{m}}$, an gerechnet ſind, um

§. 70. den Winkel $\vartheta = 2m\,log\frac{r}{a}$, so verwandelt sich die eben genannte Gleichung der Curve in $u = \frac{a^2}{r}e^{-\frac{t-\vartheta}{m}} = \frac{a^2}{r}e^{-\frac{t}{m}+\frac{\vartheta}{m}} = \frac{a^2}{r}e^{\frac{\vartheta}{m}}.e^{-\frac{t}{m}}$, oder weil $\vartheta = 2m\,log\frac{r}{a} = m\,log\frac{r^2}{a^2}$ und $e^{\frac{\vartheta}{m}} = e^{log\frac{r^2}{a^2}} = \frac{r^2}{a^2}$, in $u = re^{-\frac{t}{m}}$, eine Gleichung, welche mit $u' = re^{\frac{t}{m}}$ bis auf das Vorzeichen von t übereinstimmt.

Es lassen sich aus den eben gefundenen Resultaten mehrere, die genannten Spirallinien betreffende, Sätze auf eine so einfache Art herleiten, daß es hinreichend seyn wird, einen derselben bloß anzuführen.

Lehrsatz [47]. Es seyen S und Σ zwei gleiche logarithmische Spiralen, welche einen gemeinschaftlichen Pol A haben, ihre Windungen aber nach entgegengesetzten Kreisrichtungen machen. Man nenne irgend eine Windung der Spirale S die 0te, und die darauf folgenden äußern Windungen der Reihe nach die 1ste, 2te, 3te, u. s. f., die vorhergehenden innern Windungen aber der Reihe nach die —1ste, —2te, —3te, u. s. f. Man nenne ferner irgend eine Windung der Spirale Σ die 0te, und die darauf folgenden innern Windungen der Reihe nach die 1ste, 2te, 3te, u. s. f., die vorhergehenden äußern Windungen der Reihe nach die —1ste, —2te, —3te, u. s. f. Zieht man nun irgend eine Gerade, welche unzählig viele Windungen der Spirale S, und zwar eine jede im Allgemeinen zweimal, treffen wird, bezeichnet man die beiden Durchschnittspunkte dieser Geraden und der unbestimmten mten Windung durch a_m, b_m; zieht man ferner von A aus nach allen Durchschnittspunkten gerade Linien, von welchen eine jede alle Windungen der Spirale Σ in einem Punkte schneiden wird, und nennt den Durchschnitt der unbestimmten Geraden Aa_m, Ab_m mit der unbestimmten nten Windung der Spirale Σ $\alpha_{m,n}$, $\beta_{m,n}$; so lassen sich aus diesen Durchschnittspunkten unzählig viele Gruppen bilden, von denen eine jede aus unzählig vielen Punkten $\alpha_{m,n}$, $\beta_{m,n}$ besteht, deren beide Indices sämmtlich dieselbe Differenz haben, und alle Punkte einer jeden Gruppe liegen auf der Peripherie eines Kreises, der durch den gemeinschaftlichen Pol A geht.

Zweite Abtheilung.

Von den Tangenten, Normalen und Asymptoten der Curven.

§. 71.

Eine gerade Linie DE berührt eine Curve BPC in einem Punkte P, wenn sie mit dieser Curve den Punkt P gemein hat und so liegt, daß durch denselben Punkt P keine andere Gerade gezogen werden kann, welche in der Nähe dieses Punktes zwischen der Curve BPC und der Geraden DE durchgeht. Fig. 57.

Es sey

$$y = \varphi(x) \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung einer Curve BPC in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten, und es seyen x_1, y_1 die gegebenen Coordinaten eines bestimmten Punktes P dieser Curve, so daß man hat

$$y_1 = \varphi(x_1) \; ; \qquad (2)$$

so ist die Gleichung der Berührungslinie oder Tangente DE im Punkte P

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1) \; , \qquad (3)$$

worin $\frac{dy_1}{dx_1}$ denjenigen Werth des aus der Gleichung (1) hergeleiteten Differential-Coefficienten $\frac{dy}{dx}$ bedeutet, den man erhält, wenn man in dem letztgenannten für x den Werth x_1, und also auch für y den Werth y_1 setzt.

Denn es sey irgend eine andere Gerade FG durch den Punkt P gezogen, deren Gleichung (§. 4. S. 8)

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (4)$$

§. 71. ist, wo m irgend eine von $\frac{dy_1}{dx_1}$ verschiedene Größe bedeutet. Es sey ferner P′ ein dem Punkte P nahe liegender Punkt der Curve, dessen Abscisse $AQ' = x_1+h$ und Ordinate $Q'P' = y'$; P″ der Punkt, in welchem DE, und P‴ derjenige, in welchem FG von P′Q′ oder von deren Verlängerung geschnitten wird; $Q'P'' = y''$; $Q'P''' = y'''$. Alsdann ist, in Folge von (1), $y' = \varphi(x_1+h)$, oder nach dem Taylor'schen Theorem,

$$y' = y_1 + \frac{dy_1}{dx_1}\cdot h + \frac{d^2y_1}{dx_1^2}\cdot\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y_1}{dx_1^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Ferner ist, in Folge von (3), $y''-y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x_1+h-x_1)$, oder

$$y'' = y_1+\frac{dy_1}{dx_1}h\ ,$$

und, in Folge von (4), $y'''-y_1 = m(x_1+h-x_1)$, oder

$$y''' = y_1+mh\ .$$

Hieraus ergiebt sich

$$P'P'' = y'-y'' = \frac{d^2y_1}{dx_1^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y_1}{dx_1^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\frac{d^4y_1}{dx_1^4}\cdot\frac{h^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

$$P''P''' = y'''-y'' = \left(m-\frac{dy_1}{dx_1}\right)h\ .$$

Nun kann aber bekanntermaßen h immer so klein angenommen werden, daß, für diesen Werth von h und für jeden kleinern Werth, absolut genommen,

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y_1}{dx_1^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\frac{d^4y_1}{dx_1^4}\cdot\frac{h^4}{1.2.3.4}+\text{etc.} < \left(m-\frac{dy_1}{dx_1}\right)h\ ,$$

daß also $P'P'' < P''P'''$ werde. Der Punkt P kann also, für ein gehörig kleines $h = QQ'$, nicht zwischen P′ und P″ liegen, welche Größe auch m haben mag; es kann folglich keine gerade Linie durch den Punkt P gezogen werden, welche zwischen der Curve und der Geraden DE, deren Gleichung (3) ist, durchgeht, und es ist also diese Gleichung die der Tangente im Punkte x_1y_1.

Wenn $\frac{dy_1}{dx_1} = 0$ ist, geht die Gleichung (3) in $y-y_1 = 0$ über, und es ist also die Tangente im Punkte x_1y_1 der Abscissenachse parallel. Wenn aber $\frac{dy_1}{dx_1} = \infty$, so geht die Gleichung (3) in $x-x_1 = 0$ über,

und drückt also eine durch den Punkt x_1y_1 gehende, der Ordinatenachse pa- §. 71.
rallele Gerade aus. Daß auch in diesem Falle diese Gerade die Tangente im Punkte x_1y_1 sey, folgt nicht unmittelbar aus der obigen Herleitung; verwechselt man aber die Abscissen- und Ordinatenachse mit einander, so verwandelt sich x in y und y in x, daher $\frac{dy}{dx}$ in $\frac{dx}{dy}$, und bezeichnen wir die neuen Coordinaten des Punktes x_1y_1 durch x^I, y^I, so daß $x_1 = y^I$ und $y_1 = x^I$, so ist die Gleichung der Tangente in diesem Punkte auf die neuen Coordinaten bezogen $y - y^I = \frac{dy^I}{dx^I}(x - x^I)$. Da nun aber $\frac{dy^I}{dx^I} = \frac{dx_1}{dy_1}$ $= \frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}$, so ist, wenn $\frac{dy_1}{dx_1} = \infty$, $\frac{dy^I}{dx^I} = 0$, und folglich die Tangente der neuen Abscissenachse, d. i. der alten Ordinatenachse parallel.

Wenn die Linie, welche von einer Geraden berührt wird, von einem höhern Grade als vom zweiten oder wenn sie transscendent ist, so kann sie mit dieser Tangente noch andere Punkte außer dem Berührungspunkte gemein haben, und in diesen Punkten von der Tangente geschnitten oder auch wieder berührt werden. In jedem Falle aber ist der Berührungspunkt so anzusehen, als ob in ihm wenigstens zwei Durchschnitte vereinigt wären. Denn wenn $y = \varphi(x)$ die Gleichung der Curve ist, und $\frac{dy}{dx}$ durch $\varphi'(x)$ bezeichnet wird, so ist die Gleichung der Tangente im Punkte x_1y_1 der Curve

$$y - y_1 = \varphi'(x_1)[x - x_1] \quad \text{oder} \quad y - \varphi(x_1) = \varphi'(x_1)[x - x_1] .$$

Um nun alle Punkte zu finden, welche diese Tangente mit der Curve gemein hat, muß man x und y aus dieser letzten Gleichung und der Gleichung $y = \varphi(x)$ entwickeln. Eliminiren wir zuerst y, so kommt

$$\varphi(x) - \varphi(x_1) = \varphi'(x_1)[x - x_1] , \qquad (5)$$

und diese Gleichung ist es, welche die Abscissen der gemeinschaftlichen Punkte zu Wurzeln hat. Differentiiren wir diese Gleichung, indem wir x_1 als constant und nur x als veränderlich betrachten, so kommt

$$\varphi'(x) = \varphi'(x_1) , \qquad (6)$$

eine Gleichung, die offenbar befriedigt wird, wenn man $x = x_1$ setzt. Es befriedigt also der Werth x_1 von x nicht nur die Gleichung (5), sondern auch ihre erste Ableitung, es sind folglich, nach einem bekannten Satze, zwei

§. 71. Wurzeln der Gleichung (5) gleich x_1, und es fallen also zwei Durchschnitte in dem Berührungspunkte zusammen.

Die Gerade, welche im Berührungspunkte auf der Tangente senkrecht steht, heißt Normale.

Aufgabe [113]. Die Gleichung einer Curve ist gegeben. Man soll die Gleichung der Normale in einem Punkte dieser Curve finden.

Ist α der Coordinatenwinkel, so findet man aus der Gleichung (3) unmittelbar, nach §. 6. (Aufg. 9. S. 3)

$$y - y_1 = -\frac{1 + \frac{dy_1}{dx_1}\cos\alpha}{\frac{dy_1}{dx_1} + \cos\alpha}(x - x_1),$$

oder

$$\left(\frac{dy_1}{dx_1} + \cos\alpha\right)(y - y_1) + \left(1 + \frac{dy_1}{dx_1}\cos\alpha\right)(x - x_1) = 0. \qquad (7)$$

Wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, so ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, und dann geht diese Gleichung in

$$\frac{dy_1}{dx_1}(y - y_1) + (x - x_1) = 0 \qquad (8)$$

über.

Fig. 57. Unter der Länge der Tangente und Normale eines Punktes P auf einer Curve versteht man die Längen der Stücke dieser Geraden, welche, wie PT und PN, von dem Punkte P und von der Abscissenachse begrenzt werden. Diejenigen Stücke der Abscissenachse, welche zwischen der Ordinate und der Tangente und zwischen der Ordinate und der Normale des Punktes P enthalten sind, wie QT und QN, heißen Subtangente und Subnormale des Punktes P.

Aufgabe [114]. Es sollen die Ausdrücke für die Längen der Subtangente, Subnormale, Tangente und Normale eines Punktes gefunden werden, wenn die Coordinaten rechtwinklig angenommen sind.

Bezeichnen wir die Abscissen der Punkte T und N, in welchen die Tangente und Normale des Punktes P die Abscissenachse schneiden, respective durch x_t und x_n, so finden wir aus den Gleichungen (3) und (8), indem wir y gleich Null setzen,

$$AT = x_t = x_1 - y_1 \frac{dx_1}{dy_1}\,, \qquad \text{§. 71.}$$

$$AN = x_n = x_1 + y_1 \frac{dy_1}{dx_1}\,.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar

$$\text{Subtangente } QT = AQ - AT = x_1 - x_t = y_1 \frac{dx_1}{dy_1}\,, \qquad (9)$$

$$\text{Subnormale } QN = AN - AQ = x_n - x_1 = y_1 \frac{dy_1}{dx_1}\,, \qquad (10)$$

$$\text{Tangente } PT = \sqrt{PQ^2 + QT^2} = \sqrt{y_1^2 + y_1^2 \frac{dx_1^2}{dy_1^2}} = y_1 \sqrt{1 + \frac{dx_1^2}{dy_1^2}}\,, \qquad (11)$$

$$\text{Normale } PN = \sqrt{PQ^2 + QN^2} = \sqrt{y_1^2 + y_1^2 \frac{dy_1^2}{dx_1^2}} = y_1 \sqrt{1 + \frac{dy_1^2}{dx_1^2}}\,, \qquad (12)$$

Ist der Werth des Ausdrucks $y_1 \frac{dx_1}{dy_1}$ positiv, so liegt die Subtangente nach der negativen Seite der Abscissen hin, ist dieser Werth aber negativ, so liegt sie nach der positiven Seite der Abscissen hin. Umgekehrt verhält es sich mit dem Zeichen des Ausdrucks $y_1 \frac{dy_1}{dx_1}$ und der Lage der Subnormale.

Wenn im Anfangspunkte der Coordinaten eine Senkrechte auf dem Radius vector eines Punktes P errichtet wird, so heißt das Stück derselben, welches von dem Anfangspunkte und der Tangente im Punkte P begrenzt wird, die Polar-Subtangente, und dasjenige Stück, welches vom Anfangspunkte und der Normale im Punkte P begrenzt wird, kann die Polar-Subnormale genannt werden.

Aufgabe [115]. Es sollen die Ausdrücke für die Polar-Subtangente und Polar-Subnormale gefunden werden.

Diese Ausdrücke lassen sich, ohne die Figur zu Hülfe zu nehmen, auf folgende Weise auffinden.

Setzt man, daß x und y in den Gleichungen (3) und (8) rechtwinklige Coordinaten bedeuten, und Behufs der Transformation in Polar-Coordinaten (§. 3. F. 10.)

$$y = u \sin t \quad ; \quad x = u \cos t\,,$$

so ergiebt sich durch Differentiation

§. 71. $\frac{dy}{dt} = sin\,t\frac{du}{dt} + u\,cos\,t \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = cos\,t\frac{du}{dt} - u\,sin\,t\,;$

folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sin\,t\frac{du}{dt} + u\,cos\,t}{cos\,t\frac{du}{dt} - u\,sin\,t}\,.$$

Subſtituirt man in die Gleichungen (3) u. (8) für y, x, y_1, x_1 und $\frac{dy_1}{dx_1}$ die ſo eben angegebenen Ausdrücke, indem man die Polarcoordinaten des Punktes x_1y_1 durch t_1 und u_1 bezeichnet, ſo kommt, nach einigen leichten Reductionen, die Polargleichung der Tangente

$$\left\{sin(t-t_1)\frac{du_1}{dt_1} - cos(t-t_1)u_1\right\}u + u_1^2 = 0\,, \qquad (13)$$

und die Polargleichung der Normale

$$\left\{cos(t-t_1)\frac{du_1}{dt_1} + sin(t-t_1)u_1\right\}u - u_1\frac{du_1}{dt_1} = 0\,. \qquad (14)$$

Die Gerade, auf welcher die Tangente und Normale die Stücke abſchneiden, welche Polar-Subtangente und Polar-Subnormale genannt worden ſind, ſteht auf dem Radius vector u_1 ſenkrecht. Da nun dieſer Radius vector mit der Achſe, von welcher die t an gezählt ſind, den Winkel t_1 macht, ſo bildet die eine Seite der genannten Geraden mit dieſer Achſe den Winkel $t_1 - \frac{1}{2}\pi$, und die andere Seite den Winkel $t_1 + \frac{1}{2}\pi$. Setzen wir daher in die Gleichung (13) $t = t_1 - \frac{1}{2}\pi$, alſo $t - t_1 = -\frac{1}{2}\pi$, und in die Gleichung (14) $t = t_1 + \frac{1}{2}\pi$, alſo $t - t_1 = +\frac{1}{2}\pi$, ſo erhalten wir für u zwei Ausdrücke, welche die geſuchten ſind, nämlich

$$\text{Polar-Subtangente} = u_1^2\frac{dt_1}{du_1}\,, \qquad (15)$$

$$\text{Polar-Subnormale} = \frac{du_1}{dt_1}\,. \qquad (16)$$

Iſt der Werth des Ausdrucks $u_1^2\frac{dt_1}{du_1}$ poſitiv, ſo liegt die Polar-Subtangente nach der Richtung hin, nach welcher die Winkel abnehmen; iſt dieſer Werth aber negativ, ſo liegt ſie nach der Richtung hin, nach welcher die Winkel zunehmen. Umgekehrt verhält es ſich mit dem Zeichen von $\frac{du_1}{dt_1}$ und der Lage der Polar-Subnormale.

Es ist nützlich, besonders zu bemerken, daß die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Tangente eines Punktes x_1y_1 mit der Abscissenachse bildet, durch $\frac{dy_1}{dx_1}$, und diejenige des Winkels, welchen die Normale mit dieser Achse macht, durch $-\frac{dx_1}{dy_1}$ ausgedrückt wird, wenn die Coordinaten rechtwinklig sind; ferner daß die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Tangente und Normale eines Punktes t_1u_1 mit dem Radius vector bilden, respective durch $u_1\frac{dt_1}{du_1}$ und $\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dt_1}$ ausgedrückt werden, wenn die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten gegeben ist. Die beiden ersten Ausdrücke folgen aus den Gleichungen (3) und (8); die beiden letztern aus den Ausdrücken (15) und (16). §. 71.

§. 72.

Aufgabe [116]. Man soll die Gleichungen für die Tangente, und die Ausdrücke für die Subtangente an der Cissoide, Conchoide, Cardioide, Lemniscate, logarithmischen Linie, Kettenlinie, den Cycloiden, Epicycloiden und Hypocycloiden aufstellen.

I. Aus der Gleichung der Cissoide in rechtwinkligen Coordinaten (§. 59. G. 8), der wir, $c = 2r$ setzend, die Form

$$y^2(2r-x)-x^3 = 0$$

geben, folgt die Differentialgleichung

$$2(2r-x)y\frac{dy}{dx}-y^2+3x^2 = 0\,, \quad \text{also} \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1^2+3x_1^2}{2(2r-x_1)y_1}\,,$$

und daraus die Gleichung der Tangente im Punkte x_1y_1 (§. 71. G. 3)

$$2(2r-x_1)y_1(y-y_1) = (y_1^2+3x_1^2)(x-x_1)\,,$$

oder, wenn man y entwickelt,

$$y = \frac{y_1^2+3x_1^2}{2(2r-x_1)y_1}x + \frac{4ry_1^2-3x_1y_1^2-3x_1^3}{2(2r-x_1)y_1}\,,$$

oder auch, wenn man, in Folge der Gleichung der Curve, für y_1 den Ausdruck $\pm\frac{x_1^{\frac{3}{2}}}{(2r-x_1)^{\frac{1}{2}}}$ substituirt,

$$y = \pm\frac{x_1^{\frac{3}{2}}}{(2r-x_1)^{\frac{3}{2}}}\{(3r-x_1)x-rx_1\}\,,$$

§. 72. eine Gleichung, in welcher das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem der Berührungspunkt auf der Seite der positiven oder der negativen Ordinaten liegt.

Man findet für die Subtangente

$$y_1\frac{dx_1}{dy_1} = \frac{2(2r-x_1)y_1^2}{y_1^2+3x_1^2} = \frac{(2r-x_1)x_1}{3r-x_1}.$$

II. Aus der Gleichung der Conchoide in rechtwinkligen Coordinaten (§. 60. S. 6)

$$y^4-2by^3+(x^2+b^2-a^2)y^2-2bx^2y+b^2x^2 = 0$$

folgt die Differentialgleichung

$$\{2y^3-3by^2+(x^2+b^2-a^2)y-bx^2\}\frac{dy}{dx}+(y^2-2by+b^2)x = 0,$$

und daraus die Gleichung der Tangente in einem Punkte x_1y_1 der Curve

$$\{2y_1^3-3by_1^2+(x_1^2+b^2-a^2)y_1-bx_1^2\}(y-y_1)+(y_1-b)^2x_1(x-x_1) = 0.$$

Man findet für die Subtangente

$$y_1\frac{dx_1}{dy_1} = -\frac{\{2y_1^3-3by_1^2+(x_1^2+b^2-a^2)y_1-bx_1^2\}y_1}{(y_1-b)^2x_1}.$$

Diesem Ausdruck und auch jener Gleichung der Tangente lassen sich mit Hülfe der Gleichung der Curve noch andere Formen geben, wobei wir nicht verweilen wollen.

III. Aus der Gleichung der Cardioide (§. 61. S. 5)

$$y^4-2(2r^2+2rx-x^2)y^2-4rx^3+x^4 = 0$$

ergiebt sich die Differentialgleichung

$$\{y^2+x^2-2r(r+x)\}y\frac{dy}{dx}+(y^2+x^2)x-r(y^2+3x^2),$$

und die Gleichung der Tangente

$$y_1\{y_1^2+x_1^2-2r(r+x_1)\}(y-y_1)+\{(y_1^2+x_1^2)x_1-r(y_1^2+3x_1^2)\}(x-x_1) = 0.$$

Für die Subtangente findet sich

$$y_1\frac{dx_1}{dy_1} = \frac{y_1^2\{y_1^2+x_1^2-2r(r+x_1)\}}{r(y_1^2+3x_1^2)-x_1(y_1^2+x_1^2)}.$$

IV. Aus der Gleichung der Lemniscate (§. 62. S. 2)

$$(y^2+x^2)^2+a^2(y^2-x^2) = 0.$$

ergiebt sich durch Differentiation §. 72.

$$y\{2(y^2+x^2)+a^2\}\frac{dy}{dx}+x\{2(y^2+x^2)-a^2\}=0\,,$$

und die Gleichung der Tangente

$$y_1\{2(y_1^2+x_1^2)+a^2\}(y-y_1)+x_1\{2(y_1^2+x_1^2)-a^2\}(x-x_1)=0\,,$$

welche sich, in Folge der Gleichung der Curve, auf die Form

$$\{2(y_1^2+x_1^2)+a^2\}y_1y+\{2(y_1^2+x_1^2)-a^2\}x_1x+a^2(y_1^2-x_1^2)=0$$

bringen läßt.

Für die Subtangente findet man

$$y_1\frac{dx_1}{dy_1}=-\frac{\{2(y_1^2+x_1^2)+a^2\}y_1^2}{\{2(y_1^2+x_1^2)-a^2\}x_1}\,.$$

V. Aus der Gleichung der logarithmischen Linie (§. 64. S. 4)

$$y=me^{\frac{x}{m}}$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx}=e^{\frac{x}{m}}\,,$$

und die Gleichung der Tangente

$$y-y_1=e^{\frac{x_1}{m}}(x-x_1)\,,$$

oder, da, in Folge der Gleichung der Curve, $e^{\frac{x_1}{m}}=\frac{y_1}{m}$ ist,

$$m(y-y_1)=y_1(x-x_1)\,.$$

Für die Subtangente ergiebt sich $y_1\frac{dx_1}{dy_1}=\frac{y_1}{e^{\frac{x_1}{m}}}=m$. Die logarithmische Linie hat also die merkwürdige Eigenschaft, daß an ihr die Subtangente constant ist.

VI. Aus der Gleichung der Kettenlinie (§. 64. S. 5)

$$y=\frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

§. 72. ergiebt sich durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right),$$

und die Gleichung der Tangente

$$2(y-y_1) = \left(e^{\frac{x_1}{m}} - e^{-\frac{x_1}{m}}\right)(x-x_1);$$

ferner die Subtangente $y_1\frac{dx_1}{dy_1} = \frac{2y_1}{e^{\frac{x_1}{m}} - e^{-\frac{x_1}{m}}} = m.\frac{e^{\frac{x_1}{m}} + e^{-\frac{x_1}{m}}}{e^{\frac{x_1}{m}} - e^{-\frac{x_1}{m}}}$.

Nehmen wir die Gleichung der Kettenlinie, in welcher der Durchmesser der Curve zur Abscissenachse angenommen ist (§. 64. S. 6), nämlich

$$y = m.log\frac{x \pm \sqrt{x^2 - m^2}}{m},$$

so kommt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{\pm\sqrt{x^2 - m^2}};$$

und alsdann ist die Gleichung der Tangente

$$\pm\sqrt{x_1^2 - m^2}(y-y_1) = m(x-x_1),$$

welche allerdings aus der vorigen Gleichung dieser Tangente hergeleitet werden kann. Für die Subtangente ergiebt sich jetzt $\frac{y_1\sqrt{x_1^2 - m^2}}{m}$.

VII. Aus der Gleichung der Cycloide (§. 66. S. 4)

$$x = a.arc\left(cos = \frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

folgt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

und die Gleichung der Tangente

$$y_1(y-y_1) = \sqrt{2ay_1 - y_1^2}.(x-x_1),$$

so wie die Subtangente

$$y_1\frac{dx_1}{dy_1} = \frac{y_1^2}{\sqrt{2ay_1 - y_1^2}}.$$

VIII. Aus der Gleichung der gedehnten oder verkürzten Cycloide §. 72. (§. 66. S. 6)

$$x = a \cdot arc\left(cos = \frac{a-y}{b}\right) - \sqrt{b^2-(a-y)^2}$$

folgt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{b^2-(a-y)^2}} ,$$

und die Gleichung der Tangente

$$y_1(y-y_1) = \sqrt{b^2-(a-y_1)^2}.(x-x_1) ,$$

ferner die Subtangente $\frac{y_1^2}{\sqrt{b^2-(a-y_1)^2}}$.

IX. Aus der Gleichung der Epicycloide oder Hypocycloide (§. 67. S. 1 u. 2)

$$\left\{\begin{array}{l} x = (r \pm a)\cos t \mp a\cos\frac{r \pm a}{a}t \\ y = (r \pm a)\sin t - a\sin\frac{r \pm a}{a}t \end{array}\right\}$$

ergeben sich

$$\frac{dx}{dt} = -(r \pm a)\sin t \pm (r \pm a)\sin\frac{r \pm a}{a}.t = \pm 2(r \pm a)\sin\frac{r}{2a}.t\cos\frac{r \pm 2a}{2a}.t,$$

$$\frac{dy}{dt} = (r \pm a)\cos t - (r \pm a)\cos\frac{r \pm a}{a}.t = 2(r \pm a)\sin\frac{r}{2a}.t\sin\frac{r \pm 2a}{2a}.t,$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = \pm tang\frac{r \pm 2a}{2a}t ,$$

und die Gleichung der Tangente

$$y - y_1 = \pm tang\left(\frac{r \pm 2a}{2a}.t_1\right)(x-x_1) .$$

Die Subtangente ist $= \frac{y_1}{\pm tang\frac{r \pm 2a}{2a}t_1}$.

In diesen Formeln gilt das obere Vorzeichen für die Epicycloide und das untere für die Hypocycloide.

Aufgabe [117]. Die Polarsubtangente, die Polarsubnormale und den Winkel, welchen der Radius vector mit der Tangente oder Nor-

§. 72. male bildet, an der Kreisevolvente, der archimedischen Spirale, der hyperbolischen Spirale, dem Lituus und der logarithmischen Spirale zu finden.

I. Aus der Gleichung der Kreisevolvente (§. 66. G. 2)

$$t = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} - arc\left(tang = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a}\right)$$

ergiebt sich durch Differentiation

$$\frac{dt}{du} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{au} .$$

Demnach ist die Polarsubtangente in einem Punkte, dessen Polarcoordinaten t_1, u_1 sind, $= \frac{u_1\sqrt{u_1^2 - a^2}}{a}$, die Polarsubnormale $= \frac{au_1}{\sqrt{u_1^2 - a^2}}$, und die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Normale mit dem Radius vector bildet, $= \frac{a}{\sqrt{u_1^2 - a^2}}$; daher ist der Sinus dieses Winkels $= \frac{a}{u_1}$, woraus sich schließen läßt, daß die Normale den Grundkreis der Kreisevolvente berührt.

II. Aus der Gleichung der archimedischen Spirale (§. 68. G. 1)

$$u = rt$$

folgt

$$\frac{du}{dt} = r .$$

Demnach ist die Polarsubtangente $= \frac{u_1^2}{r} = u_1 t_1 = r t_1^2$, die Polarsubnormale $= r$, die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Tangente mit dem Radius vector bildet, $= \frac{u_1}{r} = t_1$.

III. Aus der Gleichung der hyperbolischen Spirale (§. 68. G. 3)

$$ut = r\alpha$$

folgt

$$t\frac{du}{dt} + u = 0 .$$

Demnach die Polarsubtangente $= -u_1 t_1 = -r\alpha$, also für alle Punkte der

der Curve von conſtanter Größe, die Polarſubnormale $= -\frac{u_1}{t_1} = -\frac{u_1^2}{r\alpha}$, §. 72.
und die trigonometriſche Tangente des Winkels, welche die Tangente mit dem Radius vector bildet, $= -t_1$.

IV. Aus der Gleichung des Lituus (§. 68. G. 4)

$$u^2 t = r^2 \alpha$$

folgt

$$2ut\frac{du}{dt} + u^2 = 0 \quad \text{oder} \quad 2t\frac{du}{dt} + u = 0 .$$

Demnach die Polarſubtangente $= -2t_1 u_1 = -\frac{2\alpha r^2}{u_1}$, die Polarſubnormale $= -\frac{u_1}{2t_1} = -\frac{u_1^3}{2r^2\alpha}$, und die trigonometriſche Tangente des Winkels, welche die Tangente mit dem Radius vector macht, $= -2t_1$.

V. Aus der Gleichung der logarithmiſchen Spirale (§. 68. G. 5)

$$u = re^{\frac{t}{m}}$$

folgt

$$\frac{du}{dt} = \frac{r}{m}e^{\frac{t}{m}} = \frac{u}{m} .$$

Demnach iſt die Polarſubtangente $= mu_1$, die Polarſubnormale $= \frac{u_1}{m}$, und die trigonometriſche Tangente des Winkels, welchen die Tangente mit dem Radius vector bildet, $= m$. Dieſer Winkel iſt alſo für alle Punkte der Curve von derſelben Größe.

§. 73.

Wenn die Berührungslinie in einem gegebenen Punkte einer Curve geometriſch conſtruirt werden ſoll, ſo kann dies immer dadurch geſchehen, daß man die Subtangente oder Subnormale conſtruirt, und von dem Endpunkte dieſer Linien nach dem gegebenen Punkte eine Gerade zieht, welche ſodann die Tangente oder Normale iſt. In vielen Fällen iſt die Conſtruction der Subtangente oder Subnormale ſo einfach, daß dieſe Verzeichnungsart der Tangente ſo leicht iſt als man ſie nur wünſchen kann. Dies findet z. B. bei der logarithmiſchen Linie, der Kettenlinie, der archimediſchen und hyper-

§. 73. bolischen Spirale und dem Lituus Statt. Zuweilen ist es leichter, den Winkel zu construiren, den die Tangente oder Normale mit dem Radius vector bildet, wie dies bei der logarithmischen Spirale der Fall ist. Auch bei der Conchoide und Lemniscate findet Aehnliches Statt, was sich durch die Lösung der folgenden Aufgabe zeigen wird.

Aufgabe [118]. Es soll eine einfache Construction der Tangente oder Normale in einem gegebenen Punkte der Conchoide und Lemniscate gefunden werden.

I. Wir nehmen die Polargleichung der Conchoide (§. 60. S. 8)

$$u = \frac{b}{\sin t} + a$$

und differentiiren sie, wodurch wir $\frac{du}{dt} = -\frac{b \cos t}{\sin^2 t}$ als Ausdruck für die Polarsubnormale erhalten. Ehe wir von der einfachen Construction dieses Ausdrucks sprechen, wollen wir die Lage der Polar-Subnormale in Betrachtung ziehen. Wir bemerken zunächst, daß, aus der Gleichung $u = \frac{b}{\sin t} + a$, u für alle Werthe von t, welche zwischen 0 und π liegen, größer als $\frac{b}{\sin t}$, und für alle Werthe von t, welche zwischen π und 2π liegen, absolut genommen kleiner als $\frac{b}{\sin t}$ ist, wenn $a < b$; es drückt daher die genannte Gleichung, t von 0 bis π genommen, den Zweig BCD, und t von π bis 2π genommen, den Zweig B'C'D' der Curve aus. Ist nun c der Werth des Aus-

Fig. 37. drucks der Polarsubnormale $-\frac{b \cos t_1}{\sin^2 t_1}$ eines Punktes P des Zweiges BCD, so muß man, um den Werth desselben Ausdrucks der Polarsubnormale des Punktes P' zu finden, in welchem der Radius vector AP den Zweig B'C'D' schneidet, für t_1 überall $t_1 + \pi$ setzen, und dadurch wird man offenbar $-c$ erhalten. Für einen positiven Werth der Polarsubnormale macht aber diese Linie, nach dem, was wir zu Ende des §. 71. bemerkt haben, mit der Geraden, von welcher die t an gezählt sind, den Winkel gleich $t + \frac{1}{2}\pi$, und für einen negativen Werth bildet sie den Winkel $t - \frac{1}{2}\pi$. Wir haben also $t_1 + \frac{1}{2}\pi$ für t_1 und $t_1 + \pi - \frac{1}{2}\pi$, d. i. ebenfalls $t_1 + \frac{1}{2}\pi$ für $t_1 + \pi$ zu setzen, wenn c positiv, und wir haben $t_1 - \frac{1}{2}\pi$ für t_1 und $t_1 + \pi + \frac{1}{2}\pi = t_1 + \frac{1}{2}\pi$ für $t_1 + \pi$ zu setzen, wenn c negativ ist, um die Lage der Polarsubnormale

zu finden. Daraus folgt, daß die Polarsubnormalen zweier Punkte, denen §. 73.
zwei Winkel t_1 und $t_1 + \pi$ zugehören, und die also mit dem Anfangspunkte A auf einer Geraden liegen, dieselbe Lage und Größe haben.

Der Ausdruck $\frac{b \cos t}{\sin^2 t}$ kann nun auf folgende Weise construirt werden. Es schneide der Radius vector AP die Gerade GG' im Punkte γ. Man errichte auf GG' in γ eine Senkrechte; diese schneidet auf der Senkrechten, welche in A auf AP errichtet wird, die Polarsubnormale An ab. Zieht man noch Pn und P'n, so hat man die Normalen in den Punkten P und P'. Die Richtigkeit dieser Construction zu beweisen, kann dem Leser überlassen bleiben.

II. Wir nehmen die Polargleichung der Lemniscate (§. 62. S. 3)

$$u^2 = a^2 \cos 2t ,$$

woraus wir

$$u \frac{du}{dt} = -a^2 \sin 2t ,$$

und sodann

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dt} = -\frac{a^2 \sin 2t}{u^2} = -\tang 2t$$

ableiten. Da nun $\frac{1}{u} \frac{du}{dt}$ die trigonometrische Tangente des Winkels ist, welchen die Normale mit dem Radius vector bildet, so folgt aus dem vorigen Werthe dieses Ausdrucks, daß dieser Winkel doppelt so groß ist als der Winkel, den derselbe Radius vector mit der Abscissenachse macht. Um daher in einem Punkte P der Lemniscate eine Normale zu errichten, braucht Fig. 43.
man nur den Mittelpunkt C der Curve mit diesem Punkte P zu verbinden und an CP einen Winkel anzulegen, der doppelt so groß ist als der Winkel, den CP mit der Achse bildet. Der Schenkel jenes Winkels ist alsdann die Normale im Punkte P.

Aufgabe [119]. Die Tangente an der Cycloide und an der Epicycloide und Hypocycloide zu construiren.

I. Aus der Gleichung der Cycloide (§. 66. S. 4) ergiebt sich die

$$\text{Subnormale } QM = y \frac{dy}{dx} = \sqrt{2ay - y^2} . \qquad \text{Fig. 50.}$$

Diese Linie ist also, wie man leicht einsehen wird, der Ordinate PR des erzeu-

§. 73. genden Kreises gleich. Die Normale, welche immer die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Catheten die Ordinate an der Curve und die Subnormale sind, fällt also mit der Sehne PM des Kreises zusammen, auf welcher PT senkrecht ist. Demnach ist PT die Tangente der Cycloide im Punkte P. Hieraus ergiebt sich folgende Construction der Normale und Tangente im Punkte P.

Man ziehe in der Entfernung a eine der Geraden XX', auf welcher die Wälzung des Kreises geschieht, parallele Linie GG', nehme darauf einen Punkt O so an, daß OP = a, fälle OM senkrecht auf XX', nehme OT = OM = a und ziehe PM u. PT, so ist die erste dieser Linien die Normale und die zweite die Tangente im Punkte P.

Fig. 51. Auf ähnliche Weise läßt sich die Tangente in einem Punkte P' der gedehnten oder verkürzten Cycloide construiren. Denn da die Subnormale $Q'M = y\frac{dy}{dx} = \sqrt{b^2-(a-y)^2} = P'R$, so fällt die Normale mit der Geraden zusammen, welche von dem Punkte P' nach dem Punkte M, in dem der erzeugende Kreis die Abscissenachse berührt, gezogen ist.

II. Aus der Gleichung der Epicycloide (§. 67. S. 3)

$$\left\{\begin{array}{l} x = (r+a)\cos t - b\cos\frac{r+a}{a}t \\ y = (r+a)\sin t - b\sin\frac{r+a}{a}t \end{array}\right\}$$

ergiebt sich durch Differentiation

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r+a}{a}\left\{a\sin t - b\sin\frac{r+a}{a}t\right\},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{r+a}{a}\left\{a\cos t - b\cos\frac{r+a}{a}t\right\}.$$

Die Gleichung der Normale in einem Punkte P der Curve, dessen Coordinaten x_1, y_1 seyn mögen, ist

$$(y-y_1)\frac{dy_1}{dt_1} + (x-x_1)\frac{dx_1}{dt_1} = 0.$$

Fig. 52. Nennt man den Winkel, den der Radius CM mit der Abscissenachse bildet, t_1, und drückt, vermittelst der vorigen Gleichungen, x_1, y_1, $\frac{dx_1}{dt_1}$, $\frac{dy_1}{dt_1}$ durch t_1 aus, so verwandelt sich die so eben genannte Gleichung der Normale in

§. 73.

$$\left\{a\cos t_1 - b\cos\frac{r+a}{a}t_1\right\}\left\{y-(r+a)\sin t_1+b\sin\frac{r+a}{a}t_1\right\}$$
$$= \left\{a\sin t_1 - b\sin\frac{r+a}{a}t_1\right\}\left\{x-(r+a)\cos t_1+b\cos\frac{r+a}{a}t_1\right\}.$$

Nun ist leicht zu sehen, daß diese Gleichung befriedigt wird, wenn man

$$y = r\sin t_1 \quad \text{und} \quad x = r\cos t_1$$

setzt. Die Normale im Punkte P geht also durch den Punkt, dessen Coordinaten $r\sin t_1$ und $r\cos t_1$ sind, d. i. durch den Punkt M, es mag die Curve eine gemeine, gedehnte oder verkürzte Epicycloide oder Hypocycloide seyn. Und hieraus ergiebt sich folgende Construction der Tangente und Normale im Punkte P einer Epicycloide oder Hypocycloide.

Man beschreibe mit dem Radius $r+a$ (wo a negativ zu nehmen ist, wenn die Curve eine Hypocycloide ist) einen dem festen Grundkreise concentrischen Kreis und bestimme darauf einen Punkt O so, daß $OP = a$, ziehe die Gerade OC, welche den festen Kreis in M schneidet, ferner MP, und PS senkrecht auf MP; so ist MP die Normale und PS die Tangente im Punkte P. Auf ähnliche Weise können diese Linien an der gedehnten oder verkürzten Epicycloide und Hypocycloide construirt werden.

§. 74.

Aufgabe [120]. *Auf der Peripherie eines gegebenen Kreises ist irgend ein Punkt A zum Anfangspunkte oder Pol der Polarcoordinaten angenommen. Es soll der Ort des Endpunktes der Polarsubtangente gefunden werden.*

Nehmen wir zunächst den durch den Punkt A gehenden Durchmesser des gegebenen Kreises, dessen Radius r seyn mag, zur Abscissenachse und die Tangente in A zur Ordinatenachse, so ist die Gleichung des Kreises in rechtwinkligen Coordinaten

$$y^2+x^2+2rx = 0,$$

wenn wir nämlich die positive Seite der Abscissenachse außerhalb des Kreises liegend annehmen. Aus dieser Gleichung ergiebt sich die Polargleichung

$$u+2r\cos t = 0,$$

woraus

$$\frac{du}{dt} - 2r\sin t = 0,$$

und also

§. 74.

$$u^2\frac{dt}{du} = \frac{u^2}{2r\sin t} = \frac{2r\cos^2 t}{\sin t}.$$

Bezeichnen wir nun die Polarsubtangente, die wir als Radius vector der gesuchten Curve anzusehen haben, durch u', so ist

$$u' = \frac{2r\cos^2 t}{\sin t};$$

und bezeichnen wir den Winkel, welchen diese Polarsubtangente mit der Abscissenachse macht, durch t', so ist $t' = t - \frac{1}{2}\pi$, also $t = t' + \frac{1}{2}\pi$. Setzen wir diesen Werth von t in den Ausdruck für u', so kommt

$$u' = \frac{2r\sin^2 t'}{\cos t'} \quad \text{oder} \quad u'\cos t' = 2r\sin^2 t',$$

und transformiren wir diese Gleichung in rechtwinklige Coordinaten, so erhalten wir

$$x(y^2 + x^2) - 2ry^2 = 0$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, der mithin eine Cissoide ist (§. 59. S. 8).

Aufgabe [121]. Es soll der Ort des Endpunktes der Polarsubnormale an der Conchoide und an der Cardioide gefunden werden, unter der Voraussetzung, daß der Doppelpunkt dieser Curven, der an der erstern auch ein conjugirter seyn kann, zum Pol der Coordinaten angenommen ist.

I. Die Gleichung der Conchoide (§. 60. S. 8)

$$u = \frac{b}{\sin t} + a$$

giebt

$$\frac{du}{dt} = -\frac{b\cos t}{\sin^2 t}.$$

Bezeichnen wir die Polarsubnormale, die wir als Radius vector der gesuchten Curve anzusehen haben, durch u', so ist

$$u' = -\frac{b\cos t}{\sin^2 t};$$

und bezeichnen wir den Winkel, welchen diese Polarsubnormale mit der Geraden macht, von welcher die t an gezählt sind, durch t', so ist $t' = t + \frac{1}{2}\pi$, also $t = t' - \frac{1}{2}\pi$. Setzen wir diesen Werth von t in den Ausdruck von u', so kommt

$$u' + \frac{b\sin t'}{\cos^2 t'} = 0 \quad \text{oder} \quad u'\cos^2 t' + b\sin t' = 0,$$

und transformiren wir diese Gleichung in rechtwinklige Coordinaten, so erhalten wir §. 74.

$$x^2 + by = 0$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, der also eine Linie zweiten Grades und zwar eine Parabel ist. Diese Parabel liegt gänzlich auf der Seite der negativen Ordinaten und hat den Doppelpunkt der Conchoide zum Scheitel.

II. Die Gleichung der Cardioide (§. 61. S. 6)

$$u = 2r(1 + \cos t)$$

giebt

$$\frac{du}{dt} = -2r \sin t \ .$$

Bezeichnen wir die Polarsubnormale durch u' und den Winkel, welchen sie mit der Abscissenachse macht, durch t', so daß $t' = t + \frac{1}{2}\pi$, also $t = t' - \frac{1}{2}\pi$, so ergiebt sich

$$u' = 2r \cos t' \ ,$$

oder, indem wir zu rechtwinkligen Coordinaten übergehen,

$$y^2 + x^2 - 2rx = 0$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, der somit ein Kreis ist.

Hieraus ergiebt sich eine einfache Construction der Normale in einem Punkte P der Cardioide. Man ziehe nämlich den Radius vector AP, errichte auf ihn in A eine Senkrechte, welche den Kreis in einem Punkte N schneiden wird, verbinde N und P durch eine Gerade, so ist diese die Normale der Cardioide im Punkte P. Wir wollen nicht unbemerkt lassen, daß diese Construction auch aus derjenigen für die Normale an der Epicycloide (§. 73. Aufg. 119. II.) hätte hergeleitet werden können, indem die Cardioide eine Epicycloide ist, in welcher der erzeugende Kreis dem Grundkreise gleich ist (§. 67. S. 309.). Fig. 42.

Aufgabe [122]. Den Ort des Endpunktes der Polarsubnormale und Polarsubtangente an der archimedischen, hyperbolischen und logarithmischen Spirale und dem Lituus zu finden.

Es sey

$$u = at^n$$

die Gleichung einer Spirale. Alsdann ist

$$\frac{du}{dt} = ant^{n-1} \ ,$$

§. 74. und wenn wir die Polarſubnormale durch u', den Winkel aber, den ſie mit der Geraden, von welcher die t angerechnet ſind, macht, t' nennen, ſo daß $t = t' - \frac{1}{2}\pi$ iſt; ſo kommt

$$u' = an(t' - \tfrac{1}{2}\pi)^{n-1}$$

oder, wenn wir die t' von einer Geraden an zählen, die auf der vorher genannten ſenkrecht ſteht,

$$u' = ant'^{n-1} .$$

I. Für die archimediſche Spirale iſt $n = 1$; daher

$$u' = a ,$$

und alſo der Ort des Endpunktes der Polarſubnormale ein Kreis.

II. Für die hyperboliſche Spirale iſt $n = -1$; daher

$$u' = -at'^{-2} \quad \text{oder} \quad u't'^2 + a = 0 ,$$

und alſo der Ort des Endpunktes der Polarſubnormale wieder eine Spirale, die wir aber noch nicht betrachtet haben.

III. Für den Lituus iſt $n = -\frac{1}{2}$; daher

$$u' = \tfrac{1}{2}at'^{-\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad u'^2t' = \tfrac{1}{4}a^2 ,$$

und der Ort des Endpunktes der Polarſubnormale ebenfalls eine Spirale, die wir auch noch nicht betrachtet haben.

IV. Für die logarithmiſche Spirale iſt (§. 68. S. 5)

$$u = re^{\frac{t}{m}} ;$$

folglich

$$\frac{du}{dt} = \frac{r}{m}e^{\frac{t}{m}} ,$$

und daraus ergiebt ſich, wenn u' und t' dieſelben Bedeutungen wie oben haben,

$$u' = \frac{r}{m}e^{-\frac{\pi}{2m}} . e^{\frac{t'}{m}} .$$

Der Ort des Endpunktes der Polarſubnormale iſt daher auch eine logarithmiſche Spirale, und zwar iſt dieſe der gegebenen gleich, nur hat ſie eine andere Lage. Denn transformirt man die gefundene Gleichung, indem man $t' = t'' + \frac{1}{2}\pi + m\,log\,m$ ſetzt, ſo kommt

$$u' = \frac{r}{m} e^{-\frac{\pi}{2m}} \cdot e^{\frac{t''}{m} + \frac{\pi}{2m} + \frac{m \log m}{m}} = re^{\frac{t''}{m}},$$

was mit der zu Grunde gelegten Gleichung übereinstimmt.

Es sey wieder

$$u = at^n$$

die Gleichung einer Spirale, also

$$\frac{du}{dt} = nat^{n-1},$$

und

$$u^2 \frac{dt}{du} = \frac{a}{n} t^{n+1}.$$

Bezeichnen wir nun die Polarsubtangente durch u' und den Winkel, welchen sie mit der Geraden bildet, von welcher die t an gerechnet sind, durch t', so ist

$$u' = \frac{a}{n}(t' + \tfrac{1}{2}\pi)^{n+1},$$

oder, wenn wir die t' von einer Geraden an zählen, die auf der eben genannten senkrecht ist,

$$u' = \frac{a}{n} t'^{n+1}.$$

V. Für die archimedische Spirale ist $n = 1$; daher

$$u' = at'^2,$$

der Ort des Endpunktes der Polarsubtangente also wieder eine Spirale, die wir noch nicht betrachtet haben.

VI. Für die hyperbolische Spirale ist $n = -1$; daher

$$u' = -a,$$

und der Ort des Endpunktes des Polarsubtangente also ein Kreis.

VII. Für den Lituus ist $n = -\frac{1}{2}$; daher

$$u' = -2at'^{\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad u'^2 = 4a^2 t',$$

und der Ort des Endpunktes der Polarsubtangente ist also eine parabolische Spirale, die wir schon in §. 70. aus dem Lituus abgeleitet haben.

VIII. Für die logarithmische Spirale ist

$$u = re^{\frac{t}{m}},$$

§. 74. und daraus

$$u^2\frac{dt}{du} = mre^{\frac{t}{m}}.$$

Wir haben alſo

$$u' = mre^{\frac{\pi}{2m}}e^{\frac{t'}{m}},$$

und der Ort des Endpunktes der Polarſubtangente iſt alſo wieder eine logarithmiſche Spirale, die der gegebenen gleich iſt und nur eine andere Lage hat, was ſich zeigt, wenn man die gefundene Gleichung dadurch transformirt, daß man $t' = t''-\frac{1}{2}\pi-m\log m$ ſetzt.

§. 75.

Aufgabe [123]. *Die Gleichungen einer Curve und einer Geraden ſind gegeben. Man ſoll die Gleichung derjenigen Tangente an der Curve finden, welche der gegebenen Geraden parallel iſt.*

Es ſeyen

$$y = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = ax+b$$

die gegebenen, auf daſſelbe rechtwinklige oder ſchiefwinklige Coordinatenſyſtem bezogenen, Gleichungen der Curve und der Geraden.

Wäre der Berührungspunkt der geſuchten Tangente bekannt, ſo wäre die Gleichung der Tangente, wenn wir die Coordinaten des Berührungspunktes durch x_1, y_1 bezeichnen,

$$(y-y_1) = \frac{dy_1}{dx_1}(x-x_1). \qquad (1)$$

Da aber dieſe Tangente der gegebenen Geraden parallel ſeyn ſoll, ſo muß erſtlich

$$\frac{dy_1}{dx_1} = a \qquad (2)$$

ſeyn; und da der Berührungspunkt auch auf der gegebenen Curve liegt, muß ferner

$$y_1 = \varphi(x_1) \qquad (3)$$

ſeyn. Bezeichnen wir nun $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ durch $\varphi'(x)$, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$, und alſo, in Folge von (2),

$$\varphi'(x_1) = a. \qquad (4)$$

Die beiden Gleichungen (3) und (4) reichen hin, die beiden bis jetzt un-

bekannt gewesenen Größen x_1 und y_1 zu bestimmen. Setzt man nun, nach- §. 75.
dem diese Bestimmung geschehen ist, die gefundenen Werthe in die Gleichung (1), so hat man die verlangte Gleichung der Tangente.

Beispiel. Es sey die gegebene Curve eine Neilische Parabel, deren Gleichung (§. 58. S. 6)

$$ky^3 = x^5$$

ist. Man soll die Gleichung der Tangente finden, welche der gegebenen Geraden

$$y = ax + b$$

parallel ist.

Wir erhalten aus der Gleichung der Curve durch Differentiation

$$2ky\frac{dy}{dx} = 3x^2 ,$$

und also, weil $\frac{dy_1}{dx_1} = a$ seyn soll,

$$2kay_1 = 3x_1^2 .$$

Da ferner die Coordinaten x_1, y_1 die Gleichung der Curve befriedigen sollen,

$$ky_1^3 = x_1^5 .$$

Entwickeln wir aus diesen beiden letzten Gleichungen x_1 und y_1, so erhalten wir

$$x_1 = \tfrac{4}{5}a^2k \quad , \quad y_1 = \tfrac{8}{25}a^3k ,$$

und daraus die Gleichung der Tangente $y - y_1 = a(x - x_1)$ oder

$$y = ax - \tfrac{4}{25}a^3k .$$

Man sieht hieraus, daß, welches auch die Lage der gegebenen Geraden seyn mag, immer eine Tangente an der Neilischen Parabel gezogen werden kann, die dieser Geraden parallel läuft.

Ob und wie viele Tangenten an einer gegebenen Curve gezogen werden können, die einer gegebenen Geraden parallel sind, dies hängt von der Gestalt der Curve und von der respectiven Lage der Geraden ab. Ist diese Curve eine Linie nten Grades, deren Gleichung wir durch

$$U = 0$$

bezeichnen wollen, wo U eine rationale ganze Function von x u. y bedeutet, so haben wir in der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dU}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dU}{dx}\right) = 0$$

§. 75. für x und y respective x_1 u. y_1, und sodann a für $\frac{dy_1}{dx_1}$ zu setzen, wenn wir die Gleichung der gegebenen Geraden unter $y = ax+b$ darstellen. Wir haben also zur Bestimmung von x_1 und y_1 die beiden Gleichungen

$$U_1 = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dU_1}{dy_1}\right)a+\left(\frac{dU_1}{dx_1}\right) = 0 ,$$

von denen die erste, der jetzigen Voraussetzung zufolge, vom nten, und die zweite folglich vom (n—1)ten Grade ist. Hieraus ergiebt sich, daß im Allgemeinen n(n—1) Tangenten an eine Linie nten Grades gelegt werden können, die einer gegebenen Geraden parallel sind. In den besondern Fällen, in welchen die beiden so eben aufgestellten Gleichungen gleiche oder imaginäre Werthe für x_1 u. y_1 geben, sind weniger als n(n—1) oder gar keine solche Tangenten an der Curve möglich.

Aufgabe [124]. Die Gleichung einer Curve und die Coordinaten eines Punktes sind gegeben. Man soll die Gleichung der, durch diesen Punkt gehenden, Tangente der Curve finden.

Es sey $U = 0$ die gegebene Gleichung der Curve, wo U irgend eine algebraische oder transscendente Function von x und y bedeutet, und es seyen α, β die gegebenen Coordinaten irgend eines Punktes. Nennt man die noch unbekannten Coordinaten des Berührungspunktes der gesuchten Tangente x_1, y_1, so ist die Gleichung derselben

$$y-y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x-x_1) . \qquad (5)$$

Da nun diese Tangente durch den gegebenen Punkt $\alpha\beta$ gehen soll, so müssen diese Coordinaten die Gleichung befriedigen, so daß man hat

$$\beta-y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(\alpha-x_1) .$$

Aber in Folge der gegebenen Gleichung ist

$$\left(\frac{dU}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dU}{dx}\right) = 0 ;$$

demnach verwandelt sich jene Gleichung in

$$(\beta-y_1)\left(\frac{dU_1}{dy_1}\right)+(\alpha-x_1)\left(\frac{dU_1}{dx_1}\right) = 0 , \qquad (6)$$

indem die Coordinaten x_1, y_1 die Gleichung der Curve befriedigen müssen,

was wir durch

$$U_1 = 0 \qquad (7)$$

ausdrücken. Die beiden Gleichungen (6) und (7) reichen hin, die Größen x_1 und y_1 zu bestimmen, deren Werthe man in die Gleichung (5) zu setzen hat, um die verlangte Gleichung der Tangente zu erhalten. Da aber die Gleichung dieser Tangente, weil sie durch den Punkt $\alpha\beta$ geht, auch die Form

$$y-\beta = \frac{dy_1}{dx_1}(x-\alpha) \qquad (8)$$

haben wird, so braucht man nur die aus (6) und (7) erhaltenen Werthe von x_1 und y_1 in den Coefficienten der Gleichung (8) zu substituiren, was etwas einfacher ist.

Beispiel. Es sey die gegebene Curve wieder eine Neilische Parabel, deren Gleichung

$$U = ky^3 - x^3 = 0$$

ist, und der gegebene Punkt liege in der Abscissenachse, so daß seine Coordinaten $\beta = 0$ und $\alpha = \alpha$ seyen.

Da $\left(\frac{dU}{dy}\right) = 2ky$ und $\left(\frac{dU}{dx}\right) = -3x^2$ ist, so geben die Gleichungen (6) und (7)

$$2ky_1^2 + 3(\alpha - x_1)x_1^2 = 0 \quad ; \quad ky_1^2 - x_1^3 = 0 \,,$$

woraus

$$x_1 = 3\alpha \quad \text{und} \quad y_1 = \pm\frac{3\sqrt{3}\,\alpha^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{oder} \quad x_1 = 0 \quad \text{und} \quad y_1 = 0 \,,$$

und sodann

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{3x_1^2}{2ky_1} = \pm\frac{3\sqrt{3}\,\alpha^{\frac{1}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{oder} \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{3x_1^{\frac{1}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}} = 0 \,,$$

also die gesuchte Gleichung der Tangente

$$y = \pm\frac{3\sqrt{3}\,\alpha^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}}(x-\alpha), \quad \text{oder} \quad y = 0 \,.$$

Es lassen sich also durch jeden, auf der positiven Seite der Abscissenachse liegenden, Punkt drei Tangenten, durch einen auf der negativen Seite liegenden aber nur eine Tangente an die Curve ziehen. Die Construction der Tangenten durch einen, auf der positiven Seite der Achse liegenden, Punkt ist sehr einfach, da, wie aus der obigen Rechnung sich ergiebt, für zwei dieser Tangenten $x_1 = 3\alpha$, und also die Subtangente $= 2\alpha$ ist, die dritte Tangente aber mit der Abscissenachse zusammen fällt.

§. 75. Ob und wie viele Tangenten durch einen gegebenen Punkt an eine gegebene Curve gezogen werden können, dies hängt von der Gestalt der Curve und von der respectiven Lage des gegebenen Punktes ab.

Ist die Curve eine Linie nten Grades, also U eine rationale ganze Function nten Grades von x u. y, so sind $\left(\frac{dU}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dU}{dx}\right)$ Functionen $(n-1)$ten Grades. Die Functionen $\left(\frac{dU_1}{dy_1}\right)$ und $\left(\frac{dU_1}{dx_1}\right)$ sind nun zwar in der Gleichung (6) respective mit $\beta - y_1$ und $\alpha - x_1$ multiplicirt, und diese Gleichung steigt daher auf den nten Grad, indessen läßt sie sich immer vermittelst der Gleichung $U_1 = 0$ (7) auf den $(n-1)$ten Grad reduciren. Denn bezeichnen wir das Aggregat der Glieder nter Dimension in der Gleichung $U = 0$ durch

$$ay^n + bxy^{n-1} + cx^2y^{n-2} + fx^3y^{n-3} + \text{etc.},$$

so sind die Aggregate der Glieder $(n-1)$ter Dimension in $\left(\frac{dU_1}{dy_1}\right)$ und $\left(\frac{dU_1}{dx_1}\right)$ respective

$$nay_1^{n-1} + (n-1)bx_1y_1^{n-2} + (n-2)cx_1^2y_1^{n-3} + (n-3)fx_1^3y_1^{n-4} + \text{etc.};$$
$$by_1^{n-1} + 2cx_1y_1^{n-2} + 3fx_1^2y_1^{n-3} + \text{etc.}$$

Das Aggregat der Glieder nter Dimension in der Gleichung (6), welches, nachdem sie auf die Form

$$y_1\left(\frac{dU_1}{dy_1}\right) + x_1\left(\frac{dU_1}{dx_1}\right) = \beta\left(\frac{dU_1}{dy_1}\right) + \alpha\left(\frac{dU_1}{dx_1}\right)$$

gebracht ist, gänzlich in dem ersten Theile dieser Gleichung enthalten ist, heißt nun, wie man aus dem Gesagten findet,

$$nay_1^n + (n-1)bx_1y_1^{n-1} + (n-2)cx_1^2y_1^{n-2} + (n-3)fx_1^3y^{n-3} + \text{etc.}$$
$$+ bx_1y_1^{n-1} + 2cx_1^2y_1^{n-2} + 3fx_1^3y_1^{n-3} + \text{etc.},$$

oder wenn man die Glieder, welche gleiche Potenzen von x_1 u. y_1 enthalten, addirt

$$n\{ay_1^n + bx_1y_1^{n-1} + cx_1^2y_1^{n-2} + fx_1^3y_1^{n-3} + \text{etc.}\}.$$

Das Aggregat der Glieder nter Dimension der Gleichung (6) ist also das n-fache des Aggregats der Glieder nter Dimension in der Gleichung (7), und daher kann man das n-fache der Aggregate aller Glieder der folgenden

Dimenſionen dieſer Gleichung, mit umgekehrten Zeichen genommen, in die Gleichung (6) ſubſtituiren, wodurch ſie auf den (n—1)ten Grad reducirt wird. Wenn dies geſchehen iſt, ſo hat man zur Beſtimmung von x_1 und y_1 zwei Gleichungen, die reſpective vom (n—1)ten und nten Grade ſind. Hieraus folgt nun, daß durch einen gegebenen Punkt an eine gegebene Linie nten Grades nie mehr als n(n—1) Tangenten gelegt werden können. §. 75.

Aufgabe [125]. Die Gleichungen zweier Curven ſind gegeben. Es ſoll die Gleichung einer Geraden gefunden werden, welche dieſe beiden Curven berührt.

Es ſeyen

$$U = 0 \quad \text{und} \quad U' = 0$$

die auf dieſelben rechtwinkligen oder ſchiefwinkligen Achſen bezogenen Gleichungen der beiden Curven, deren Coordinaten reſpective x, y und x', y' heißen. Bezeichnen wir die noch unbekannten Coordinaten des Berührungspunkts der gemeinſchaftlichen Tangente mit der einen Curve durch x_1, y_1 und mit der andern durch x'_1, y'_1, ſo haben wir, weil dieſe Coordinaten die gegebenen Gleichungen befriedigen müſſen, erſtlich

$$U_1 = 0 \quad \text{und} \quad U'_1 = 0\,. \qquad (9)$$

Die Gleichung der geſuchten Geraden iſt nun, weil ſie beide Curven berühren ſoll, ſowohl unter der erſten als unter der zweiten der beiden folgenden Formen

$$\left(\frac{dU_1}{dy_1}\right)(y-y_1)+\left(\frac{dU_1}{dx_1}\right)(x-x_1)=0\;;\quad \left(\frac{dU'_1}{dy'_1}\right)(y-y'_1)+\left(\frac{dU'_1}{dx'_1}\right)(x-x'_1)=0$$

darzuſtellen. Durch das Identificiren dieſer beiden Gleichungen erhalten wir die beiden folgenden

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dU_1}{dx_1}\right)\left(\frac{dU'_1}{dy'_1}\right) &= \left(\frac{dU'_1}{dx'_1}\right)\left(\frac{dU_1}{dy_1}\right)\;;\\ (y_1-y'_1)\left(\frac{dU'_1}{dy'_1}\right)\left(\frac{dU_1}{dy_1}\right) &= x'_1\left(\frac{dU'_1}{dx'_1}\right)\left(\frac{dU_1}{dy_1}\right)-x_1\left(\frac{dU_1}{dx_1}\right)\left(\frac{dU'_1}{dy'_1}\right)\end{aligned}\right\}\,. \qquad (10)$$

Die vier Gleichungen (9) u. (10) reichen hin, die vier Größen x_1, y_1, x'_1 und y'_1 zu beſtimmen. Wenn auf dieſe Weiſe x_1 und y_1 oder x'_1 und y'_1 gefunden ſind, ſo ergiebt ſich die verlangte Gleichung der gemeinſchaftlichen Tangente durch Subſtitution der Werthe dieſer Größen in die allgemeine Gleichung der Tangente an der einen oder der andern Curve.

Wir dürfen nicht unbemerkt laſſen, daß ſich die zweite der beiden Glei-

§. 75. chungen (10) vermittelst der ersten auf

$$(y_1-y'_1)\left(\frac{dU_1}{dy_1}\right)+(x_1-x_1')\left(\frac{dU_1}{dx_1}\right)=0 \text{ od. } (y_1-y'_1)\left(\frac{dU'_1}{dy'_1}\right)+(x_1-x'_1)\left(\frac{dU'_1}{dx'_1}\right)=0$$

reducirt.

Beispiel. Es seyen

$$y^2-px=0 \quad \text{und} \quad ky^2+x^2=0$$

die auf dieselben Achsen bezogenen Gleichungen einer Parabel zweiten Grades und einer Neilischen Parabel, und es sollen die Gleichungen der, beiden Curven gemeinschaftlichen, Tangenten gefunden werden. Statt von den Gleichungen (9) und (10) Gebrauch zu machen, ist es hier viel einfacher, die Aufgabe von vorn herein zu lösen.

Die Auflösung der beiden Gleichungen giebt

$$y=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad y=k^{-\frac{1}{2}}(-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{p^{\frac{1}{2}}}{2x_1^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und} \quad \frac{dy'_1}{dx'_1}=-\frac{3(-x'_1)^{\frac{1}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}},$$

und daher sind die Gleichungen der Tangente

$$y=\frac{p^{\frac{1}{2}}}{2x_1^{\frac{1}{2}}}x+\frac{p^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{und} \quad y=-\frac{3(-x'_1)^{\frac{1}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}}x-\frac{(-x'_1)^{\frac{3}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}},$$

welche identisch seyn sollen. Daraus ergiebt sich

$$\frac{p^{\frac{1}{2}}}{2x_1^{\frac{1}{2}}}=-\frac{3(-x'_1)^{\frac{1}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und} \quad \frac{p^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}}{2}=-\frac{(-x'_1)^{\frac{3}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}},$$

oder

$$pk=-9x_1x'_1 \quad \text{und} \quad pkx_1=-x'^2_1,$$

und wir erhalten demnach

$$x_1=\pm\frac{p^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad x'_1=\mp\frac{p^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}.$$

Von diesen Werthen können aber nur diejenigen mit dem obern Vorzeichen genommen werden, weil die mit untern Vorzeichen, in die Gleichungen der Tangente substituirt, imaginäre Coefficienten hervorbringen. Führen wir die passende Substitution aus, so giebt die eine Form der vorher schon aufgestellten Gleichung der Tangente sowohl als die andere

$$y=\pm\sqrt[4]{\frac{27}{16}\cdot\frac{p}{k}}\cdot\left\{x+\sqrt[2]{\frac{pk}{27}}\right\},$$

und

und es sind also, unter der Voraussetzung, daß p und k von demselben Zeichen sind, zwei gemeinschaftliche Tangenten vorhanden. §. 75.

§. 76.

Aufgabe [126]. Ein Winkel von gegebener Größe bewegt sich dergestalt, daß von seinen beiden Schenkeln der eine fortwährend eine bestimmte Curve, und der andere fortwährend eine andere ebenfalls bestimmte Curve berührt. Bei dieser Bewegung beschreibt der Scheitel P des Winkels eine gewisse Curve. Es soll eine Construction der Tangente in einem Punkte P des erzeugten Ortes gefunden werden, unter der Voraussetzung, daß für diesen Punkt P die Lage der Schenkel des genannten Winkels und ihre Berührungspunkte mit den festen Curven, nicht aber diese Curven selbst, bekannt seyen.

Wir wollen die beiden festen Curven, welche von den Schenkeln des gegebenen Winkels berührt werden sollen, und den Ort des Scheitels P auf dieselben rechtwinkligen Coordinatenachsen bezogen uns vorstellen. Die Coordinaten jener beiden Curven wollen wir durch α, β und α', β', die des Ortes von P durch x, y und die trigonometrische Tangente des gegebenen Winkels durch a bezeichnen.

Wären die beiden Gleichungen

$$\beta = \varphi(\alpha) \quad \text{und} \quad \beta' = \psi(\alpha')$$

der beiden festen Curven bekannt, so würden, in den Gleichungen der Tangenten an diesen Curven

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x - \alpha)\,; \quad (1) \qquad \text{und} \qquad y - \beta' = \frac{d\beta'}{d\alpha'}(x - \alpha'), \quad (2)$$

β und $\frac{d\beta}{d\alpha}$, β' und $\frac{d\beta'}{d\alpha'}$ sich respective durch α, α' ausdrücken lassen; und sollen diese Tangenten die Schenkel des gegebenen Winkels seyn, so muß noch die Relation (§. 6. G. 2′)

$$\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{d\beta'}{d\alpha'} = a\left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right) \qquad (3)$$

Statt finden, in welcher $\frac{d\beta}{d\alpha}$ und $\frac{d\beta'}{d\alpha'}$ ebenfalls durch α und α' ausgedrückt werden könnten. Die drei zuletzt genannten Gleichungen würden alsdann, außer den veränderlichen Größen x, y, keine Unbekannten als α und α' enthalten, die man eliminiren und auf diese Weise eine Gleichung zwischen x

§. 76. und y erhalten könnte. Diese Gleichung würde den Ort des Durchschnittspunktes der beiden den gegebenen Winkel einschließenden Tangenten, d. i. den Ort des Punktes P, ausdrücken.

Aus den eben erwähnten drei Gleichungen könnte man aber auch jede drei von den vier Veränderlichen α, α', x u. y durch die vierte ausdrücken, und daraus folgt, daß jede drei dieser Größen als Functionen der vierten angesehen werden können. Wählen wir x als diese vierte und unabhängige Größe, so sind y, α und α' als Functionen von x zu betrachten.

Eliminiren wir $\frac{d\beta}{d\alpha}$ und $\frac{d\beta'}{d\alpha'}$ zwischen den genannten drei Gleichungen, so kommt

$$a\{(y-\beta)(y-\beta')+(x-\alpha)(x-\alpha')\}+(y-\beta')(x-\alpha)-(y-\beta)(x-\alpha')=0, \quad (4)$$

und differentiiren wir diese Gleichung, indem wir x als die einzige Unabhängige betrachten, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}&\{2ay-a(\beta+\beta')+\alpha'-\alpha\}\frac{dy}{dx}+\{2ax-a(\alpha+\alpha')+\beta-\beta'\}\\&+\left\{y-\beta-a(x-\alpha)-[x-\alpha+a(y-\beta)]\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right\}\frac{d\alpha'}{dx}\\&-\left\{y-\beta'+a(x-\alpha')+[a(y-\beta')-(x-\alpha')]\frac{d\beta}{d\alpha}\right\}\frac{d\alpha}{dx}\end{aligned}\right\}=0. \quad (5)$$

Aber in Folge der Gleichungen (1 u. 2) reduciren sich die Ausdrücke, welche $\frac{d\alpha'}{dx}$ und $\frac{d\alpha}{dx}$ multipliciren, auf

$$(x-\alpha)\left\{\frac{d\beta}{d\alpha}-a-\left[1+a\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right\},$$

$$-(x-\alpha')\left\{\frac{d\beta'}{d\alpha'}+a+\left[a\frac{d\beta'}{d\alpha'}-1\right]\frac{d\beta}{d\alpha}\right\}$$

und sind folglich, wie die Gleichung (3) zeigt, gleich Null. Die Gleichung (5) reducirt sich also auf

$$\{2ay-a(\beta+\beta')+\alpha'-\alpha\}\frac{dy}{dx}+\{2ax-a(\alpha+\alpha')+\beta-\beta'\}=0, \quad (6)$$

so daß wir $\frac{dy}{dx}$, d. i. die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die gesuchte Berührungslinie mit der Abscissenachse bildet, durch x, y, α, β, α', β' ausdrücken können. Da nun diese Größen die Coordinaten des Durchschnittspunktes P der beiden gegebenen Schenkel und der gegebenen Be-

rührungspunkte auf den festen Curven sind, so würde der sich ergebende Ausdruck zu einer Construction jenes Winkels führen. Die folgende Betrachtung führt indessen schneller zum Ziele. §. 76.

Wir bemerken zunächst, daß die Coordinaten x, y des Punktes P die Gleichung (4) befriedigen, und daß folglich der Punkt P in einer Curve liegt, die durch die Gleichung (4) ausgedrückt wird, wenn man α, β, α' und β' als constante Größen ansieht. Diese Curve ist aber, weil nach dem Aufheben der Parentheſen y^2 und x^2 denselben Coefficienten haben, und der Coefficient von xy gleich Null ist, ein Kreis, und dieser, den Punkt xy enthaltende, Kreis geht durch die Berührungspunkte $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$, weil, wie leicht zu sehen, diese Coordinaten die Gleichung befriedigen. Legen wir nun in dem Punkte P eine Berührungslinie an diesen Kreis, so haben wir zur Bestimmung der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen diese Berührungslinie mit der Abscissenachse macht, die Gleichung (4) nach x zu differentiiren, und dabei α, β, α', und β' als constant zu betrachten. Dadurch gelangen wir aber offenbar zu der Gleichung (6), und hieraus ergiebt sich, daß die Berührungslinie im Punkte P an dem, durch die Bewegung des Winkels erzeugten, Orte mit der Berührungslinie im Punkte P an dem, durch die drei Punkte P, $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ gelegten, Kreis zusammenfällt. Die verlangte Construction ist daher folgende. Man suche den Mittelpunkt desjenigen Kreises, welcher durch den Durchschnittspunkt P der gegebenen Schenkel und durch ihre Berührungspunkte mit den festen Curven geht, verbinde diesen Mittelpunkt mit dem Punkte P; so ist diese Verbindungslinie die Normale, und die Senkrechte darauf die Tangente im Punkte P an der erzeugten Curve.

Es ist klar, daß dieselbe Construction auch anwendbar ist, wenn die Schenkel des gegebenen Winkels nicht zwei verschiedene, sondern eine und dieselbe Curve berühren. Hierdurch ist also die Construction der Tangente an der, im §. 38. gefundenen Curve gegeben.

Wenn der gegebene Winkel ein rechter ist, so vereinfacht sich die Construction dahin, daß man die Verbindungslinie der Berührungspunkte auf den festen Curven nur zu halbiren und den Halbirungspunkt mit dem Punkte P zu verbinden braucht, um die Normale im Punkte P zu haben. Denn unter jener Voraussetzung ist der so eben genannte Halbirungspunkt der Mittelpunkt des vorher erwähnten Kreises.

Aufgabe [127]. In der Ebene zweier festen Curven bewegt sich

§. 76. ein Punkt P so, daß die Summe oder die Differenz der beiden Normalen, welche von diesem Punkte P an die beiden Curven gezogen werden können (die Längen der Normalen vom Punkte P bis zu den Punkten genommen, in welchen sie die Curven senkrecht schneiden), eine gegebene constante Größe habe. Es soll eine Construction der Tangente an der Curve, welche der Ort des Punktes P ist, gefunden werden, unter der Voraussetzung, daß für diese Tangente ein Punkt P dieses Ortes, und die Punkte, in welchen die, durch diesen Punkt an die festen Curven gezogenen, Normalen diese senkrecht schneiden, bekannt seyen, daß aber diese festen Curven nicht gegeben sind.

Wir bezeichnen die rechtwinkligen Coordinaten des Ortes von P durch x, y, die der festen Curven respective durch α, β und α', β', und benennen die Entfernungen des Punktes xy von den Punkten $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ mit v und v'. Die Gleichungen der beiden Normalen sind alsdann (§. 71. S. 8)

$$(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}+(x-\alpha)=0\,,\ (7)\quad\text{und}\quad (y-\beta')\frac{d\beta'}{d\alpha'}+(x-\alpha')=0\,.\ (8)$$

Ferner haben wir

$$v^2=(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2\,,\ (9)\quad\text{und}\quad v'^2=(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2\,,\ (10)$$

und außerdem

$$v+v'=\sigma \quad\text{oder}\quad v-v'=\delta\,,$$

wenn wir die gegebene Summe oder Differenz durch σ oder δ bezeichnen. Diese beiden letzten Gleichungen wollen wir in eine einzige zusammen fassen, und sie durch

$$F(v, v')=0 \qquad (11)$$

bezeichnen.

Wären die Gleichungen der beiden festen Curven, $\beta=\varphi(\alpha)$ und $\beta'=\psi(\alpha')$ bekannt, so könnten $\beta, \frac{d\beta}{d\alpha}, \beta'$ und $\frac{d\beta'}{d\alpha'}$, vermittelst derselben in α und α' ausgedrückt werden, und die fünf Gleichungen (7, 8, 9, 10 u. 11) würden alsdann durch die Elimination von α, α', v und v' zu der Gleichung des Ortes von P in x und y führen. Es können nun α, α', v, v' und y als Functionen von x angesehen werden, es können aber auch v und v' als Functionen von x, y, α u. α' und die drei letzten dieser Größen als Functionen von x betrachtet werden. Differentiiren wir die Gleichung (11) unter diesem Gesichtspunkte, indem wir für $F(v, v')$ der Kürze wegen F setzen, so kommt

§. 76.

$$\left\{\left(\frac{dF}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dv'}\right)\left(\frac{dv'}{dy}\right)\right\}\frac{dy}{dx}+\left\{\left(\frac{dF}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dv'}\right)\left(\frac{dv'}{dx}\right)\right\}$$
$$+\left(\frac{dF}{dv}\right)\left(\frac{dv}{d\alpha}\right)\frac{d\alpha}{dx}+\left(\frac{dF}{dv'}\right)\left(\frac{dv'}{d\alpha'}\right)\frac{d\alpha'}{dx}=0\,. \qquad (12)$$

Entwickeln wir aus den Gleichungen (9) und (10) die partiellen Differentialcoefficienten $\left(\frac{dv}{d\alpha}\right)$ und $\left(\frac{dv'}{d\alpha'}\right)$, so finden wir

$$\left(\frac{dv}{d\alpha}\right)=-\frac{1}{v}\left\{(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}+(x-\alpha)\right\}\;;\;\left(\frac{dv'}{d\alpha'}\right)=-\frac{1}{v'}\left\{(y-\beta')\frac{d\beta'}{d\alpha'}+(x-\alpha')\right\},$$

und sehen also, daß diese Differentialcoefficienten, in Folge der Gleichungen (7) u. (8), sich auf Null reduciren. Demnach reducirt sich die Gleichung (12) auf

$$\left\{\left(\frac{dF}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dv'}\right)\left(\frac{dv'}{dy}\right)\right\}\frac{dy}{dx}+\left\{\left(\frac{dF}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dv'}\right)\left(\frac{dv'}{dx}\right)\right\}=0\,. \qquad (13)$$

Jetzt könnten wir für F entweder $v+v'$ oder $v-v'$, und sodann für diese Ausdrücke, so wie für $\left(\frac{dv}{dy}\right)$, $\left(\frac{dv}{dx}\right)$, $\left(\frac{dv'}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dv'}{dx}\right)$ ihre, aus den Gleichungen (9) und (10) herzuleitenden, Werthe, in x, y, α, β, α' und β' ausgedrückt, substituiren, und alsdann eine Construction für den, aus der Gleichung (13) sich ergebenden Werth von $\frac{dy}{dx}$ aufsuchen. Wir gelangen aber durch die folgende Betrachtung schneller zum Ziele.

Stellen wir uns vor, daß α, β, α' und β' constante Größen bedeuten, und daß in die Gleichung (11) für v und v' die Ausdrücke (9) u. (10) substituirt sind; so enthält diese Gleichung (11) nur zwei Veränderliche nämlich x und y, und sie drückt, wie leicht einzusehen ist, diejenige Curve aus, welche der Durchschnittspunkt zweier, sich um die festen Punkte $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ drehenden, Geraden beschreibt, wenn die Längen v und v' dieser Geraden in der durch die Gleichung $F(v\,,\,v')=0$ angegebenen Relation stehen. Um die trigonometrische Tangente des Winkels zu finden, welche die Berührungslinie in einem Punkte P dieser Curve mit der Abscissenachse macht, müßten wir die Gleichung $F(v\,,\,v')=0$ nach x differentiiren, wobei denn α, β, α' u. β' als Constanten dieser Gleichung anzusehen wären. Dadurch würden wir aber offenbar zu der Gleichung (13) gelangen, und daraus ergiebt sich, daß die Berührungslinie in dem Punkte P an der eben

§. 76. genannten Curve mit der Berührungslinie in demſelben Punkte P an dem, durch die Bewegung der Normalen erzeugten Orte zuſammen fällt.

Wenn nun $F(v, v') = v + v' - \sigma$ iſt, ſo iſt für conſtante Werthe von $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ die eben genannte Curve eine Ellipſe, und wenn $F(v, v') = v - v' - \delta$ iſt, ſo iſt ſie eine Hyperbel; in beiden Fällen ſind aber die Punkte $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ die Brennpunkte der Curve (§. 33. Aufg. 51.). Da nun die Tangente und Normale in einem Punkte einer Ellipſe oder Hyperbel die Winkel halbiren, welche die, von den Brennpunkten nach dieſem Punkte gezogenen Geraden einſchließen, ſo ergiebt ſich folgende einfache Conſtruction.

Man halbire die Winkel, welche die beiden, von dem Punkte P durch die beiden gegebenen Punkte der feſten Curven gezogenen, Geraden bilden, durch zwei gerade Linien, ſo iſt die eine derſelben die Tangente, und die andere die Normale an dem Orte des Punktes P.

Es bedarf jetzt keiner weitern Auseinanderſetzung, wie die Conſtruction der Tangente oder Normale des Ortes von P gefunden werden kann, wenn die Längen der von P aus an den beiden feſten Curven gezogenen Normalen in einer andern Relation ſtehen, wenn z. B. $v^2 + v'^2 = \sigma^2$ oder $v^2 - v'^2 = \delta^2$ iſt.

§. 77.

Aufgabe [128]. *Unter allen Punkten einer gegebenen Curve denjenigen zu finden, welcher einer gegebenen Geraden am nächſten liegt oder von ihr am weiteſten entfernt iſt.*

Wir nehmen die gegebene Gerade zur Abſciſſenachſe rechtwinkliger Coordinaten. Stellen wir uns nun die gegebene Curve auf dieſes Coordinatenſyſtem bezogen, und durch die Gleichung

$$y = \varphi(x)$$

ausgedrückt vor, ſo iſt die Ordinate eines Punktes die Entfernung deſſelben von der gegebenen Geraden. Es muß alſo, der Aufgabe gemäß, die Ordinate des geſuchten Punktes ein Maximum oder Minimum ſeyn. Um das Maximum oder Minimum unter den Ordinaten zu finden, hat man nun, nach der bekannten Regel, $\frac{dy}{dx} = 0$ zu ſetzen, und aus dieſer Gleichung und der gegebenen $y = \varphi(x)$, x und y zu beſtimmen. Der Punkt, dem dieſe Coordinaten zugehören, wird dann der geraden Linie am nächſten liegen,

wenn dieselben Coordinaten dem zweiten Differentialcoefficienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ dasselbe Zeichen geben, welches y hat, und er wird am weitesten von ihr entfernt seyn, wenn sie diesem Differentialcoefficienten das entgegengesetzte Zeichen geben. Denn unter den Endpunkten der positiven Ordinaten ist der Endpunkt der kleinsten der der Abscissenachse am nächsten liegende, und der Endpunkt der größten der von ihr am weitesten entfernte; unter den Endpunkten der negativen Ordinaten ist aber der Endpunkt der größten der der Abscissenachse nächstgelegene und der Endpunkt der kleinsten der von ihr am weitesten entfernte. Wird aber der zweite Differentialcoefficient durch die Werthe der Coordinaten jenes Punktes auf Null reducirt, ohne daß dies mit dem dritten, $\frac{d^3y}{dx^3}$, der Fall ist, so ist jener Punkt weder ein nächster noch entferntester. Ueberhaupt ist dieser Punkt nur dann ein nächster oder am weitesten entfernter, wenn durch seine Coordinaten der erste, oder die drei ersten, oder die fünf ersten u. s. w. Differentialcoefficienten gleich Null werden, der vorderste unter den nicht verschwindenden Coefficienten also von einer geraden Ordnung ist. §. 77.

Hierbei ist noch zu bemerken, daß durch dieses Verfahren die Punkte, in welchen die Curve die gegebene Gerade (unsere Abscissenachse) schneidet, nicht gefunden werden; nicht etwa deshalb, weil diese Punkte gar keine Entfernung von dieser Geraden haben, sondern weil ihre Ordinaten nicht als Minima erscheinen. Ferner werden durch dieses Verfahren diejenigen Punkte, welche Spitzen der Curve bilden, gewöhnlich nicht gefunden, wenn sie auch der gegebenen Geraden am nächsten liegen oder von ihr am weitesten entfernt sind. Die Coordinaten solcher Punkte müssen besonders aufgesucht werden, was wir uns bald zur Aufgabe stellen werden, und wenn sie gefunden sind, läßt sich leicht beurtheilen, ob sie entfernteste oder nächste Punkte sind.

Da für alle der gegebenen Geraden nächst gelegene oder von ihr am weitesten entfernte Punkte $\frac{dy}{dx} = 0$ ist (wenn nämlich von den so eben erwähnten Durchschnittspunkten und ausgezeichneten Punkten abgesehen wird), so folgt, daß in diesen Punkten die Tangente an der Curve der gegebenen Geraden parallel ist. Dieser Satz darf aber nicht umgekehrt werden; denn es kann in einem Punkte einer Curve die Tangente einer gegebenen Geraden

§. 77. parallel seyn, ohne daß dieser Punkt ein nächstgelegener oder am weitesten entfernter ist.

Wenn die Polargleichung einer Curve eine einfachere Form hat, als ihre Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten, so kann man, um die der Abscissenachse oder Ordinatenachse nächstgelegenen oder am weitesten von ihr entfernten Punkte zu finden, sich dieser Polargleichung bedienen, indem man nämlich durch Differentiation des daraus sich ergebenden Ausdrucks von $u \sin t$ $(= y)$ oder von $u \cos t$ $(= x)$ untersucht, für welche Werthe von t dieser Ausdruck ein Maximum oder Minimum werde.

Beispiel I. Es sollen die Punkte der im §. 56. (Aufg. 90.) betrachteten paraboliſchen Linie gefunden werden, welche von der, zur Abscissenachse genommenen, Geraden am weitesten entfernt sind.

Differentiiren wir die Gleichung

$$20000y = x^4 - 251x^3 + 20170x^2 - 566400x + 3888000 ,$$

so kommt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{20000}\{4x^3 - 753x^2 + 40340x - 566400\} ;$$

und wenn wir $\frac{dy}{dx} = 0$, also

$$4x^3 - 753x^2 + 40340x - 566400 = 0$$

setzen, so finden wir für die Abscissen der gesuchten Punkte, als Wurzeln dieser Gleichung näherungsweise

$$+22{,}06 \quad ; \quad +61{,}03 \quad ; \quad +105{,}15 ,$$

und sodann, aus der Gleichung der Curve, für die Werthe der dazu gehörigen Ordinaten näherungsweise

$$-62{,}8 \quad ; \quad +63{,}2 \quad ; \quad -116{,}2 .$$

Die Punkte, denen diese Coordinaten zugehören, sind nicht nächstgelegene, sondern am weitesten von der Abscissenachse entfernte, was sich durch das Zeichen ergiebt, welches der zweite Differentialcoefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ für jene Abscissenwerthe erhält.

Fig. 30. Der erste dieser drei Punkte M ist der entfernteste im Bogen SMS', der zweite M' ist es im Bogen S'M'S'', und der dritte M'' ist der entfernteste im Bogen S''M''S'''. In den beiden übrigen Theilen der sich ins Unendliche erstreckenden Curve giebt es keinen am weitesten entfernten Punkt.

II. Es sollen die Punkte der Conchoide gefunden werden, welche von den in der Aufgabe 97. (§. 60.) zu Coordinatenachsen genommenen Geraden am entferntesten sind, oder ihnen am nächsten liegen. §. 77.

Wir nehmen die Polargleichung der Conchoide (§. 60. G. 8)

$$u = a + \frac{b}{\sin t},$$

als die einfachere, und erhalten daraus erstens

$$y = u \sin t = a \sin t + b.$$

Differentiiren wir nach t, so kommt

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(u \sin t)}{dt} = a \cos t;$$

und setzen wir diesen Differentialcoefficienten gleich Null, so erhalten wir $\cos t = 0$, also $t = \frac{1}{2}\pi$ oder $t = \frac{3}{2}\pi$, folglich $\sin t = +1$ oder $\sin t = -1$, und somit sind

$$\left\{\begin{matrix} t = 0 \\ u = a+b \end{matrix}\right\} \text{ und } \left\{\begin{matrix} t = \pi \\ u = a-b \end{matrix}\right\}$$

die Polarcoordinaten zweier Punkte der Curve, welche der Abscissenachse am nächsten liegen oder am weitesten von ihr entfernt sind. Wir erhalten aber durch eine nochmalige Differentiation

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2(u \sin t)}{dt^2} = -a \sin t,$$

einen Ausdruck, der für $t = \frac{1}{2}\pi$ auf $-a$, und für $t = \frac{3}{2}\pi$ auf $+a$ sich reducirt. Da nun, für $t = \frac{1}{2}\pi$, $x = 0$ u. $y = u$ und, für $t = \frac{3}{2}\pi$, $x = 0$ u. $y = -u$ ist, so haben wir als zusammen gehörige Werthe

$$\text{erstens} \quad x = 0 \; ; \; y = a+b \; ; \; \frac{dy}{dt} = 0 \; ; \; \frac{d^2y}{dt^2} = -a,$$

$$\text{zweitens} \quad x = 0 \; ; \; y = b-a \; ; \; \frac{dy}{dt} = 0 \; ; \; \frac{d^2y}{dt^2} = +a;$$

und es sind also y und $\frac{d^2y}{dt^2}$ von entgegengesetztem Zeichen, wenn $x = 0$ u. $y = a+b$, und von demselben oder von entgegengesetztem Zeichen, wenn $x = 0$ und $y = b-a$, je nachdem $b > a$ oder $b < a$ ist. Derjenige Punkt der Ordinatenachse, dessen Ordinate gleich $a+b$, ist also der von der Abscissenachse am entferntesten liegende Punkt des einen Zweiges; und derjenige Punkt, dessen Ordinate gleich $b-a$, ist der dieser Achse

§. 77. nächſtgelegene des andern Zweiges, wenn $b > a$, und der entfernteſte des auf der Seite der negativen Ordinaten liegenden Bogens dieſes andern Zweiges, wenn $b < a$ iſt.

Wir erhalten zweitens aus der obigen Polargleichung

$$x = u\cos t = a\cos t + b\frac{\cos t}{\sin t},$$

und durch Differentiation

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(u\cos t)}{dt} = -\frac{a\sin^3 t + b}{\sin^2 t},$$

und, wenn wir dieſen Ausdruck gleich Null ſetzen,

$$\sin t = -\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}.$$

Es wird alſo nur wenn $b \leqq a$ iſt ein Maximum oder Minimum exiſtiren können, weil für $b > a$, $\sin t > 1$, alſo t imaginär wird. Ferner erhalten wir

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2(u\cos t)}{dt^2} = \frac{(2b - a\sin^3 t)\cos t}{\sin^3 t};$$

und wenn wir in $y = u\sin t$; $x = u\cos t$; $u = a + \frac{b}{\sin t}$ und in den Ausdrücken von $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{d^2x}{dt^2}$ für $\sin t$ den Werth $-\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$, und alſo auch für $\cos t$ den Werth $\pm\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}}{a^{\frac{1}{3}}}$ ſetzen, ſo ergeben ſich als zuſammengehörige Werthe

erſtens $x = +(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$; $y = -b^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})$;

$\frac{dx}{dt} = 0$; $\frac{d^2x}{dt^2} = -3a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$,

zweitens $x = -(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$; $y = -b^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})$;

$\frac{dx}{dt} = 0$; $\frac{d^2x}{dt^2} = +3a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$.

Die beiden Punkte, deren Coordinaten hierdurch gegeben ſind, werden, wenn $a > b$, die von der Ordinatenachſe entfernteſten des zweiten Zweiges der Curve ſeyn, in demjenigen Theile deſſelben, welcher eine Schleife bildet. Wenn $a = b$ iſt, ſo fallen ſie in den Anfangspunkt der Coordinaten, aber alsdann iſt $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$.

III. Es sollen die Punkte der Lemniscate gefunden werden, welche von den in der Aufgabe 99. (§. 62.) zur Abscissenachse genommenen Geraden am entferntesten sind. §. 77.

Wir nehmen die Polargleichung der Lemniscate (§. 62. G. 3)

$$u = \pm a \cos^{\frac{1}{2}} 2t ,$$

woraus wir

$$y = u \sin t = \pm a \cos^{\frac{1}{2}} 2t \sin t$$

und

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(u \sin t)}{dt} = \pm a . \frac{\cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t}{\cos^{\frac{1}{2}} 2t} = \pm a . \frac{\cos 3t}{\cos^{\frac{1}{2}} 2t}$$

erhalten. Setzen wir diesen Differentialcoefficienten gleich Null, so kommt $\cos 3t = 0$, also $3t = \frac{1}{2}\pi$, oder $\frac{3}{2}\pi$, oder $\frac{5}{2}\pi$, oder $\frac{7}{2}\pi$, oder etc.; folglich $2t = \frac{1}{3}\pi$, oder π, oder $\frac{5}{3}\pi$, oder $\frac{7}{3}\pi$, oder etc. Es wird aber, in Folge der Gleichung der Curve, u für den 2ten, 5ten u. s. w. Werth von 2t imaginär; daher kann man nur $2t = \frac{1}{3}\pi$, oder $\frac{5}{3}\pi$, oder $\frac{7}{3}\pi$, oder etc. setzen, und daraus findet man folgende vier Paar Coordinatenwerthe

$$\left\{\begin{matrix} x = +a\sqrt{\frac{3}{8}} \\ y = +a\sqrt{\frac{1}{8}} \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} x = -a\sqrt{\frac{3}{8}} \\ y = +a\sqrt{\frac{1}{8}} \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} x = -a\sqrt{\frac{3}{8}} \\ y = -a\sqrt{\frac{1}{8}} \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} x = +a\sqrt{\frac{3}{8}} \\ y = -a\sqrt{\frac{1}{8}} \end{matrix}\right\}$$

und die Punkte, welche diese Coordinaten haben, sind am entferntesten von der Abscissenachse, wovon man sich durch Aufsuchung des zweiten Differentialcoefficienten überzeugen könnte, wenn dies, nach der Untersuchung der Gleichung in §. 62. (Aufg. 99.), noch nöthig wäre. Wir bemerken noch, Fig. 43.
daß diese vier Punkte in einem Kreise liegen, der der Lemniscate concentrisch ist, und dessen Radius die Länge $a\sqrt{\frac{1}{2}}$ hat (vergl. §. 62. Aufg. 101.).

IV. Es soll der Punkt der Kettenlinie gefunden werden, welcher der zur Abscissenachse genommenen Geraden am nächsten liegt, wenn die Gleichung dieser Curve (§. 64. G. 5) die Form

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

hat.

Es ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)$; und wenn wir diesen Ausdruck gleich Null setzen, so erhalten wir

$$e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}} = 0 \quad \text{oder} \quad e^{\frac{2x}{m}} - 1 = 0 ,$$

§. 77. woraus sich $x = 0$, und sodann $y = m$ ergiebt. Da, für diesen Werth von x, der Differentialcoefficient $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2m}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$ sich auf $\frac{1}{m}$ reducirt, und also mit dem Werthe von y dasselbe Zeichen hat, so ist der Punkt, dessen Coordinaten $x = 0$ und $y = m$ sind, der der Abscissenachse am nächsten liegende.

§. 78.

Aufgabe [129]. Unter allen Punkten einer gegebenen Curve diejenigen zu finden, deren Entfernung von einem ebenfalls gegebenen Punkte ein Maximum oder Minimum ist.

Es sey $y = \varphi(x)$ die Gleichung der gegebenen Curve, und es seyen α, β die Coordinaten des gegebenen Punktes in Beziehung auf ein rechtwinkliges oder schiefwinkliges Coordinatensystem. Die Entfernung v eines Punktes xy der Curve von dem gegebenen Punkte $\alpha\beta$ wird nun durch

$$v = \sqrt{\{(y-\beta)^2 + 2(y-\beta)(x-\alpha)\cos\alpha' + (x-\alpha)^2\}}$$

ausgedrückt, wo α' den Coordinatenwinkel bedeutet (§. 2. F. 4.). Soll nun v ein Maximum oder Minimum seyn, so muß

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\{(y-\beta) + (x-\alpha)\cos\alpha'\}\frac{dy}{dx} + (y-\beta)\cos\alpha' + (x-\alpha)}{\sqrt{\{(y-\beta)^2 + 2(y-\beta)(x-\alpha)\cos\alpha' + (x-\alpha)^2\}}} = 0,$$

oder also

$$\{(y-\beta) + (x-\alpha)\cos\alpha'\}\frac{dy}{dx} + (y-\beta)\cos\alpha' + (x-\alpha) = 0 \quad (1)$$

seyn. Bestimmt man aus dieser letzten Gleichung und aus der Gleichung der Curve, $y = \varphi(x)$, die Werthe von x und y, so hat man die Coordinaten des Punktes, dessen Entfernung v von dem gegebenen Punkte $\alpha\beta$ ein Maximum oder Minimum ist, wenn nicht etwa für diese Coordinaten $\frac{d^2v}{dx^2}$, oder überhaupt eine ungerade Anzahl nächst folgender Differential-Coefficienten, gleich Null ist.

Setzt man in der Gleichung (7) (§. 71.) der Normale im Punkte x_1y_1 für x und y die Werthe α und β, und läßt die Indices von x_1 und y_1 weg, so erhält man die so eben gefundene Gleichung (1). Daraus folgt, daß die Gerade, welche den gegebenen Punkt mit demjenigen Punkte der

Curve verbindet, deſſen Entfernung von jenem ein Maximum oder Minimum iſt, eine Normale an der Curve ſey. §. 78.

Zu demſelben Reſultate gelangt man noch leichter, wenn man die Curve auf Polarcoordinaten bezieht, deren Pol in dem gegebenen Punkte liegt. Es iſt nämlich alsdann die Entfernung eines Punktes der Curve von dem Pole ein Maximum oder Minimum, wenn der Radius vector u dieſes Punktes ein Maximum oder Minimum iſt. Für den geſuchten Punkt muß daher

$$\frac{du}{dt} = 0 ,$$

alſo die Polarſubnormale gleich Null ſeyn, und folglich muß die Normale dieſes Punktes durch den Pol, d. i. durch den gegebenen Punkt, gehen.

Aufgabe [130]. Es ſind zwei Curven gegeben; man ſoll diejenigen Punkte derſelben finden, deren Entfernung ein Maximum oder Minimum iſt.

Es ſeyen die Gleichungen der beiden Curven auf daſſelbe rechtwinklige Coordinatenſyſtem bezogen, und die Coordinaten der einen durch x, y, die der andern aber durch x', y' bezeichnet. Die Entfernung v irgend zweier Punkte in beiden Curven wird alsdann durch

$$v = \sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}$$

ausgedrückt, und in dieſem Ausdrucke ſind y und y', in Folge der Gleichungen der gegebenen Curven als bekannte Functionen reſpective von x und von x', dieſe letztern Größen, x und x', aber als unabhängige Veränderliche zu betrachten. Damit alſo v ein Maximum oder Minimum ſeyn könne, muß nach der bekannten Regel $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ ſowohl als $\left(\frac{dv}{dx'}\right)$ gleich Null ſeyn. Entwickelt man dieſe partiellen Differentialcoefficienten und ſetzt ihre Zähler gleich Null, ſo ergiebt ſich

$$(y-y')\frac{dy}{dx}+(x-x') = 0 \quad ; \quad (y-y')\frac{dy'}{dx'}+(x-x') = 0 . \quad (2)$$

Dieſe beiden Gleichungen in Verbindung mit den beiden Gleichungen der gegebenen Curven reichen hin, die vier Größen x, x', y u. y' zu beſtimmen. Nachdem dieſe Beſtimmung geſchehen iſt, muß nach den bekannten Regeln unterſucht werden, ob die gefundenen Werthe die Entfernung v wirklich zu einem Maximum oder Minimum machen.

Wenn man in der erſten Gleichung (2) x u. y als conſtante Größen,

§. 78. x' u. y' aber als laufende Coordinaten anſieht, ſo drückt dieſe Gleichung die Normale im Punkte xy der erſten Curve aus (§. 71. S. 8), und da ſie von den zu ſuchenden Werthen von x' und y' befriedigt werden muß, ſo liegt der Punkt $x'y'$ in der Normale des Punktes xy der erſten Curve. Auf dieſelbe Weiſe ergiebt ſich aus der zweiten Gleichung (2), daß der Punkt xy in der Normale des Punktes $x'y'$ der zweiten Curve liege. Die geſuchten Punkte liegen alſo in einer Geraden, welche eine gemeinſchaftliche Normale beider Curven iſt.

Es iſt einleuchtend, daß dieſelbe Beziehung zwiſchen den Punkten, deren Entfernung ein Maximum oder Minimum iſt, auch Statt finden muß, wenn dieſe Punkte nicht in zwei verſchiedenen, ſondern in einer und derſelben Curve liegen. So iſt z. B. die größte Sehne einer Ellipſe ihre größere Achſe, welche zugleich die Normale in beiden Scheiteln der Curve iſt.

Aufgabe [131]. *Es ſind zwei Curven und die Richtung einer Geraden gegeben; man ſoll diejenigen Punkte derſelben finden, deren Verbindungslinie der gegebenen Richtung parallel, und deren Entfernung ein Maximum oder Minimum iſt.*

Es ſeyen die Gleichungen der beiden gegebenen Curven auf daſſelbe rechtwinklige oder ſchiefwinklige Coordinatenſyſtem bezogen, deſſen Ordinatenachſe der gegebenen Richtung parallel ſey. Wir bezeichnen die Coordinaten der einen Curve durch x, y, die der andern durch x', y'. Da nun die geſuchten Punkte in einer, der gegebenen Richtung parallelen, Geraden liegen ſollen, und die Ordinaten beider Curven dieſer Richtung parallel ſind, ſo müſſen die beiden geſuchten Punkte dieſelbe Abſciſſe haben, und ihre Entfernung v iſt dem Unterſchiede ihrer beiden Ordinaten gleich. Wir haben daher

$$v = y - y' \quad \text{und} \quad x = x',$$

ſo daß alſo von den beiden Functionalgrößen x und x' nur *eine* als unabhängige Veränderliche anzuſehen iſt. Aus dieſen beiden Gleichungen erhalten wir nun ferner

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}\frac{dx'}{dx} \quad ; \quad 1 = \frac{dx'}{dx},$$

und, durch Elimination von $\frac{dx'}{dx}$,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'};$$

folglich, für das Maximum oder Minimum von v, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}$. Da nun

$\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy'}{dx'}$ die Neigungen der Tangenten in den Punkten xy und x'y' der beiden Curven gegen die gemeinschaftliche Abscissenachse bestimmen, so erhalten wir als Lösung der Aufgabe die Beziehung zwischen den gesuchten Punkten, daß sie eine und dieselbe Abscisse und parallele Tangenten haben. §. 78.

Dieselbe Beziehung findet auch Statt, wenn beide Punkte in einer und derselben Curve liegen sollen. So ist z. B. die größte einer gegebenen Richtung parallele Sehne in einer Ellipse der dieser Richtung parallele Durchmesser, und die Tangenten in den Endpunkten dieses Durchmessers sind seinem conjugirten also auch einander parallel.

Aufgabe [132]. Es sind zwei Curven und irgend ein Punkt in ihrer gemeinschaftlichen Ebene gegeben; man soll diejenigen Punkte dieser Curven finden, deren Verbindungslinie durch diesen Punkt geht, und deren Entfernung ein Maximum oder Minimum ist.

Wir beziehen die beiden gegebenen Curven auf dasselbe Polar-Coordinaten-System, indem wir den gegebenen Punkt zum Pol annehmen, und bezeichnen ihre Coordinaten respective durch t, u und durch t', u'. Da nun die beiden gesuchten Punkte mit dem gegebenen in gerader Linie liegen sollen, so müssen die beiden Leitstrahlen in eine Richtung fallen, und die Entfernung v dieser Punkte ist alsdann dem Unterschiede ihrer Leitstrahlen gleich. Wir haben daher

$$v = u - u' \quad \text{und} \quad t = t',$$

und erhalten daraus

$$\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt} - \frac{du'}{dt'}\frac{dt'}{dt} \quad ; \quad 1 = \frac{dt'}{dt};$$

folglich, durch Elimination von $\frac{dt'}{dt}$,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt} - \frac{du'}{dt'}.$$

Da nun v ein Maximum oder Minimum seyn soll, so muß $\frac{dv}{dt} = 0$, also $\frac{du}{dt} = \frac{du'}{dt'}$ seyn, d. i. es müssen die Polarsubnormalen der beiden Punkte einander gleich seyn. Da ferner die Leitstrahlen u und u' in einer und derselben Richtung liegen, so werden auch die Polarsubnormalen in eine Richtung fallen, deren Endpunkte also auf einander liegen werden. Wir können

§. 78. die eben gefundene Beziehung der beiden Punkte, welche die Lösung der Aufgabe ausmacht, wie folgt ausdrücken. Die Punkte zweier gegebenen Curven, deren durch einen gegebenen Punkt gehende Verbindungslinie ein Maximum oder Minimum ist, sind so gelegen, daß die Gerade, welche von dem gegebenen Punkte nach dem Durchschnitte der Normalen in jenen Punkten der Curven gezogen wird, auf jener größten oder kleinsten Verbindungslinie senkrecht steht.

Wir haben oben gesagt, daß beide Leitstrahlen nach einer Richtung fallen, und dies ist auch in dem Falle anzunehmen, in welchem der gegebene Punkt zwischen den beiden gesuchten liegen müßte. Dann wäre der eine Radius vector positiv und der andere negativ, und beide machten mit der Geraden, von welcher die t und t' angerechnet sind, denselben Winkel. Da indessen der andere Radius vector auch positiv und $t' = t + \pi$ seyn könnte, so dürfte vielleicht ein Zweifel entstehen, ob unsere Lösung allgemein gültig sey. Um diesem zu begegnen, wollen wir den eben erwähnten Fall besonders betrachten. Da die Leitstrahlen jetzt nach entgegengesetzter Richtung liegen, so ist nicht mehr $v = u - u'$, sondern

$$v = u + u' \quad \text{und} \quad t = t' + \pi ,$$

woraus

$$\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{du'}{dt'}\,\frac{dt'}{dt} \quad ; \quad 1 = \frac{dt'}{dt} ,$$

also

$$\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{du'}{dt'} ,$$

und für das Maximum oder Minimum von v, $\frac{du}{dt} = -\frac{du'}{dt'}$, d. i. die Polarsubnormalen der gesuchten Punkte sind einander gleich aber entgegengesetzt. Bezeichnen wir den Winkel, der zu irgend einem Radius vector gehört, durch τ, denjenigen aber, den die Polarsubnormale mit derselben Achse bildet, durch ϑ_1 oder ϑ_2, je nachdem diese Polarsubnormale positiv oder negativ ist, so haben wir, zufolge dessen, was in §. 71. bemerkt worden, $\vartheta_1 = \tau + \frac{1}{2}\pi$; $\vartheta_2 = \tau - \frac{1}{2}\pi$. Setzt man nun erstens in ϑ_1 den Werth t und in ϑ_2 den Werth t' für τ, zweitens in ϑ_1 den Werth t' und in ϑ_2 den Werth t, so kommt

$$\begin{aligned} &\text{erstens} \quad \vartheta_1 = t + \tfrac{1}{2}\pi \quad ; \quad \vartheta_2 = t' - \tfrac{1}{2}\pi , \\ &\text{zweitens} \quad \vartheta_1 = t' + \tfrac{1}{2}\pi \quad ; \quad \vartheta_2 = t - \tfrac{1}{2}\pi , \end{aligned}$$

und wenn man überall, in Folge der obigen Gleichung, $t' + \pi$ für t substituirt

er-

§. 78.

erſtens $\vartheta_1 = t' + \frac{3}{2}\pi$; $\vartheta_2 = t' - \frac{1}{2}\pi$,
zweitens $\vartheta_1 = t' + \frac{1}{2}\pi$; $\vartheta_2 = t' + \frac{1}{2}\pi$.

Es machen daher die beiden Polarſubnormalen entweder einen Winkel gleich 2π oder gleich 0; ſie liegen alſo in jedem Falle auf einander.

Wir wollen jetzt die Löſung der Aufgabe an einem Beiſpiele zeigen.

Beiſpiel. Es ſeyen zwei Gerade und ein Punkt gegeben. Man ſoll diejenige Linie finden, welche durch den gegebenen Punkt geht und von den gegebenen Linien ſo geſchnitten wird, daß das zwiſchen ihnen enthaltene Stück ein Minimum ſey.

Wir nehmen die gegebenen Geraden zu Coordinatenachſen und in Beziehung auf dieſe ſeyen a, b die Coordinaten des gegebenen Punktes. Bezeichnen wir den Coordinatenwinkel durch α und die Stücke, welche die geſuchte Gerade auf den Achſen abſchneidet, durch x und y, ſo iſt die Länge v des zwiſchen den Achſen enthaltenen Stückes dieſer Geraden

$$v = \sqrt{y^2 - 2xy\cos\alpha + x^2} .$$

Die Gleichung derſelben Geraden aber iſt, wenn wir ihre laufenden Coordinaten durch x', y' bezeichnen (§. 4. S. 14),

$$\frac{y'}{y} + \frac{x'}{x} = 1 ;$$

und da ſie durch den Punkt ab gehen ſoll, ſo haben wir

$$\frac{b}{y} + \frac{a}{x} = 1 .$$

Setzen wir den Werth von y aus dieſer Gleichung in den Ausdruck von v, ſo ergiebt ſich

$$v = \sqrt{(x-a)^2 - 2b(x-a)\cos\alpha + b^2} \cdot \frac{x}{x-a} ,$$

und wenn wir $\frac{dv}{dx} = 0$ ſetzen, ſo kommt

$$(x-a)^3 - b(x-a)^2\cos\alpha + ab(x-a)\cos\alpha - ab^2 = 0 .$$

Aus dieſer Gleichung hat man x zu beſtimmen, deſſen Länge auf der zur Abſciſſenachſe genommenen Geraden abgeſchnitten werden muß. Verbindet man den Endpunkt dieſes Abſchnitts mit dem gegebenen Punkte, ſo hat man die verlangte Gerade.

Man kann aber auch folgendermaßen zu der geſuchten Geraden gelangen. Der Ort des Endpunktes der Polarſubnormale einer Geraden iſt

§. 78. eine Parabel, deren Scheitel in dem zum Pol genommenen Punkte liegt, deren Achse auf der Geraden senkrecht steht, und deren Parameter dem Abstande des Pols von der Geraden gleich ist, was sich aus einer Rechnung ergiebt, die der in §. 74. (Aufg. 121.) für die Conchoide angestellten, gleich ist. Construiren wir also die beiden Parabeln, welche die Oerter des Endpunktes der Polarsubnormale an beiden Geraden sind, indem wir den gegebenen Punkt als Pol annehmen, so werden sie einen gemeinschaftlichen Scheitel und außerdem noch drei oder einen Durchschnittspunkt haben. Es erhellet nun aus dem, was in der allgemeinen Lösung der Aufgabe sich ergeben hat, daß wir jetzt von einem Durchschnittspunkte der Parabeln nur Senkrechte auf die gegebenen Geraden zu fällen brauchen, so wird die Verbindungslinie der Fußpunkte dieser Senkrechten durch den gegebenen Punkt gehen und die verlangte kürzeste Linie seyn.

Es ist fast überflüssig, die Uebereinstimmung des Resultats dieser Construction mit dem vorher Gefundenen nachzuweisen. Für den Fall, daß die gegebenen Geraden sich senkrecht schneiden, kann dies indessen so leicht geschehen, daß wir dabei einen Augenblick verweilen wollen. Die Gleichungen der beiden zu construirenden Parabeln sind nämlich in diesem Falle, wenn die gegebenen Geraden zu Coordinatenachsen genommen werden,

$$(y-b)^2 = a(x-a) \quad \text{und} \quad (x-a)^2 = b(y-b) .$$

Eliminirt man y, so kommt

$$(x-a)\{(x-a)^3 - ab^2\} = 0 ,$$

eine Gleichung, deren zweiter Factor mit der oben für x gefundenen Gleichung übereinstimmt, wenn man in dieser $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, also $\cos\alpha = 0$ setzt, wodurch die Gleichheit der Resultate für diesen Fall dargethan ist.

Wir wollen noch bemerken, daß in dem in Rede stehenden Falle zweier auf einander senkrechten Geraden

$$x = a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) \quad ; \quad y = b^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) ,$$

also die Größe des Minimums

$$\sqrt{y^2 + x^2} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

ist.

§. 79.

Aufgabe [133]. Es sind drei Curven gegeben; man soll in jeder von diesen Curven einen Punkt finden, der so liegt, daß das durch die Verbindung der drei Punkte entstehende Dreieck die größte oder kleinste Summe der Seiten habe.

Wir beziehen die drei Curven auf ein und daſſelbe rechtwinklige Coor- §. 79.
dinatenſyſtem und bezeichnen ihre Coordinaten reſpective durch xy, x'y' und x"y", die Summe der Seiten des genannten Dreiecks aber durch s. Alsdann iſt

$$s = \{(y-y')^2+(x-x')^2\}^{\frac{1}{2}}+\{(y'-y'')^2+(x'-x'')^2\}^{\frac{1}{2}}+\{(y''-y)^2+(x''-x)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Differentiiren wir dieſen Ausdruck nach x, x' und x", und ſetzen die Differentialcoefficienten gleich Null, ſo kommt

$$\frac{(y-y')\frac{dy}{dx}+(x-x')}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}}+\frac{(y''-y)\frac{dy}{dx}+(x''-x)}{\sqrt{(y''-y)^2+(x''-x)^2}}=0,$$

$$\frac{(y'-y'')\frac{dy'}{dx'}+(x'-x'')}{\sqrt{(y'-y'')^2+(x'-x'')^2}}+\frac{(y-y')\frac{dy'}{dx'}+(x-x')}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}}=0,$$

$$\frac{(y''-y)\frac{dy''}{dx''}+(x''-x)}{\sqrt{(y''-y)^2+(x''-x)^2}}+\frac{(y'-y'')\frac{dy''}{dx''}+(x'-x'')}{\sqrt{(y'-y'')^2+(x'-x'')^2}}=0.$$

Dieſe drei Gleichungen und diejenigen der gegebenen Curven reichen hin, die ſechs Coordinaten der geſuchten Punkte zu beſtimmen, und nachdem dieſe Beſtimmung erfolgt iſt, hat man nach den bekannten Regeln zu unterſuchen, ob die Summe der Seiten ein Maximum oder Minimum iſt, oder ob keins von beiden Statt findet.

Bezeichnen wir die Winkel, welche die drei Seiten des Dreiecks mit der Abſciſſenachſe bilden, reſpective durch γ, γ' u. γ'', ſo haben wir

$$tang\gamma = \frac{y-y'}{x-x'} \quad ; \quad tang\gamma' = \frac{y'-y''}{x'-x''} \quad ; \quad tang\gamma'' = \frac{y''-y}{x''-x} \; ;$$

ferner

$$sin\gamma = \frac{y-y'}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}} \quad ; \quad cos\gamma = \frac{x-x'}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}}$$

und ähnliche Ausdrücke für $sin\gamma'$, $sin\gamma''$, $cos\gamma'$ und $cos\gamma''$, wodurch wir die vorher aufgeſtellten drei Gleichungen in

$$sin\gamma\frac{dy}{dx}+cos\gamma+sin\gamma''\frac{dy}{dx}+cos\gamma''=0,$$

$$sin\gamma'\frac{dy'}{dx'}+cos\gamma'+sin\gamma\frac{dy'}{dx'}+cos\gamma=0,$$

$$sin\gamma''\frac{dy''}{dx''}+cos\gamma''+sin\gamma'\frac{dy''}{dx''}+cos\gamma'=0$$

§. 79. umformen können. Hieraus erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos\gamma+\cos\gamma''}{\sin\gamma''+\sin\gamma} = -\cot\frac{\gamma+\gamma''}{2},$$
$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{\cos\gamma'+\cos\gamma}{\sin\gamma+\sin\gamma'} = -\cot\frac{\gamma'+\gamma}{2},$$
$$\frac{dy''}{dx''} = -\frac{\cos\gamma''+\cos\gamma'}{\sin\gamma'+\sin\gamma''} = -\cot\frac{\gamma''+\gamma'}{2}.$$

Da nun $\frac{\gamma+\gamma''}{2}$, $\frac{\gamma'+\gamma}{2}$, $\frac{\gamma''+\gamma'}{2}$ offenbar diejenigen Winkel sind, welche die Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks mit der Abscissenachse bilden, so folgt, daß die Normalen in den gesuchten Punkten xy, x'y', x''y'' der drei Curven die Winkel des Dreiecks halbiren, und sich also in einem Punkte schneiden.

Aufgabe [134]. Es sind drei Curven gegeben; man soll in jeder derselben einen Punkt finden, der so liegt, daß das durch die Verbindung der drei Punkte entstehende Dreieck die größte oder kleinste Quadratsumme der Seiten habe.

Wenn die rechtwinkligen auf dasselbe System bezogenen Coordinaten der drei Curven durch xy, x'y' und x''y'' bezeichnet werden, und die Quadratsumme der Seiten des Dreiecks S ist, so haben wir

$$S = (y-y')^2+(x-x')^2+(y'-y'')^2+(x'-x'')^2+(y''-y)^2+(x''-x)^2,$$

und zur Bestimmung der Coordinaten der gesuchten Punkte, außer den drei Gleichungen der gegebenen Curven, durch Differentiation des Ausdrucks von S, die folgenden

$$\{2y-(y'+y'')\}\frac{dy}{dx}+2x-(x'+x'') = 0,$$
$$\{2y'-(y+y'')\}\frac{dy'}{dx'}+2x'-(x+x'') = 0,$$
$$\{2y''-(y+y')\}\frac{dy''}{dx''}+2x''-(x+x') = 0.$$

Nach dieser Bestimmung ist zu untersuchen, ob S für die gefundenen Werthe der Coordinaten ein Maximum oder Minimum werde, oder ob ein solches überhaupt nicht existire.

Bezeichnen wir die laufenden Coordinaten der Normale im Punkte xy durch 'x, 'y, so ist ihre Gleichung

$$('y-y)\frac{dy}{dx}+('x-x) = 0,$$

oder, wenn wir für $\frac{dy}{dx}$ seinen Werth aus der ersten der drei Gleichungen setzen, §. 79.

$$\{2x-(x'+x'')\}('y-y)-\{2y-(y'+y'')\}('x-x)=0\ ,$$

welche durch $'x=\frac{1}{2}(x'+x'')$ und $'y=\frac{1}{2}(y'+y'')$ befriedigt wird. Die Normale im Punkte xy geht also durch den Halbirungspunkt der Verbindungslinie der Punkte x'y' und x''y''. Aehnliche Resultate ergeben sich für die Normalen in den Punkten x'y' und x''y'', und daraus folgt, daß die Normalen der drei Curven in den Eckpunkten des gesuchten Dreiecks durch die Halbirungspunkte der gegenüberstehenden Seiten gehen und sich also in einem Punkte schneiden.

Aufgabe [135]. Es sind drei Curven gegeben; man soll in jeder derselben einen Punkt finden, der so liegt, daß das durch die Verbindungslinien der drei Punkte gebildete Dreieck den größten oder kleinsten Flächeninhalt habe.

Bei der in den vorigen Aufgaben angenommenen Bezeichnung haben wir, wenn Q den Flächeninhalt des Dreiecks bedeutet (§. 10.),

$$Q=\tfrac{1}{2}\{[x'y+x''y'+xy'']-[y'x+y''x'+yx'']\}\ ,$$

und zur Bestimmung der Coordinaten der gesuchten Punkte, außer den Gleichungen der gegebenen Curven, durch Differentiation des Ausdrucks von Q, die folgenden

$$(x'-x'')\frac{dy}{dx}-(y'-y'')=0\ ,$$

$$(x''-x)\frac{dy'}{dx'}-(y''-y)=0\ ,$$

$$(x-x')\frac{dy''}{dx''}-(y-y')=0\ ;$$

und nach erfolgter Bestimmung dieser Coordinaten muß untersucht werden, ob die gefundenen Werthe Q zu einem Maximum oder Minimum machen, oder ob dergleichen nicht existiren.

Die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Normalen in den gesuchten Punkten mit der Abscissenachse machen, sind respective durch $-\frac{dx}{dy}$, $-\frac{dx'}{dy'}$ und $-\frac{dx''}{dy''}$ ausgedrückt. Die Tangenten der Winkel aber, welche die diesen Punkten gegenüberstehenden Seiten des Dreiecks mit derselben Abscissenachse bilden, sind gleich $\frac{y'-y''}{x'-x''}$, $\frac{y''-y}{x''-x}$ und $\frac{y-y'}{x-x'}$, oder,

§. 79. in Folge der vorigen Gleichungen, gleich $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy'}{dx'}$ und $\frac{dy''}{dx''}$. Hieraus ergiebt sich, daß die Normalen in den gesuchten Punkten der drei Curven, die diesen Punkten gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks senkrecht und sich also in einem Punkte schneiden.

Man sieht leicht ein, daß die Aufgabe, in welcher gefordert wird, daß die Eckpunkte des Dreiecks in einer und derselben Curve liegen sollen, eben so zu behandeln ist. Dabei kann es sich dann aber ereignen, daß die drei Differentialgleichungen, die wir aufgestellt haben, nicht von einander unabhängig sind, sondern daß eine derselben eine Folge der übrigen ist. Alsdann sind die drei als unabhängig betrachteten Größen x, x', x'' durch diese drei Gleichungen nicht bestimmt, sondern es ergeben sich nur zwei Relationen zwischen diesen drei Größen, und man kann daher eine von ihnen beliebig annehmen. Aber in diesem Falle existiren keine absolute Maxima oder Minima, und es können die Werthe, welche Q für irgend einen beliebigen Werth x_1 von x und für die, in Folge der beiden Relationen sich ergebenden, Werthe x_1' und x_1'' von x' und x'' erhält, nur relative Maxima oder Minima seyn, d. h. die Werthe von Q für x_1, x_1' und x_1'' können nur die größten oder kleinsten unter denjenigen seyn, welche Q für denselben Werth x_1 von x und andere, die beiden genannten Relationen nicht befriedigende, Werthe x_0', x_0'' von x' und x'' erhält.

Die Werthe, welche Q für andere beliebige Werthe x_n von x und diesen, in Folge der beiden Relationen, entsprechende Werthe x'_n und x''_n von x' und x'' erhält, sind sämmtlich einander gleich. Dies läßt sich folgendermaßen leicht erweisen. Betrachten wir Q, indem wir für y, y' und y'' ihre Werthe in x, x' und x'' uns substituirt denken, als Functionen nur von x, x' und x'', so haben wir, da x' und x'', in Folge der, bei dem in Rede stehenden Falle Statt findenden, beiden Relationen, ihrerseits wieder Functionen von x sind,

$$\frac{dQ}{dx} = \left(\frac{dQ}{dx''}\right)\frac{dx''}{dx} + \left(\frac{dQ}{dx'}\right)\frac{dx'}{dx} + \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Nun sind aber die drei partiellen Differentialcoefficienten $\left(\frac{dQ}{dx''}\right)$, $\left(\frac{dQ}{dx'}\right)$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ nichts anders als die ersten Theile der aufgestellten drei Gleichungen, welche, der jetzigen Voraussetzung zufolge, von jedem beliebigen

Werthe von x und den entsprechenden Werthen von x′ und x″ befriedigt werden; daher ist $\frac{dQ}{dx}$, für jeden beliebigen Werth von x, gleich Null. Wenn aber der erste Differentialcoefficient einer Function, für jeden Werth der Veränderlichen, gleich Null ist, so ist diese Function einer Constanten gleich, was zu zeigen war. §. 79.

Der genannte Fall tritt z. B. bei der folgenden Aufgabe ein, die nur eine Particularisation der vorigen ist.

Aufgabe [136]. In einer gegebenen Ellipse das größte oder kleinste Dreieck zu bestimmen.

Es sey $a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2$ die Gleichung der Ellipse in Beziehung auf ihre Achsen. Dann ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$, und die drei Gleichungen in der vorigen Aufgabe nehmen die Formen

$$b^2(xx'-xx'')+a^2(yy'-yy'') = 0\,,$$
$$b^2(x'x''-xx')+a^2(y'y''-yy') = 0\,,$$
$$b^2(xx''-x'x'')+a^2(yy''-y'y'') = 0\,,$$

an, von welchen die letzte durch Addition der beiden erstern hergeleitet werden kann. Es giebt demnach kein absolut größtes oder kleinstes Dreieck in der Ellipse.

Nehmen wir jetzt einen beliebigen Punkt auf der Ellipse, z. B. einen Endpunkt der größern Achse, als Scheitel eines eingeschriebenen Dreiecks an, so haben wir zur Bestimmung des größten oder kleinsten Dreiecks unter denen, welche denselben Scheitel haben, in die drei erhaltenen Gleichungen $x = +a$ und $y = 0$, für y′ und y″ aber $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x'^2}$ und $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x''^2}$ zu setzen, woraus sich

$$x'-x'' = 0 \quad ; \quad x'(x''-a)+\sqrt{a^2-x'^2}\,.\sqrt{a^2-x''^2} = 0\,,$$

und somit

$$x'' = x' = -\tfrac{1}{2}a\,,$$

und alsdann $y'' = \pm\frac{b\sqrt{3}}{2}$ und $y' = \pm\frac{b\sqrt{3}}{2}$ ergeben. Die Werthe von y′ und y″, mit gleichen Zeichen genommen, geben gar kein Dreieck; mit entgegengesetzten Zeichen genommen, bestimmen sie ein Dreieck, dessen Scheitel nun in dem einen Endpunkte der größern Achse liegt, und dessen Grund-

§. 79. linie, gleich $b\sqrt{3}$, senkrecht auf derselben Achse steht und von jenem Scheitel die Entfernung $\frac{3}{2}a$ hat. Der Inhalt dieses Dreiecks ist demnach $\frac{\sqrt{27}}{4}ab$.

Hätten wir einen andern Punkt auf der Ellipse zum Scheitel des Dreiecks angenommen, so würden wir zufolge desjenigen, was wir vorher über den Werth von Q bemerkt haben, denselben Flächeninhalt gefunden haben. Um für diesen Scheitel die Lage der Grundlinie zu finden, ist es nicht nöthig, die Rechnung von Neuem anzufangen; denn dieser Scheitel kann immer als Endpunkt eines Durchmessers angesehen werden, und beziehen wir die Gleichung der Ellipse auf diesen Durchmesser und seinen conjugirten, so ändert sich die Gleichung der Curve nicht, wenn wir jetzt unter 2a und 2b die Längen dieser Durchmesser verstehen. Die drei Bedingungsgleichungen für das Maximum oder Minimum bleiben ebenfalls unverändert, weil der Ausdruck Q des Dreiecks nur mit einer constanten Größe, dem Sinus des neuen Coordinatenwinkels nämlich, zu multipliciren ist (§. 10.). Demnach werden x', x'', y' u. y'' auf dieselbe Weise von a und b abhangen als vorher; d. h. die Grundlinie des Dreiecks wird dem conjugirten Durchmesser parallel seyn, und ihr Durchschnittspunkt mit dem durch den Scheitel des Dreiecks gehenden Durchmesser wird die Hälfte desselben halbiren. Daß übrigens diese Dreiecke keine Minima, sondern relative Maxima sind, ist von selbst klar.

Wir dürfen nicht unbemerkt lassen, daß sich dieselben Resultate, vermittelst der Affinität, aus der Beschaffenheit des größten, in einem Kreise eingeschriebenen Dreiecks ohne alle Rechnung herleiten lassen.

Wollte man das größte oder kleinste Dreieck in einer Hyperbel aufsuchen, so würde die Rechnung dieselbe seyn, nur wäre $b\sqrt{-1}$ für b zu setzen, woraus sich denn, für $x = a$ und $y = 0$, y' sowohl als $y'' = \pm\frac{b\sqrt{-3}}{2}$ ergeben würde. Demnach giebt es hier kein größtes Dreieck.

§. 80.

Eine gerade Linie, welcher sich eine Curve immer mehr und mehr nähert, ohne sie je zu erreichen, und dergestalt, daß der Abstand der Curve von dieser Geraden kleiner wird als jede gegebene Größe, heißt Asymptote der Curve. Aus dieser Erklärung folgt, daß nur solche Curven, welche sich ins Unendliche erstrecken, Asymptoten haben können; ferner, daß die Gerade,

welche eine Asymptote eines Zweiges ist, wohl andere Zweige derselben Curve, nicht aber diesen Zweig schneiden kann, und daß sie als eine Tangente anzusehen ist, deren Berührungspunkt in unendlicher Entfernung von irgend einem, zum Anfangspunkte der Coordinaten angenommenen, Punkte liegt. §. 80.

Aufgabe [137]. Es ist eine sich ins Unendliche erstreckende Curve gegeben. Man soll finden, ob sie Asymptoten hat, und welches ihre Lage ist.

Wir nehmen an, die Polargleichung der Curve sey bekannt. In dieser Gleichung setzen wir den Radius vector u gleich $\infty = \frac{1}{0}$, und entwickeln daraus den Werth t' des dazu gehörenden Winkels t. Diesen Werth setzen wir in den Ausdruck der Polarsubtangente $u^2\frac{dt}{du}$. Bezeichnen wir nun das Resultat dieser letzten Substitution durch p, so ist p die Länge des vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Asymptote herabgelassenen Perpendikels, t' aber der Winkel, welchen die Asymptote mit der Geraden macht, von welcher die t an gezählt sind. Wenn $p = \infty$, oder wenn p imaginär ist, hat die Curve keine Asymptote.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens leuchtet ein, wenn man erwägt, daß in dem rechtwinkligen Dreiecke, welches von dem Radius vector, der Tangente in seinem Endpunkte und der Polarsubtangente dieses Endpunktes gebildet wird, für den Fall, daß die Tangente sich in eine Asymptote verwandelt, der Radius vector gleich ∞, und also nicht nur der Winkel, den die Polarsubtangente mit diesem Leitstrahle, sondern auch derjenige, welchen sie mit der Asymptote macht, ein rechter ist.

Beispiel I. Es soll nach der angegebenen Art untersucht werden, welche von den Linien zweiten Grades Asymptoten haben.

Wir nehmen die Polargleichung $(1 - m\cos t)u = r$, welche (§. 33. S. 16) alle Linien zweiten Grades umfaßt, und setzen darin $u = \frac{1}{0}$. Dadurch erhalten wir $1 - m\cos t = 0$, also $\cos t' = \frac{1}{m}$, und somit $\sin t' = \pm\frac{\sqrt{m^2-1}}{m}$. Da nun $u^2\frac{dt}{du} = -\frac{r}{m\sin t}$, so haben wir $p = \pm\frac{r}{\sqrt{m^2-1}}$. Dieser Ausdruck sowohl als der von $\sin t'$ ist imaginär, wenn $m < 1$, d. i. wenn die Curve eine Ellipse ist; er ist ∞, wenn $m = 1$, d. i. wenn die Curve eine Parabel ist. Die Ellipse und Parabel haben daher keine Asymp-

§. 80. toten. Wenn $m > 1$ ist, haben $\sin t'$ und p zwei gleiche und entgegengesetzte reelle Werthe; die Hyperbel hat also zwei Asymptoten.

Fig. 31. II. Es soll die Asymptote der, im §. 57. betrachteten und daselbst durch die Gleichung (3) $\sin(\varphi + t) ru = ab \sin 2t$ ausgedrückten, Curve gefunden werden.

Wir setzen $u = \frac{1}{0}$, und erhalten dadurch $t' = -\varphi$ oder $t' = \pi - \varphi$. Da nun $u^2 \frac{dt}{du} = \frac{ab}{r} \cdot \frac{\sin^2 2t}{2 \sin(\varphi + t) \cos 2t - \sin 2t \cos(\varphi + t)}$ ist, so haben wir $p = \mp \frac{ab}{r} \sin 2\varphi$. Das doppelte Vorzeichen dieses Ausdrucks bezieht sich auf die beiden Werthe von t'; da aber diese beiden Winkel sich zu zwei rechten ergänzen, so existirt nur eine Asymptote. Für die der Fig. 31. zu Grunde gelegten Werthe $\frac{ab}{r} = 1732$ und $\varphi = 15°$, haben wir $p = \mp 866$.

Fig. 36. III. Es soll die Asymptote der Cissoide gefunden werden.

Wir transformiren die Gleichung $x(y^2 + x^2) - cy^2 = 0$ (§. 59. S. 8) in Polarcoordinaten, und erhalten $u \cos t = c \sin^2 t$. Setzen wir nun $u = \frac{1}{0}$, so kommt $\cos t' = 0$, also $t' = \frac{1}{2}\pi$ oder $t' = -\frac{1}{2}\pi$. Da ferner $u^2 \frac{dt}{du} = \frac{c \sin^2 t}{1 + \cos^2 t}$ ist, so haben wir $p = \pm c$. Die Asymptote steht also auf der Abscissenachse senkrecht in einer Entfernung $p = c$ vom Anfangspunkte der Coordinaten.

Fig. 37. IV. Es soll die Asymptote der Conchoide, deren Polargleichung (§. 60. S. 8)

$$u \sin t = b + a \sin t \quad \text{oder} \quad u = \frac{b}{\sin t} + a$$

ist, gefunden werden.

Setzen wir $u = \frac{1}{0}$, so kommt $\sin t' = 0$, also $t' = 0$ oder $t' = \pi$. Da ferner $u^2 \frac{dt}{du} = -\frac{(b + a \sin t)^2}{b \cos t}$ ist, so haben wir $p = \mp b$. Es ist daher die Gerade GG' in Fig. 37. die Asymptote der Curve.

Fig. 47. V. Es sollen die Asymptoten der Quadratrix des Dinostratus gefunden werden.

Die Gleichung dieſer Curve in rechtwinkligen Coordinaten (§. 65. G. 1) §. 80.

$$\frac{y}{x} = tang\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2a}x\right)$$

giebt, wenn wir $\frac{y}{x} = tang\,t$ und $x = u\,cos\,t$ ſetzen, die Polargleichung

$$tang\,t = tang\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2a}u\,cos\,t\right),$$

oder

$$u = \frac{a\left(1 - \frac{2t}{\pi}\right)}{cos\,t}.$$

Setzen wir $u = \frac{1}{0}$, ſo kommt $t' = -\frac{1}{2}\pi$; oder $\pm\frac{3}{2}\pi$; oder $\pm\frac{5}{2}\pi$; u. ſ. w.

Da nun $u^2\frac{dt}{du} = \frac{a^2\left(1 - \frac{2t}{\pi}\right)^2}{a\left(1 - \frac{2t}{\pi}\right)sin\,t - 2\frac{a}{\pi}cos\,t}$ iſt, ſo haben wir, der Reihe nach, $p = 2a$; oder $\begin{cases}+2a\\-4a\end{cases}$; oder $\begin{cases}+4a\\+6a\end{cases}$; u. ſ. w. Die Curve hat alſo unendlich viele Aſymptoten, welche ſenkrecht auf der Abſciſſenachſe ſtehen und welche die, von den verſchiedenen Zweigen der Curve auf dieſer Achſe abgeſchnittenen, Stücke halbiren (§. 65. Aufg. 103.).

VI. Es ſoll die Aſymptote der hyperboliſchen Spirale, deren Glei- Fig. 54.
chung (§. 68. G. 3) $ut = r\alpha$ iſt, gefunden werden.

Wir ſetzen $u = \frac{1}{0}$ und erhalten $t' = 0$. Da nun $u^2\frac{dt}{du} = -r\alpha$ iſt, ſo erhalten wir $p = -r\alpha$, und demnach hat die Curve eine Aſymptote, welche der Achſe der t in der Entfernung $r\alpha$ parallel iſt. (Vergleiche §. 68.)

VII. Es ſoll die Aſymptote des Lituus gefunden werden, deſſen Glei- Fig. 55.
chung $u^2t = r^2\alpha$ iſt (§. 68. G. 4).

Wir ſetzen $u = \frac{1}{0}$ und erhalten $t' = 0$. Da ferner $u^2\frac{dt}{du} = \pm 2r\sqrt{\alpha t}$ iſt, ſo erhalten wir $p = 0$. Demnach iſt die Gerade, von welcher an die t gezählt ſind, eine Aſymptote der Curve.

Von den Berührungen höherer Ordnungen.

§. 81.

§. 81.

Es sey

$$y = \varphi(x) \qquad (1)$$

die Gleichung einer gegebenen Curve und x_1, y_1 seyen die Coordinaten eines bestimmten Punktes derselben. Es sey ferner

$$y = \psi(x, a, b, c\ldots) \qquad (2)$$

die gegebene, auf dieselben rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinatenachsen bezogene, Gleichung einer andern Curve. Sieht man die in der Gleichung (2) enthaltenen n Constanten als noch unbestimmte Größen an, so drückt sie nicht eine individuelle Curve, sondern unzählig viele Curven aus, die sowohl der Lage als der Gestalt nach verschieden sind, je nachdem diesen Constanten verschiedene Werthe beigelegt werden.

Wir bestimmen nun die n Constanten a, b, c, etc. so, daß die Coordinaten x_1, y_1, welche, der Voraussetzung zufolge, die Gleichung (1) befriedigen, auch der Gleichung (2) genug thun, und daß ferner für dieselben Werthe x_1 und y_1 von x und y die ersten $(n-1)$ Differentialcoefficienten der Function (2) denen der Function (1) gleich werden, dergestalt, daß wenn wir, der Kürze wegen, $\varphi(x_1)$ durch φ_1, $\psi(x_1, a, b\ldots)$ durch ψ_1, $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ für den Werth x_1 von x durch $\frac{d\varphi_1}{dx_1}$, u. s. f. bezeichnen,

$$\varphi_1 = \psi_1 \;;\; \frac{d\varphi_1}{dx_1} = \frac{d\psi_1}{dx_1} \;;\; \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} = \frac{d^2\psi_1}{dx_1^2} \;;\; \ldots \frac{d^{n-1}\varphi_1}{dx_1^{n-1}} = \frac{d^{n-1}\psi_1}{dx_1^{n-1}}$$

sey. Erhalten nun die n Constanten aus diesen n Gleichungen reelle Werthe, so geht die, durch die Gleichung (2) ausgedrückte, Curve durch den Punkt x_1y_1 und schließt sich der Curve (1) so an, daß jede Curve, welche, bei einer andern Bestimmung der Constanten a, b, c, etc., durch die Gleichung (2) ausgedrückt wird, wenn sie auch durch den Punkt x_1y_1 geht, in der Nähe dieses Punktes zwischen der Curve (1) und jener angegebenermaßen bestimmten Curve nicht liegen kann.

Denn es seyen $x_1 + h$ und y' die Coordinaten eines von x_1y_1 verschiedenen Punktes der Curve (1), so ist

$$y' = \varphi_1 + \frac{d\varphi_1}{dx_1}\cdot h + \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2}\cdot\frac{h^2}{2} + \ldots + \frac{d^{n-1}\varphi_1}{dx_1^{n-1}}\cdot\frac{h^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)} + \frac{d^n\varphi_1}{dx_1^n}\cdot\frac{h^n}{2.3\ldots n} + \ldots$$ §. 81.

und zu derselben Abscisse $x_1 + h$ gehört eine Ordinate y'' einer der Curven (2), welche durch

$$y'' = \psi_1 + \frac{d\psi_1}{dx_1}\cdot h + \frac{d^2\psi_1}{dx_1^2}\cdot\frac{h^2}{2} + \ldots + \frac{d^{n-1}\psi_1}{dx_1^{n-1}}\cdot\frac{h^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)} + \frac{d^n\psi_1}{dx_1^n}\cdot\frac{h^n}{2.3\ldots n} + \ldots$$

ausgedrückt ist. Die Differenz beider Ordinaten ist, wenn der Punkt x_1y_1 beiden Curven gemein, wenn also $\varphi_1 = \psi_1$ ist,

$$y' - y'' = \left(\frac{d\varphi_1}{dx_1} - \frac{d\psi_1}{dx_1}\right)h + \ldots + \left(\frac{d^{n-1}\varphi_1}{dx_1^{n-1}} - \frac{d^{n-1}\psi_1}{dx_1^{n-1}}\right)\frac{h^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)} + \left(\frac{d^n\varphi_1}{dx_1^n} - \frac{d^n\psi_1}{dx_1^n}\right)\frac{h^n}{2.3\ldots n} + \ldots$$

und diese Differenz reducirt sich, wenn die Constanten wie angegeben bestimmt sind, auf

$$y' - y''' = \left(\frac{d^n\varphi_1}{dx_1^n} - \frac{d^n\psi_1}{dx_1^n}\right)\frac{h^n}{2.3\ldots n} + \ldots,$$

indem wir die zur Abscisse $x_1 + h$ gehörige Ordinate der in Rede stehenden Curve durch y''' bezeichnen. Nun kann aber h immer so klein angenommen werden, daß für diesen Werth von h und für jeden absolut genommen kleinern Werth die Summe der ersten $(n-1)$ Glieder der Reihe für $y' - y''$, absolut genommen größer werde als die Summe aller übrigen Glieder, daß also auch $y' - y'' > y' - y'''$; und der Endpunkt der Ordinate y'' kann daher nicht zwischen den Endpunkten der Ordinaten y' und y''' liegen, wenn h gehörig klein angenommen wird.

Ueberhaupt, wenn zwei durch die auf dasselbe rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinatensystem bezogenen Gleichungen

$$y = \varphi(x) \quad ; \quad y = \psi(x) \qquad (3)$$

ausgedrückte Curven einen Punkt x_1y_1 gemein haben, und wenn für diesen Punkt irgend eine Anzahl m vorderster Differentialcoefficienten einander gleich sind, so daß also

$$\varphi_1 = \psi_1 \quad ; \quad \frac{d\varphi_1}{dx_1} = \frac{d\psi_1}{dx_1} \quad ; \quad \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} = \frac{d^2\psi_1}{dx_1^2} \; ; \; \ldots \frac{d^m\varphi_1}{dx_1^m} = \frac{d^m\psi_1}{dx_1^m} \qquad (4)$$

ist; so kann keine andere Curve, welches auch ihre Gleichung

§. 81. $$y = \chi(x)$$

seyn mag, durch denselben Punkt $x_1 y_1$ und zwischen den zuerst genannten Curven durchgehen, wenn nicht auch

$$\chi_1 = \varphi_1 \quad ; \quad \frac{d\chi_1}{dx_1} = \frac{d\varphi_1}{dx_1} \quad ; \quad \frac{d^2\chi_1}{dx_1^2} = \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} \cdots \frac{d^m\chi_1}{dx_1^m} = \frac{d^m\varphi_1}{dx_1^m}$$

ist.

Zwei Curven, welche einen Punkt gemein haben, und an welchen die ersten m Differentialcoefficienten der Ordinaten für diesen Punkt einander gleich sind, haben eine Berührung oder einen Contact der mten Ordnung.

Zwei Curven, welche einen Contact der mten Ordnung haben, können außer dem Berührungspunkte P noch andere Punkte mit einander gemein haben, in welchen sie sich entweder schneiden oder wieder berühren. In jedem Falle aber ist der Berührungspunkt P so anzusehen, als wären in ihm $(m+1)$ Durchschnittspunkte vereinigt. Denn wenn man, um die Durchschnittspunkte der beiden Curven aufzusuchen, welche durch die Gleichungen (3) ausgedrückt seyn mögen, y eliminirt, so kommt

$$\varphi(x) = \psi(x) \,, \qquad (5)$$

und der Werth x_1 von x befriedigt nicht nur diese Gleichung, sondern auch ihre ersten m Ableitungen nach x, was durch die Gleichungen (4) ausgesprochen ist. Es hat folglich die Gleichung (5), nach einem bekannten Satze, $(m+1)$ gleiche Wurzeln, wodurch die Behauptung erwiesen ist. Auch haben umgekehrt zwei Curven, von welchen $(m+1)$ Durchschnittspunkte in einen Punkt zusammenfallen, einen Contact der mten Ordnung.

Zwei Curven, die einen Contact erster oder höherer Ordnung haben, haben in ihrem Berührungspunkte dieselbe Tangente, und umgekehrt, zwei Curven, die einen Punkt gemein und in demselben eine gemeinschaftliche Tangente haben, haben in diesem Punkte einen Contact, der wenigstens von der ersten Ordnung ist. Denn wenn die Curven im Punkte $x_1 y_1$ einen Contact erster oder höherer Ordnung haben, so ist $\frac{dy_1}{dx_1}$ von demselben Werthe, es mag aus der Gleichung der einen oder der andern Curve abgeleitet seyn; die Gleichung $y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1)$ wird also für beide Curven dieselbe seyn. Und umgekehrt, wenn die Tangenten in dem gemeinschaftlichen Punkte $x_1 y_1$

an beiden Curven zusammen fallen, so sind ihre Gleichungen identisch, folg- §. 81.
lich $\frac{dy_1}{dx_1}$ von demselben Werthe.

§. 82.

Die so eben gemachten Bemerkungen lassen mancherlei Anwendungen zu, von denen wir einige kurz anzudeuten nicht unterlassen wollen.

Zufolge des §. 63. entspricht einer gleichseitigen Hyperbel, deren Achse gleich 2a ist, nach der daselbst erwähnten Verwandtschaft, eine Lemniscate, deren Gleichung

$$(y^2+x^2)^2+a^2(y^2-x^2) = 0$$

ist. Nehmen wir auf der Hyperbel irgend einen Punkt μ an, ziehen nach den beiden Brennpunkten φ, φ' zwei Gerade und halbiren die Winkel, welche sie einschließen, durch zwei Linien λ, λ', so ist von diesen Halbirungslinien die eine die Tangente und die andere die Normale der Hyperbel im Punkte μ (§. 37.). Dem Punkte μ der Hyperbel entspricht nun ein Punkt M der Lemniscate, den Brennpunkten φ und φ' der Hyperbel, deren Coordinaten $+a\sqrt{2}, 0$ und $-a\sqrt{2}, 0$ sind, entsprechen zwei Punkte F, F', welche, zufolge der Gleichungen (3) des §. 63., auf der Achse der Lemniscate zu beiden Seiten des Mittelpunktes C in den Entfernungen gleich $\frac{a}{\sqrt{2}}$ von ihm liegen. Den beiden Geraden $\mu\varphi$, $\mu\varphi'$ entsprechen zwei Kreise MFC, MF'C, welche durch den Mittelpunkt C, den Cardinalpunkt des Systems xy, durch den Punkt M und respective durch die Punkte F u. F' gehen. Den beiden Geraden λ, λ' entsprechen zwei Kreise L, L', welche durch den Mittelpunkt C und durch den Punkt M gehen, und die vorher genannten beiden Kreise so schneiden, daß sie die Winkel halbiren, unter welchen diese Kreise sich schneiden. Da nun in der einen von den beiden Geraden λ, λ' zwei ihrer Durchschnittspunkte mit der Hyperbel im Punkte μ vereinigt sind, so sind auch in dem einen der beiden Kreise L, L' zwei seiner Durchschnittspunkte mit der Lemniscate im Punkte M vereinigt. Daher hat dieser Kreis mit der Lemniscate im Punkte M einen Contact, der wenigstens von der ersten Ordnung ist, und seine Tangente im Punkte M ist zugleich die Tangente der Lemniscate in diesem Punkte; deshalb ist nun auch die Tangente an dem andern der beiden Kreise L, L', welcher den ersten rechtwinklig schneidet, die Normale der Lemniscate im Punkte M. Da aber die Kreise L, L' die Winkel halbiren, unter welchen sich die Kreise MFC, MF'C schneiden, so

§. 82. halbiren auch dieſe Tangente und Normale dieſelben Winkel, oder, was daſſelbe iſt, dieſe Geraden halbiren die Winkel, welche die beiden Radien der Kreiſe MFC, MF'C bilden. Weil nun die Kreiſe MFC, MF'C durch die Punkte C u. F, C u. F' gehen, ſo liegen ihre Mittelpunkte in den Senkrechten D, D' welche in den Halbirungspunkten K, K' auf der Achſe der Curve errichtet ſind, und da dieſe Kreiſe auch durch M gehen, ſo liegen die Mittelpunkte auch auf der im Halbirungspunkte der Geraden CM auf dieſer ſenkrecht ſtehenden Linie E. Hieraus ergiebt ſich folgende, von der im §. 73. angeführten verſchiedene, Conſtruction der Tangente und Normale in einem gegebenen Punkte M der Lemniscate. Man errichte in den beiden Punkten K u. K', deren Entfernungen CK u. CK' vom Mittelpunkte gleich $a\sqrt{\frac{1}{2}}$ ſind, zwei Senkrechte D, D' auf der Achſe der Curve, ferner errichte man im Halbirungspunkte der Verbindungslinie CM auf dieſer eine Senkrechte E; die Durchſchnittspunkte von E mit D und D', verbinde man mit M, und halbire die beiden dadurch bei M entſtandenen Winkel, ſo iſt von dieſen Halbirungslinien die eine die Tangente und die andere die Normale an der Lemniscate im Punkte M.

Aehnliche Betrachtungen führen zur Conſtruction der Tangente an der Ciſſoide und Cardioide. Wir können die Aufſuchung dieſer Conſtructionen dem Nachdenken des Leſers überlaſſen.

Es ſey irgend eine Linie dritten Grades und ein Punkt P auf derſelben gegeben. Die folgende Conſtruction der Tangente in dieſem Punkte, welche Herr Poncelet zuerſt bekannt gemacht hat *), beruht zum Theil auf den zu Ende des vorigen §. gemachten Bemerkungen.

Man verbinde den Punkt P mit zwei beliebigen Punkten a, a' der Curve, ſo werden dieſe Verbindungslinien die Curve im Allgemeinen in noch zwei Punkten b, b' ſchneiden, denn jede Gerade, welche eine Linie dritten Grades in zwei Punkten ſchneidet, hat noch einen dritten Punkt mit ihr gemein (was unmittelbar daraus folgt, daß einer Gleichung dritten Grades, die zwei reelle Wurzeln hat, noch eine dritte reelle Wurzel zukommt). Man ziehe aa', ſo wird dieſe Gerade noch einen Durchſchnittspunkt a'' mit der Curve geben; durch a'' und einen beliebigen Punkt b'' der Curve ziehe man wieder eine Gerade, welche die Curve noch in einem Punkte c'' ſchneiden wird. Conſtruirt man nun die Tangente im Punkte P derjenigen Linie zwei-

*) Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik. Bd. VIII.

zweiten Grades, welche durch die fünf Punkte P, b, b', b'' u. c'' bestimmt ist — eine Construction, welche weder die Verzeichnung der Linie zweiten Grades, noch die Anwendung anderer als gerader Linien erheischt, wenn man sie nach der 73ten Aufgabe (§. 41.) bewerkstelligt — so ist diese Berührungslinie die Tangente der Linie dritten Grades im Punkte P. §. 82.

Um die Richtigkeit dieser Lösung zu erweisen, bemerken wir zunächst, daß, wenn man auf einer Linie dritten Grades drei in gerader Linie liegende Punkte a, a', a'' annimmt, und durch diese Punkte drei Gerade l, l', l'' zieht, das System dieser drei Geraden auch als eine Linie dritten Grades angesehen werden kann, und daß, zufolge des Lehrsatzes (39) in §. 53., von den neun Durchschnittspunkten dieser Geraden mit jener ersten Linie dritten Grades, die sechs übrigen Durchschnittspunkte, welche wir durch b, b', b'', c, c', c'' bezeichnen wollen, auf einer Linie zweiten Grades liegen, weil eben die erstgenannten drei Durchschnittspunkte a, a', a'' in einer Linie ersten Grades enthalten sind. Stellt man sich nun vor, daß zwei von den sechs Durchschnitten der Linien zweiten und dritten Grades, nämlich c und c', in einen Punkt P zusammen fallen, so wird die durch die fünf Punkte b, b', b'', c'' u. P bestimmte Linie zweiten Grades die Linie dritten Grades nicht mehr in den Punkten c u. c' schneiden, sondern im Punkte P berühren, und beide Curven werden also in P eine gemeinschaftliche Tangente haben, was zu zeigen war.

§. 83.

Ein Kreis, welcher mit einer Curve in einem Punkte P derselben einen Contact zweiter Ordnung hat, heißt der Osculationskreis oder Krümmungskreis, sein Mittelpunkt Krümmungsmittelpunkt und sein Halbmesser Krümmungsradius des Punktes P.

Aufgabe [138]. Die Gleichung einer Curve in rechtwinkligen oder in Polarcoordinaten ist gegeben. Man soll die Länge des Krümmungsradius und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes von einem gegebenen Punkte der Curve finden.

I. Es sey

$$f(y, x) = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung der gegebenen Curve in rechtwinkligen Coordinaten, und es seyen x_1, y_1 die Coordinaten eines gegebenen Punktes derselben. Bezeichnen wir die noch unbekannten Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes durch

§. 83. α, β und den noch unbekannten Krümmungsradius durch ϱ, so ist die auf dasselbe Coordinatensystem bezogene Gleichung des Krümmungskreises

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \varrho^2 \ . \qquad (2)$$

Damit nun dieser Kreis mit der gegebenen Curve im Punkte P wirklich einen Contact zweiter Ordnung habe, ist erforderlich, daß seine Gleichung von den Coordinaten x_1, y_1 befriedigt werde, und daß die ersten beiden Differentialcoefficienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, welche die Gleichung (1) giebt, denselben Differentialcoefficienten, wenn man sie aus der Gleichung (2) ableitet, für $x = x_1$ und $y = y_1$, gleich seyen. Bezeichnen wir die Werthe der zuerst genannten durch $\frac{dy_1}{dx_1}$ u. $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$, die der zuletzt genannten durch p_1 u. q_1, so haben wir also

$$p_1 = \frac{dy_1}{dx_1} \quad ; \quad q_1 = \frac{d^2y_1}{dx_1^2} \ .$$

Nun giebt die Gleichung (2), wenn sie differentiirt wird,

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx}+(x-\alpha) = 0 \ , \qquad (3)$$

$$(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+1+\frac{dy^2}{dx^2} = 0 \ . \qquad (4)$$

Und wenn wir in (2), (3) und (4) x_1 u. y_1 für x u. y, und sodann $\frac{dy_1}{dx_1}$ u. $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ für p_1 u. q_1 setzen, erhalten wir

$$(y_1-\beta)^2+(x_1-\alpha)^2 = \varrho^2 \ , \qquad (5)$$

$$(y_1-\beta)\frac{dy_1}{dx_1}+(x_1-\alpha) = 0 \ , \qquad (6)$$

$$(y_1-\beta)\frac{d^2y_1}{dx_1^2}+1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2} = 0 \ , \qquad (7)$$

drei Gleichungen, welche zur Bestimmung von α, β und ϱ hinreichen, und von welchen die zweite (6) (wenn man α, β darin als laufende Coordinaten ansieht) ausdrückt, daß der Punkt $\alpha\beta$, d. i. der Krümmungsmittelpunkt, auf der Normale des Punktes x_1y_1 an der Curve (1) liege, was damit übereinstimmt, daß der Krümmungskreis und die Curve (1) im Punkte x_1y_1 eine gemeinschaftliche Tangente haben.

Entwickeln wir aus diesen Gleichungen die unbekannten Größen, so kommt

§. 83.

$$\beta = y_1 + \frac{1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2}}{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}} \quad ; \quad \alpha = x_1 - \frac{\left(1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2}\right)\frac{dy_1}{dx_1}}{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}} \quad ; \qquad (8)$$

$$\varrho = \pm \frac{\left(1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}} \, . \qquad (9)$$

Das doppelte Vorzeichen des letzten Ausdrucks rührt davon her, daß die Lage des Krümmungsradius unbestimmt ist, indem ein jeder Halbmesser des Krümmungskreises als Krümmungsradius zu betrachten ist. Wird in dieser Beziehung etwas festgesetzt, z. B. daß der Krümmungsradius die Lage der Geraden haben soll, welche den Krümmungsmittelpunkt $\alpha\beta$ mit dem Punkte x_1y_1 verbindet, so fällt auch die Zweideutigkeit in dem Vorzeichen weg. Unter der eben erwähnten Voraussetzung fällt der Krümmungsradius mit dem, vom Punkte $\alpha\beta$ auf die Tangente im Punkte x_1y_1 gefällten Perpendikel zusammen, und ist also positiv oder negativ, je nachdem der Punkt $\alpha\beta$, von dieser Tangente an gerechnet nach der Seite der positiven oder negativen Ordinaten hin liegt (§. 7. Aufg. 12.); oder, was offenbar dasselbe ist, je nachdem $\beta - y_1$ positiv oder negativ ist. Es ist aber, in Folge von (8)

$$\beta - y_1 = \frac{1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2}}{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}} \, ,$$

und, da der Zähler dieses Ausdrucks immer positiv ist, wenn $\frac{dy_1}{dx_1}$ reell ist, so hat $\beta - y_1$ das Zeichen von $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$. Unter der erwähnten Voraussetzung ist also ϱ mit dem Zeichen von $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ zu nehmen, so daß wir nur

$$\varrho = \frac{\left(1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}} \qquad (10)$$

zu setzen haben.

§. 83. Wir bemerken noch, daß, wenn der Punkt $x_1 y_1$ zum Anfangspunkte der Coordinaten, die Tangente der Curve in diesem Punkte zur Abscissenachse und also die Normale zur Ordinatenachse genommen wird, so daß $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ und $\frac{dy_1}{dx_1} = 0$ ist, die Ausdrücke (8 u. 10) sich in

$$\beta = \frac{1}{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}} \quad ; \quad \alpha = 0 \quad ; \quad \varrho = \frac{1}{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}}$$

verwandeln.

II. Es seyen $F(u, t) = 0$ die Polar-Gleichung der gegebenen Curve und t_1, u_1 die Polarcoordinaten eines gegebenen Punktes derselben.

Bezeichnen wir die Polarcoordinaten des Krümmungsmittelpunktes durch γ und δ, so haben wir

$$y = u\sin t \quad ; \quad x = u\cos t \quad ; \quad \beta = \delta\sin\gamma \quad ; \quad \alpha = \delta\cos\gamma .$$

Daraus folgt

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt}\sin t + u\cos t \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\cos t - u\sin t ,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2}\sin t + 2\frac{du}{dt}\cos t - u\sin t \; ; \; \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2}\cos t - 2\frac{du}{dt}\sin t - u\cos t ,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{du}{dt}\sin t + u\cos t}{\frac{du}{dt}\cos t - u\sin t} ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\frac{dx^3}{dt^3}} = \frac{u^2 + 2\frac{du^2}{dt^2} - u\frac{d^2u}{dt^2}}{\left(\frac{du}{dt}\cos t - u\sin t\right)^3} .$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in (8) ergiebt sich

$$\delta\sin\gamma = \frac{\left(u_1\frac{du_1^2}{dt_1^2} - u_1^2\frac{d^2u_1}{dt_1^2}\right)\sin t_1 + \left(\frac{du_1^3}{dt_1^3} + u_1^2\frac{du_1}{dt_1}\right)\cos t_1}{u_1^2 + 2\frac{du_1^2}{dt_1^2} - u_1\frac{d^2u_1}{dt_1^2}} ,$$

$$\delta\cos\gamma = \frac{\left(u_1\frac{du_1^2}{dt_1^2} - u_1^2\frac{d^2u_1}{dt_1^2}\right)\cos t_1 - \left(\frac{du_1^3}{dt_1^3} + u_1^2\frac{du_1}{dt_1}\right)\sin t_1}{u_1^2 + 2\frac{du_1^2}{dt_1^2} - u_1\frac{d^2u_1}{dt_1^2}} ,$$

und, wenn man quadrirt und addirt, §. 83.

$$\delta^2 = \frac{u_1^2\left(\frac{du_1^2}{dt_1^2} - u_1\frac{d^2u_1}{dt_1^2}\right)^2 + \frac{du_1^2}{dt_1^2}\left(\frac{du_1^2}{dt_1^2} + u_1^2\right)^2}{\left(u_1^2 + 2\frac{du_1^2}{dt_1^2} - u_1\frac{d^2u_1}{dt_1^2}\right)^2}\ ; \qquad (11)$$

ferner, wenn man dividirt,

$$tang\,\gamma = \frac{tang\,t_1 + \frac{\frac{du_1^3}{dt_1^3} + u_1^2\frac{du_1}{dt_1}}{u_1\frac{du_1^2}{dt_1^2} - u_1^2\frac{d^2u_1}{dt_1^2}}}{1 - \frac{\frac{du_1^3}{dt_1^3} + u_1^2\frac{du_1}{dt_1}}{u_1\frac{du_1^2}{dt_1^2} - u_1^2\frac{d^2u_1}{dt_1^2}} \cdot tang\,t_1}\ , \qquad (12)$$

oder, wenn wir

$$\frac{\frac{du_1^3}{dt_1^3} + u_1^2\frac{du_1}{dt_1}}{u_1\frac{du_1^2}{dt_1^2} - u_1^2\frac{d^2u_1}{dt_1^2}} = tang\,\vartheta_1 \qquad (13)$$

setzen,

$$tang\,\gamma = \frac{tang\,t_1 + tang\,\vartheta_1}{1 - tang\,t_1\,tang\,\vartheta_1} = tang\,(t_1 + \vartheta_1)\ ,$$

also

$$\gamma = t_1 + \vartheta_1\ . \qquad (14)$$

Ferner ergiebt sich aus (9)

$$\varrho = \pm\frac{\left(u_1^2 + \frac{du_1^2}{dt_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{u_1^2 + 2\frac{du_1^2}{dt_1^2} - u_1\frac{d^2u_1}{dt_1^2}}\ . \qquad (15)$$

III. Der Ausdruck des Krümmungsradius in einem Punkte einer Curve, deren Gleichung in schiefwinkligen Coordinaten gegeben ist, kann eben so wie der Ausdruck in I. hergeleitet werden. Man findet auf diese Weise, wenn α den Coordinatenwinkel bedeutet,

$$\varrho = \frac{\left(1 + 2\cos\alpha\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{dy_1^2}{dx_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}\sin\alpha}\ ; \qquad (16)$$

§. 83. und wenn der Punkt x_1y_1 zum Anfangspunkte, die Tangente in diesem Punkte aber zur Abscissenachse genommen wird,

$$\varrho = \frac{1}{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}\sin\alpha} . \qquad (17)$$

§. 84.

Aufgabe [139]. Die Gleichungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel und die Coordinaten eines Punktes dieser Curven sind gegeben. Man soll den Ausdruck für den Krümmungsradius des eben genannten Punktes finden.

I. Es sey

$$a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2$$

die gegebene Gleichung der Ellipse, und x_1, y_1 seyen die gegebenen Coordinaten. Durch Differentiation ergiebt sich

$$a^2y\frac{dy}{dx}+b^2x = 0 ,$$

$$a^2y\frac{d^2y}{dx^2}+a^2\frac{dy^2}{dx^2}+b^2 = 0 ,$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} \quad ; \quad 1+\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3}$$

oder, zufolge der gegebenen Gleichung,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3} .$$

Setzt man nun $x = x_1$ und $y = y_1$, so ergiebt sich aus der Formel (10) des vorigen §.

$$\varrho = \frac{(a^4y_1^2+b^4x_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} = \frac{(a^4-e^2x_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b} . \qquad (1)$$

II. Es sey

$$a^2y^2-b^2x^2 = -a^2b^2$$

die gegebene Gleichung der Hyperbel. Da diese Gleichung aus der der Ellipse hervorgeht, wenn man $b\sqrt{-1}$ für b setzt, so brauchen wir die Rechnung nicht von Neuem anzufangen, sondern nur in (1.) dieselbe Substitution zu machen. Dies giebt

$$\varrho = \frac{(a^4y_1^2+b^4x_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} = \frac{(e^2x_1^2-a^4)^{\frac{3}{2}}}{a^4b} . \qquad (2)$$ §. 84.

III. Es ſey

$$y^2 = px$$

die gegebene Gleichung der Parabel. Durch Differenciation ergiebt ſich

$$2y\frac{dy}{dx} = p \quad ; \quad y\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2} = 0 ;$$

alſo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y} ; \; 1+\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{4y^2+p^2}{4y^2} = \frac{4x+p}{4x} ; \; \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{4y^3} = -\frac{p^2}{4x^{\frac{3}{2}}} .$$

Demnach iſt

$$\varrho = \frac{(4x_1+p)^{\frac{3}{2}}}{2p^{\frac{1}{2}}} . \qquad (3)$$

Führt man in dieſe Ausdrücke die Länge der Normale des Punktes x_1y_1 ein, die wir durch n bezeichnen wollen, und nennt den Parameter der Ellipſe oder Hyperbel (§. 33.) p, ſo ergiebt ſich, vermittelſt der in §. 35. aufgeſtellten Ausdrücke, für alle drei genannten Curven

$$\varrho = \frac{4n^3}{p^2} . \qquad (4)$$

Aufgabe [140]. Es ſollen Ausdrücke für die Krümmungsradien an den nachbenannten Curven gefunden werden.

I. An der Ciſſoide.

Wir haben (§. 59. S. 8), wenn $c = 2r$, in rechtwinkligen Coordinaten

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(2r-x)^{\frac{1}{2}}} .$$

Daraus $\frac{dy}{dx} = \frac{(3r-x)x^{\frac{1}{2}}}{(2r-x)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3r^2}{(2r-x)^{\frac{5}{2}}x^{\frac{1}{2}}}$; und demnach

$$\varrho = \frac{r(8r-3x_1)^{\frac{3}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}}{3(2r-x_1)^2} . \qquad (5)$$

II. An der Conchoide.

Wir haben in Polarcoordinaten (§. 60. S. 8)

$$u = \frac{b+a\sin t}{\sin t} .$$

§. 84. Daraus $\frac{du}{dt} = -\frac{b\cos t}{\sin^2 t}$; $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{b(1+\cos^2 t)}{\sin^3 t}$; und demnach

$$\varrho = \frac{(b^2+2ab\sin^2 t_1+a^2\sin^4 t_1)^{\frac{3}{2}}}{(a^2\sin^3 t_1+3ab\sin^2 t_1-2ab)\sin^3 t_1} . \qquad (6)$$

III. An der Lemniscate.

Wir haben in Polarcoordinaten (§. 62. S. 3)

$$u^2 = a^2\cos 2t .$$

Daraus $u\frac{du}{dt} = -a^2\sin 2t$; $u\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du^2}{dt^2} = -2a^2\cos 2t$; und demnach

$$\varrho = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2t_1}} = \frac{a^2}{3u_1} . \qquad (7)$$

IV. An der logarithmischen Linie.

Wir haben in rechtwinkligen Coordinaten (§. 64. S. 4)

$$y = me^{\frac{x}{m}} .$$

Daraus $\frac{dy}{dx} = e^{\frac{x}{m}}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{m}e^{\frac{x}{m}}$; und demnach

$$\varrho = \frac{m(1+e^{\frac{2x_1}{m}})^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{x_1}{m}}} = \frac{(m^2+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{my_1} . \qquad (8)$$

V. An der Kettenlinie.

Wir haben in rechtwinkligen Coordinaten (§. 64. S. 5)

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}\right) .$$

Daraus $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}\right)$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2m}\left(e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}\right)$; und demnach

$$\varrho = m\left(\frac{e^{\frac{x_1}{m}}+e^{-\frac{x_1}{m}}}{2}\right)^2 = \frac{y_1^2}{m} . \qquad (9)$$

VI. An der Cycloide.

Wir haben in rechtwinkligen Coordinaten (§. 66. S. 4)

$$x = a \cdot arc\left(cos = \frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2} \; . \qquad \text{§. 84.}$$

Daraus $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2a-y}}{y^{\frac{1}{2}}}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-a}{y^{\frac{3}{2}}\sqrt{2a-y}} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{y^2}$; und demnach

$$\varrho = 2\sqrt{2ay_1} \; . \qquad (10)$$

VII. An der Epicycloide oder Hypocycloide.
Wir haben (§. 67. G. 1 u. 2)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (r \pm a) cos\, t \mp a \, cos \frac{r \pm a}{a} . t \\ y = (r \pm a) sin\, t - a \, sin \frac{r \pm a}{a} . t \end{array} \right\} .$$

Daraus, wie in §. 72. (Aufg. 116. IX.), zunächst

$$\frac{dy}{dx} = \pm tang \frac{r \pm 2a}{2a} . t \; ;$$

und

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\pm 1}{2(r \pm a) sin \frac{r}{2a} . t \, cos \frac{r \pm 2a}{2a} . t} \; ;$$

ferner

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{r \pm 2a}{2a \, cos^2 \frac{r \pm 2a}{2a} . t} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{r \pm 2a}{4a(r \pm a) cos^3 \frac{r \pm 2a}{2a} . t \; sin \frac{r}{2a} . t} \; ;$$

und demnach

$$\varrho = \frac{4a(r \pm a)}{r \pm 2a} . sin \frac{r}{2a} t_1 \; . \qquad (11)$$

VIII. An der archimedischen Spirale.
Wir haben in Polarcoordinaten (§. 68. G. 1)

$$u = rt \; .$$

Daraus $\frac{du}{dt} = r$; $\frac{d^2u}{dt^2} = 0$; demnach

$$\varrho = \frac{(r^2 + u_1^2)^{\frac{3}{2}}}{2r^2 + u_1^2} = r \cdot \frac{(1 + t_1^2)^{\frac{3}{2}}}{2 + t_1^2} \; . \qquad (12)$$

IX. An der hyperbolischen Spirale.
Wir haben in Polarcoordinaten (§. 68. G. 3)

§. 84. $$ut = r\alpha .$$

Daraus $\frac{du}{dt} = -\frac{r\alpha}{t^2}$; $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{2r\alpha}{t^3}$; und demnach

$$\varrho = r.\frac{\alpha(1+t_1^2)^{\frac{3}{2}}}{t_1^4} = \frac{u_1(u_1^2+r^2\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{r^3\alpha^3} . \qquad (13)$$

X. An der logarithmiſchen Spirale.

Wir haben in Polarcoordinaten (§. 68. S. 5)

$$u = re^{\frac{t}{m}} .$$

Daraus $\frac{du}{dt} = \frac{r}{m}.e^{\frac{t}{m}} = \frac{u}{m}$; $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{r}{m^2}.e^{\frac{t}{m}} = \frac{u}{m^2}$; und demnach

$$\varrho = u_1\sqrt{1+\frac{1}{m^2}} . \qquad (14)$$

§. 85.

Um den Krümmungsmittelpunkt eines gegebenen Punktes einer Curve geometriſch zu beſtimmen, kann man die Ausdrücke für ſeine Coordinaten (§. 83.) conſtruiren, oder die Länge des Krümmungsradius ſuchen, und ſie dann auf der Normale des gegebenen Punktes, von dieſem an, abſchneiden. In vielen Fällen bieten ſich aber noch einfachere Mittel zur geometriſchen Beſtimmung des Krümmungsmittelpunkts dar; wie dies z. B. bei den folgenden Aufgaben Statt findet.

Aufgabe [141]. Den Krümmungsmittelpunkt der Linien zweiten Grades zu finden.

I. Es ſey die gegebene Curve eine Parabel und ihre Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten

$$y^2 = px .$$

Die Gleichung der Normale in einem Punkte x_1y_1 der Curve iſt

$$(y-y_1)p+2(x-x_1)y_1 = 0 ,$$

und die der Leitlinie (§. 33.)

$$4x+p = 0 .$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Durchſchnitts der beiden eben genannten Geraden durch x_2, y_2, ſo findet man aus deren Gleichungen $x_2 = -\frac{1}{4}p$;

also $x_1 - x_2 = \frac{1}{4}p + x_1$, und $y_2 - y_1 = \frac{2y_1}{p}(\frac{1}{4}p + x_1)$. Daraus ergiebt §. 85.
sich für die Länge des Stückes der Normale, welches von der Leitlinie und der Curve begrenzt wird,

$$\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}p+x_1)^2\left(1+\frac{4y_1^2}{p^2}\right)},$$

oder, wenn man für $\frac{4y_1^2}{p^2}$ seinen Werth $\frac{4x_1}{p}$ setzt,

$$\frac{(p+4x_1)^{\frac{3}{2}}}{4p^{\frac{1}{2}}}.$$

Dieses Stück ist also halb so groß als der Krümmungsradius im Punkte x_1y_1 (§. 84. G. 3); woraus sich denn ergiebt, daß man, um den Krümmungsmittelpunkt zu bestimmen, nur das Stück der Normale, welches zwischen der Parabel und ihrer Leitlinie liegt, doppelt genommen auf der andern Seite der Normale abzuschneiden braucht.

II. Es sey die gegebene Curve eine Ellipse. Nehmen wir die Tangente in einem Punkte zur Abscissenachse und den durch diesen Punkt gehenden Durchmesser zur Ordinatenachse; so ist die Gleichung der Curve, wenn wir diesen Durchmesser durch $2a'$ und seinen conjugirten durch $2b'$ bezeichnen,

$$b'^2y^2 + a'^2x^2 - 2b'^2a'y = 0;$$

und daraus erhalten wir

$$b'^2(y-a')\frac{dy}{dx} + a'^2x = 0 \quad ; \quad b'^2(y-a')\frac{d^2y}{dx^2} + b'^2\frac{dy^2}{dx^2} + a'^2 = 0;$$

also, für $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$, $\frac{dy_1}{dx_1} = 0$ und $\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{a'}{b'^2}$. Bezeichnen wir nun den Coordinatenwinkel, d. i. den von den genannten Durchmessern eingeschlossenen Winkel, durch α, so ist (§. 83. F. 17.)

$$\varrho = \frac{1}{\frac{d^2y_1}{dx_1^2}\sin\alpha} = \frac{b'^2}{a'\sin\alpha}.$$

Es ist aber $a'\sin\alpha$ offenbar die Entfernung des in Rede stehenden Punktes von dem seiner Tangente parallelen Durchmesser $2b'$, und daher ist der Krümmungsradius ϱ die dritte Proportionale zu dieser Entfernung und der Hälfte des Durchmessers $2b'$, wonach sich denn dieser Krümmungsradius leicht construiren, und also der Krümmungsmittelpunkt leicht bestimmen läßt.

§. 85. Für die Hyperbel ergiebt sich eine ähnliche Construction.

III. Eine Construction des Krümmungskreises in irgend einem Punkte P einer Linie zweiten Grades läßt sich ohne Rechnung auf folgende Weise herleiten.

Alle Kreise, welche durch dieselben zwei, auf einer Linie zweiten Grades liegende, Punkte gehen, können diese Curve außer in diesen Punkten nur noch so schneiden, daß die Verbindungslinien von je zwei neuen Durchschnitten eines und desselben Kreises einander parallel sind (§. 47. Lehrs. 27.). Dieser Parallelismus findet offenbar auch dann Statt, wenn jene Kreise die Linie zweiten Grades in einem und demselben Punkte P berühren. Unter diesen, die Curve in einem Punkte P berührenden, Kreisen ist nun der Krümmungskreis derjenige, für welchen, von den beiden andern Durchschnittspunkten, wenigstens einer mit dem Berührungspunkte zusammenfällt, da der Krümmungskreis mit der Curve einen Contact zweiter Ordnung hat und der Berührungspunkt also als der Vereinigungspunkt von drei Durchschnitten anzusehen ist (§. 81.); die genannte Verbindungslinie geht also für den Krümmungskreis durch den Berührungspunkt; und hieraus erhellet die Richtigkeit der folgenden Construction.

Man nehme auf der gegebenen Linie zweiten Grades einen Punkt p′ beliebig an. Lege durch ihn und durch den Punkt P einen Kreis, welcher die Tangente in P berührt. Dieser Kreis wird die Curve in einem zweiten Punkte p″ schneiden. Durch P ziehe man eine der Geraden p′p″ Parallele. Schneidet diese Parallele die Curve in einem zweiten Punkte Q, so lege man durch P und Q einen Kreis, welcher die Tangente in P berührt. Dieser Kreis ist der Krümmungskreis im Punkte P der Curve *). Wenn die durch P der p′p″ parallel gezogene Gerade mit der Tangente in P zusammen fallen sollte, so würde kein Durchschnittspunkt Q weiter Statt finden, d. h. der Punkt Q würde mit P zusammenfallen. Dann kann diese Construction nicht angewendet werden, und dies ist namentlich aber auch einzig und allein dann der Fall, wenn der Punkt P ein Scheitel der Curve ist, weil in einem Scheitel der Krümmungskreis nicht nur einen Contact zweiter, sondern auch dritter Ordnung hat.

Aufgabe [142]. Den Krümmungskreis an den nachbenannten Curven zu construiren.

---

*) Diese Construction hat Hr. Poncelet zuerst gegeben.

I. An der Cissoide. §. 85.

Zufolge des Lehrsatzes (44) in §. 63. schneidet jeder Kreis C_1, welcher durch den Doppelpunkt p_1 der Curve und durch diejenigen beiden Punkte der Curve gelegt wird, in welchen ein durch irgend zwei feste Punkte der Curve gehender Kreis diese nochmals schneidet, sie in zwei Punkten so, daß der Kreis, welcher durch diese letzten Punkte und durch den Doppelpunkt p_1 gelegt wird, im Punkte p_1 eine Tangente hat, die einer bestimmten Richtung parallel ist. Dieser Parallelismus findet auch noch Statt, wenn die beiden festen Punkte und einer der beiden andern Durchschnitte in einem Punkte P der Cissoide zusammenfallen, in welchem Falle der durch diese Punkte gehende Kreis zum Krümmungskreis im Punkte P wird. Hieraus ergiebt sich folgende Construction.

Es sey P der gegebene Punkt der Cissoide, in welchem der Krümmungskreis construirt werden soll. Man nehme auf der Curve einen Punkt p' beliebig an, und lege durch ihn einen Kreis C_1, welcher die Tangente in P berührt. Dieser Kreis C_1 wird die Curve in einem zweiten Punkte p'' schneiden. Durch die Punkte p', p'' und durch den Doppelpunkt p_1 der Curve lege man einen zweiten Kreis C_2, und durch den gegebenen Punkt P einen dritten C_3, welcher den Kreis C_2 in p_1 berührt, so wird dieser Kreis C_3 die Curve noch in einem Punkte Q schneiden. Legt man nun durch Q einen Kreis C_4, welcher den Kreis C_1 in P, oder, was dasselbe ist, die Tangente in P berührt, so ist dieser Kreis C_4 der Krümmungskreis in P.

II. An der Lemniscate oder an der Cardioide.

Die Construction kann wie an der Cissoide gemacht werden. Für die Lemniscate kann man auch den Ausdruck für den Krümmungsradius (§. 84. F. 7.) benutzen, indem man diese Länge construirt und sie auf der Normale abschneidet. Für die Cardioide, welche eine Epicycloide ist (§. 67.), kann auch die Construction, welche wir in VI. geben werden, angewendet werden.

III. An der logarithmischen Linie.

Es sey P ein Punkt dieser Curve, PT die Tangente, PN die Normale und PQ die Ordinate, so ist $QT = m$ (§. 72. Aufg. 116.), also $PT = \sqrt{m^2+y_1^2}$. Fällt man von Q auf PN die Senkrechte QM, so ist $PM = \frac{my_1}{\sqrt{m^2+y_1^2}}$; und da $\varrho = \frac{(\sqrt{m^2+y_1^2})^3}{my_1}$ seyn muß (§. 84.), so ergiebt sich folgende Construction. Man fälle vom Fußpunkte Q der Ordinate PQ Fig. 45.

§. 85. die Senkrechte QM auf die Normale. Man verbinde den Endpunkt T der Tangente PT mit M und errichte in T auf TM eine Senkrechte, so wird diese die Normale in dem Krümmungsmittelpunkt R des Punktes P schneiden.

IV. An der Kettenlinie.

Aus der Gleichung (§. 64. S. 5)

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)$, und daher ist (§. 71. F. 12.)

$$\text{die Normale} = y_1\sqrt{1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2}} = y_1\left(\frac{e^{\frac{x_1}{m}} + a^{-\frac{x_1}{m}}}{2}\right) = \frac{y_1^2}{m}.$$

Die Normale ist also dem Krümmungsradius gleich (§. 84. F. 9.); daher braucht man nur die Länge der Normale in entgegengesetztem Sinne auf ihrer Richtung abzuschneiden, um den Krümmungsmittelpunkt zu haben.

V. An der Cycloide.

Wir haben, wie in (§. 84. Aufg. 140.), $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2a-y}}{y^{\frac{1}{2}}}$ und daraus

$$\text{die Normale} = y_1\sqrt{1+\frac{dy_1^2}{dx_1^2}} = \sqrt{2ay_1}.$$

Der Krümmungsradius ist also doppelt so groß als diese Normale (§. 84. F. 10.), woraus sich die Construction des Krümmungskreises leicht ergiebt.

VI. An der Epicycloide und Hypocycloide.

Fig. 58. Es sey C der Mittelpunkt des festen, O derjenige des rollenden Kreises und P ein Punkt der erzeugten Curve, M aber der Berührungspunkt beider Kreise. Man ziehe den Halbmesser CM, der (verlängert) durch O geht und den rollenden Kreis noch einmal in V schneidet; mache VW gleich CM; ziehe PW und dieser durch C die Parallele CQ; endlich ziehe man MP; so ist der Durchschnitt R der Geraden CQ und MP der Krümmungsmittelpunkt.

Wenn nämlich A derjenige Punkt des festen Kreises ist, auf welchen P im Anfange der Bewegung lag, und der Winkel ACM durch t_1 bezeichnet wird, wenn ferner CM = r und OM = a; so ist die Sehne MP

$= 2a \sin\frac{r}{2a} \cdot t_1$, ferner $CW = 2(r \pm a)$, $MW = r \pm 2a$. Da nun, §. 85. wegen des Parallelismus von PW und CR, $\overline{PR} = \frac{\overline{CW} \cdot \overline{MP}}{\overline{MW}}$, so ist

$$\overline{PR} = \frac{4a(r \pm a)}{r \pm 2a} \cdot \sin\frac{r}{2a} t_1 ,$$

also PR der Krümmungsradius (§. 84. F. 11.) und R der Krümmungsmittelpunkt.

VII. An der archimedischen Spirale.

Es sey P der Punkt, an welchem der Krümmungskreis construirt werden soll. Wir setzen die Figur, welche wir zu Ende des §. 67. erklärt haben, als construirt voraus, und ziehen DP; errichten auf DP in D eine Senkrechte, welche die verlängerte PS in Q schneidet, und ziehen OQ, so ist der Durchschnitt R der Geraden DP und OQ der Krümmungsmittelpunkt vom Punkte P. Fig. 53.

Bezeichnen wir OP durch u_1, so ist auch $DS = u_1$; ferner ist $OD = PS = r$ und, wegen der rechten Winkel bei D und S, $SQ = \frac{u_1^2}{r}$, also $PQ = r + \frac{u_1^2}{r} = \frac{r^2 + u_1^2}{r}$ und $tang\, POQ = \frac{PQ}{OP} = \frac{r^2 + u_1^2}{r u_1}$. Nun ist aber, weil POD ein rechter Winkel und $OD = r$, zufolge der Aufgabe (117; II.) (§. 72.), OD die Polarsubnormale des Punktes P, also PD die Richtung der Normale dieses Punktes. Ferner haben wir $\frac{du}{dt} = r$ und $\frac{d^2u}{dt^2} = 0$, also, nach §. 83. F. 13., $tang\, \vartheta_1 = \frac{r^2 + u_1^2}{r u_1}$, Folglich ist $tang\, POQ = tang\, \vartheta_1$, demnach Winkel $POQ = \vartheta_1$, und somit der Durchschnitt R von OQ und der Normale PD der Krümmungsmittelpunkt.

VIII. An der logarithmischen Spirale.

Der Endpunkt der Polarsubnormale ist der Krümmungsmittelpunkt. Da nämlich die Polarsubnormale gleich $\frac{u_1}{m}$ (§. 72.) ist, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Catheten der Radius vector und die Polarsubnormale sind, die Hypotenuse gleich $\sqrt{u_1^2 + \frac{u_1^2}{m^2}} = u_1 \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}$ und folglich dem Krümmungsradius gleich (§. 84. F. 14.).

§. 86.

§. 86.

Im §. 78. haben wir gesehen, daß die kleinste oder größte Linie, welche von einem gegebenen Punkte an eine gegebene Curve gezogen werden kann, im Allgemeinen die durch diesen Punkt an die Curve gelegte Normale sey. Es giebt aber auf der Normale eines jeden Punktes P einer Curve einen bestimmten Punkt A, der so liegt, daß die Entfernung AP im Allgemeinen weder ein Maximum noch ein Minimum ist.

Aufgabe [143]. Es soll derjenige Punkt einer Normale gefunden werden, welcher auf derselben eine Länge bestimmt, die weder ein Maximum noch ein Minimum sey.

Wir stellen uns eine Curve auf rechtwinklige Achsen bezogen vor, bezeichnen die Coordinaten eines bestimmten Punktes derselben durch x_1, y_1 und diejenigen des, auf der durch den Punkt x_1y_1 gehenden Normale liegenden, gesuchten Punktes durch α, β; die Entfernung der beiden Punkte x_1y_1 und $\alpha\beta$ aber bezeichnen wir durch v_1. Alsdann ist

$$v_1^2 = (y_1-\beta)^2+(x_1-\alpha)^2 , \qquad (1)$$

und weil der Punkt $\alpha\beta$ auf der durch den Punkt x_1y_1 gehenden Normale liegt,

$$(y_1-\beta)\frac{dy_1}{dx_1}+(x_1-\alpha) = 0 , \qquad (2)$$

also $\frac{d(v_1^2)}{dx_1} = 0$. Es wäre somit v_1^2 ein Maximum oder Minimum, d. h. es wäre die Entfernung eines jeden Punktes $\alpha\beta$ der Normale von ihrem Endpunkte x_1y_1 größer oder kleiner als die Entfernung des Punktes $\alpha\beta$ von einem dem Punkte x_1y_1 nahe gelegenen Punkte xy der Curve, wenn nicht $\frac{d^2(v_1^2)}{dx_1^2} = 0$. Soll also kein Maximum und Minimum hier Statt finden, so muß $\frac{d^2(v_1^2)}{dx_1^2} = 0$, d. i.

$$(y_1-\beta)\frac{d^2y_1}{dx_1^2}+\frac{dy_1^2}{dx_1^2}+1 = 0 \qquad (3)$$

seyn. Es müssen also die Coordinaten α, β des gesuchten Punktes solche Werthe haben, daß sie die Gleichungen (2) und (3) befriedigen. Diese Gleichungen stimmen aber mit den Gleichungen (6) und (7) des §. 83. überein, und die Coordinaten α, β sind also diejenigen des Krümmungsmittelpunk-

punktes. Demnach ist der Krümmungsmittelpunkt des Punktes x_1y_1 der gesuchte Punkt, wenn nicht etwa, was nur in besondern Fällen Statt finden kann, $\frac{d^2(v_1^2)}{dx_1^2} = 0$, d. i. $(y_1-\beta)\frac{d^3y_1}{dx_1^3}+3\frac{dy_1}{dx_1}\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 0$ ist. §. 86.

§. 87.

Die Krümmungsmittelpunkte aller Punkte einer Curve C bilden in ihrer Continuität eine Curve E, welche die Evolute der Curve C genannt wird, während die Curve C die Evolvente der Curve E heißt. (Den Grund dieser Benennungen werden wir später angeben.)

Aufgabe [144]. Die Gleichung einer Curve ist gegeben; man soll die Gleichung ihrer Evolute finden.

I. Es sey

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten. Bezeichnen wir die auf dasselbe Coordinatensystem bezogenen Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes eines Punktes xy der gegebenen Curve durch α, β, so haben wir, in Folge der Gleichungen (6 u. 7) in §. 83.,

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx}+(x-\alpha) = 0, \qquad (2)$$

$$(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}+1 = 0. \qquad (3)$$

Die Gleichung (1) giebt aber durch Differentiation

$$\left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{dx^2}+2\left(\frac{d^2F}{dydx}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right) = 0, \qquad (5)$$

und eliminirt man zwischen diesen fünf Gleichungen die vier Größen x, y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, so ergiebt sich eine Gleichung in α und β, welche die der Evolute ist.

II. Es sey

$$F(t, u) = 0 \qquad (6)$$

die Polargleichung der gegebenen Curve, und γ, δ seyen die Polarcoor-

§. 87. dinaten des, einem Punkte tu der Curve zugehörigen, Krümmungsmittelpunktes.

Wir haben alsdann, zufolge §. 83. (S. 11, 13 u. 14)

$$\left(u^2+2\frac{du^2}{dt^2}-u\frac{d^2u}{dt^2}\right)^2.\delta^2 = u^2\left(\frac{du^2}{dt^2}-u\frac{d^2u}{dt^2}\right)^2+\frac{du^2}{dt^2}\left(u^2+\frac{du^2}{dt^2}\right)^2, \quad (7)$$

$$u\left(\frac{du^2}{dt^2}-u\frac{d^2u}{dt^2}\right).tang\,\vartheta = \frac{du}{dt}\left(u^2+\frac{du^2}{dt^2}\right), \quad (8)$$

$$\gamma = t+\vartheta, \quad (9)$$

und wenn wir zwischen den vier Gleichungen (6, 7, 8 u. 9) und den beiden Differentialgleichungen der Gleichung (6) die fünf Größen t, u, ϑ, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$ eliminiren; so erhalten wir eine Gleichung in γ und δ, welche die Polargleichung der Evolute ist.

Ehe wir zu Beispielen übergehen, wollen wir noch Folgendes bemerken. Die vier Größen x, y, α und β hängen, in Folge der Gleichungen (1 bis 5) so von einander ab, daß wenn einer derselben ein bestimmter Werth beigelegt wird, die andern drei ebenfalls bestimmte Werthe bekommen. Es sind daher je drei dieser Größen Functionen der vierten, welche als unabhängige Veränderliche anzusehen ist. Wählt man α zu dieser Unabhängigen, und differentiirt die Gleichung (2) aus diesem Gesichtspunkte, so kommt

$$\left\{(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}+1\right\}\frac{dx}{d\alpha}-\left\{\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{dy}{dx}+1\right\} = 0,$$

eine Gleichung, welche sich, in Folge von (3), auf

$$\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{dy}{dx}+1 = 0$$

reducirt. Eliminiren wir nun $\frac{dy}{dx}$ zwischen dieser letzten Gleichung und der Gleichung (2), so kommt

$$y-\beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha) \quad (10)$$

Da aber die Gleichung (2), wenn α und β als laufende Coordinaten angesehen werden, die Normale der Curve (1) im Punkte xy ausdrückt, die Gleichung (10) hingegen, wenn x und y als laufende Coordinaten betrachtet werden, die Tangente der Evolute im Punkte $\alpha\beta$ bedeutet; so folgt, daß jede Normale der Evolvente eine Tangente der Evolute, und daß der Krümmungsmittelpunkt an der erstern der Berührungspunkt an der letztern sey.

§. 88. §. 88.

Aufgabe [145]. Die Evolute der Parabel, Ellipse und Hyperbel zu finden.

I. Es sey

$$y^2 = px$$

die Gleichung der Parabel, woraus wir

$$2y\frac{dy}{dx} = p \quad ; \quad y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} = 0 ,$$

folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{4y^3}$ erhalten. Substituiren wir diese Ausdrücke in die Gleichungen (2 u. 3) des vorigen §., so kommt

$$p(y-\beta) + 2(x-\alpha)y = 0 \quad ; \quad 4y^2 + p^2\beta = 0 .$$

Elimiiren wir zwischen diesen Gleichungen und der Gleichung der Parabel die Größen x und y, so erhalten wir

$$27p\beta^2 = 16(\alpha - \tfrac{1}{2}p)^3 \qquad (1)$$

als Gleichung der Evolute.

Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach einem Punkte der Abscissenachse, dessen Entfernung vom Scheitel der Parabel ihrem halben Parameter gleich ist, indem wir die neuen Coordinaten durch α', β' bezeichnen, und also $\beta = \beta'$, $\alpha = \alpha' + \frac{1}{2}p$ setzen, so nimmt die gefundene Gleichung die Form

$$27p\beta'^2 = 16\alpha'^3 \qquad (1')$$

an. Die Evolute der Parabel ist also eine Neilische Parabel (§. 58. S. 6).

II. Es sey

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

die Gleichung der Ellipse, aus welcher wir $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$ erhalten. Die Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen (2 u. 3) des vorigen §. giebt

$$b^2(y-\beta)x = a^2(x-\alpha)y ,$$
$$a^2b^4(y-\beta) = (b^4x^2 + a^4y^2)y ,$$

und die letzte dieser beiden Gleichungen verwandelt sich, wenn man für x^2 seinen Werth aus der Gleichung der Ellipse setzt, in

§. 88.

$$-b^4\beta = (a^2-b^2)y^3 ,$$

woraus $y = -\frac{b^{\frac{4}{3}}}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{3}}}\cdot\beta^{\frac{1}{3}}$ folgt. Eliminirt man aber zwiſchen den beiden Gleichungen $(y-\beta)$, ſo erhält man

$$a^4b^2(x-\alpha) = (b^4x^2+a^4y^2)x ,$$

woraus, nachdem für y^2 ſein Werth aus der Gleichung der Ellipſe geſetzt iſt, ſich $x = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{3}}}\cdot\alpha^{\frac{1}{3}}$ ergiebt. Die für y und x gefundenen Ausdrücke in die Gleichung der Ellipſe ſubſtituirt, geben

$$\frac{b^{\frac{2}{3}}}{e^{\frac{4}{3}}}\cdot\beta^{\frac{2}{3}} + \frac{a^{\frac{2}{3}}}{e^{\frac{4}{3}}}\cdot\alpha^{\frac{2}{3}} = 1 \qquad (2)$$

als Gleichung der Evolute, wo e^2 für a^2-b^2 geſetzt iſt. Wird dieſe Gleichung rational gemacht, ſo kommt

$$(b^2\beta^2+a^2\alpha^2-e^4)^3+27a^2b^2e^4\alpha^2\beta^2 = 0 . \qquad (3)$$

III. Es ſey

$$a^2y^2-b^2x^2 = -a^2b^2$$

die Gleichung der Hyperbel. Um die Gleichung der Evolute zu erhalten braucht man nur in der Gleichung der Evolute der Ellipſe, b mit $b\sqrt{-1}$ zu vertauſchen. Dies giebt

$$\frac{b^{\frac{2}{3}}}{e^{\frac{4}{3}}}\cdot\beta^{\frac{2}{3}} - \frac{a^{\frac{2}{3}}}{e^{\frac{4}{3}}}\cdot\alpha^{\frac{2}{3}} = -1 \qquad (4)$$

oder

$$(b^2\beta^2-a^2\alpha^2+e^4)^3+27a^2b^2e^4\alpha^2\beta^2 = 0 , \qquad (5)$$

wo $e^2 = a^2+b^2$ iſt.

Aufgabe [146]. Die Evoluten nachbenannter Curven zu finden.

I. Die Evolute der Ciſſoide.

Setzt man die bereits in §. 84. (Aufg. 140. I.) angegebenen Ausdrücke für y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die Gleichungen (2 u. 3) des vorigen §., und eliminirt ſodann x; ſo kommt

$$4096r^3\alpha+1152r^2\beta^2+27\beta^4 = 0 \qquad (6)$$

als die Gleichung der Evolute.

II. Die Evolute der Lemniscate. §. 88

Wir nehmen die Polargleichung dieſer Curve, als die einfachere (§. 62. G. 3),

$$u^2 = a^2 \cos 2t \ ,$$

und differentiiren ſie, wodurch wir

$$\frac{du}{dt} = -\frac{a \sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}} \ ; \quad \frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{a(1+\cos^2 2t)}{\cos^{\frac{3}{2}} 2t}$$

erhalten. Daraus ergiebt ſich

$$\frac{du^2}{dt^2} - u\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{2a^2}{\cos 2t} \ ; \ \frac{du^2}{dt^2} + u^2 = \frac{a^2}{\cos 2t} \ ; \ u^2 + 2\frac{du^2}{dt^2} - u\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{3a^2}{\cos 2t} \ ;$$

und, wenn wir dieſe Ausdrücke in die Gleichungen (11) und (13) des §. 83. ſubſtituiren,

$$\delta^2 = \frac{a^2(1+3\cos^2 2t)}{9\cos 2t} \quad ; \quad \operatorname{tang} \vartheta = -\frac{\sin 2t}{\cos 2t} \ .$$

Setzen wir dieſen Ausdruck von $\operatorname{tang}\vartheta$ in die Gleichung (14) des §. 83., nämlich in

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{tang} t + \operatorname{tang}\vartheta}{1 - \operatorname{tang} t \, . \operatorname{tang}\vartheta} \ ,$$

indem wir noch $\operatorname{tang} t$ in $\frac{\sin 2t}{1+\cos 2t}$ verwandeln, ſo haben wir

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{2\sin 2t \, . \cos 2t - (1+\cos 2t)\sin 2t}{2(1+\cos 2t)\cos 2t + \sin^2 2t} = \frac{(\cos 2t - 1)\sin 2t}{(\cos 2t + 1)^2} \ ,$$

und daraus ergiebt ſich, wenn wir quadriren und für $\sin^2 t$ alsdann

$$(1-\cos 2t)(1+\cos 2t)$$

ſetzen,

$$\operatorname{tang}^2\gamma = \frac{(1-\cos 2t)^3}{(1+\cos 2t)^3} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tang}^2\gamma = \frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t} \ .$$

Hieraus finden wir

$$\cos 2t = \frac{1-\operatorname{tang}^2\gamma}{1+\operatorname{tang}^2\gamma} = \frac{\cos^2\gamma - \sin^2\gamma}{\cos^2\gamma + \sin^2\gamma} \ ;$$

und, wenn wir dieſen Ausdruck in denjenigen von δ^2 ſubſtituiren und die Nenner fortſchaffen,

$$9\delta^2(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma) = 4a^2(\cos^4\gamma - \cos^2\gamma \, . \sin^2\gamma + \sin^2\gamma) \ , \quad (7)$$

welches die Polargleichung der geſuchten Evolute iſt. Setzen wir $\delta^2 =$

§. 88. $\beta^2+\alpha^2$, $\cos^2\gamma = \frac{\alpha^2}{\beta^2+\alpha^2}$ und $\sin^2\gamma = \frac{\beta^2}{\beta^2+\alpha^2}$, so kommt

$$9(\beta^2+\alpha^2)(\alpha^{\frac{4}{3}}-\beta^{\frac{4}{3}}) = 4a^2(\alpha^{\frac{4}{3}}-\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{4}{3}}) \qquad (8)$$

als Gleichung derselben Evolute in rechtwinkligen Coordinaten, und wenn man sie rational macht,

$$\{4a^2+9\beta^2+9\alpha^2\}^3\beta^4+a^2\{128a^4-81(\beta^2+\alpha^2)^2\}\alpha^2\beta^2 + \{4a^2-9\beta^2-9\alpha^2\}^3\alpha^4 = 0. \qquad (9)$$

III. Die Evolute der logarithmischen Linie.

Setzen wir in die Gleichungen (8) des §. 83. $y = me^{\frac{x}{m}}$, $\frac{dy}{dx} = e^{\frac{x}{m}}$ und $\frac{d^2y}{dx} = \frac{1}{m}e^{\frac{x}{m}}$, so kommt

$$\beta = \frac{m(2e^{\frac{2x}{m}}+1)}{e^{\frac{x}{m}}} \quad ; \quad \alpha = x-m\left(e^{\frac{2x}{m}}+1\right).$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhalten wir

$$e^{\frac{x}{m}} = \frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-8m^2}}{4m}, \quad \text{also} \quad \frac{x}{m} = log\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-8m^2}}{4m},$$

und wenn wir diese Werthe in die zweite Gleichung substituiren

$$\alpha = m\,log\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-8m^2}}{4m} - \frac{\beta^2+4m^2\pm\beta\sqrt{\beta^2-8m^2}}{8m} \qquad (10)$$

als Gleichung der Evolute.

IV. Die Evolute der Kettenlinie.

Verfährt man hier wie vorher, so ergiebt sich

$$\alpha = m\,log\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4m^2}}{2m} \mp \frac{\beta\sqrt{\beta^2-4m^2}}{4m} \qquad (11)$$

als Gleichung der Evolute.

V. Die Evolute der Cycloide.

Wir setzen in die Gleichungen (8) des §. 83. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2a-y}}{y^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}$, und erhalten dadurch $\beta = -y$; $\alpha = x+2\sqrt{2ay-y^2}$,

oder, in Folge der Gleichung der Cycloide, §. 88.

$$\beta = -y \quad ; \quad \alpha = a.arc\left(cos = \frac{a-y}{a}\right) + \sqrt{2ay - y^2} \; ;$$

und wenn wir y eliminiren,

$$\alpha = a.arc\left(cos = \frac{a+\beta}{a}\right) + \sqrt{-2a\beta - \beta^2}$$

als die Gleichung der Evolute. Diese Evolute der Cycloide ist selbst eine Cycloide; sie hat mit der Evolvente einen gleichen erzeugenden Kreis, welcher auf einer der Abscissenachse in der Entfernung 2a parallelen Geraden rollt; ihre Lage ist in Fig. 50. angegeben. Verlegt man nämlich die Ab- Fig. 50.
scissenachse, indem man $\beta = \beta' - 2a$ setzt, und die Ordinatenachse, indem man $\alpha = \pi a - \alpha'$ nimmt, so verwandelt sich die gefundene Gleichung in

$$\alpha' = a.\left\{\pi - arc\left(cos = \frac{\beta' - a}{a}\right)\right\} - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2} \; ,$$

oder, was dasselbe ist, in

$$\alpha' = a.arc\left(cos = \frac{a-\beta'}{a}\right) - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2} \; ,$$

welche Gleichung mit (4) in §. 66. übereinstimmt.

VI. Die Evolute der Epicycloide oder Hypocycloide.

Wir setzen in die Gleichungen (8) des §. 83. die in der Aufgabe (140) des §. 84. angegebenen Ausdrücke, nämlich

$$\frac{dy}{dx} = \pm tang\frac{r \pm 2a}{2a}t \; ; \; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r \pm 2a}{4a(r \pm a)\cos^2\frac{r \pm 2a}{2a}.t \sin\frac{r}{2a}.t} \; ,$$

und erhalten, nach einer leichten Reduction,

$$\beta = y + \frac{4a(r \pm a)cos\frac{r \pm 2a}{2a}.t\,sin\frac{r}{2a}.t}{r \pm 2a} = y + \frac{2(r \pm a)}{r \pm 2a}.a\left\{sin\frac{r \pm a}{a}.t \mp sin\,t\right\} \; ,$$

$$\alpha = x \mp \frac{4a(r \pm a)sin\frac{r \pm 2a}{2a}.t\,sin\frac{r}{2a}.t}{r \pm 2a} = x \mp \frac{2(r \pm a)}{r \pm 2a}.a\left\{cos\,t - cos\frac{r \pm a}{a}.t\right\} .$$

Setzen wir, in Folge der Gleichung der Curve (§. 67. G. 1 u. 2),

$$(r \pm a)cos\,t \mp a\,cos\frac{r \pm a}{a}.t \text{ für } x \; ,$$

§. 88. $(r \pm a)\sin t - a\sin\frac{r \pm a}{a}.t$ für y,

und reduciren, so kommt

$$\left\{\begin{aligned}\beta &= \frac{r}{r \pm 2a}\left\{(r \pm a)\sin t + a\sin\frac{r \pm a}{a}t\right\}\\ \alpha &= \frac{r}{r \pm 2a}\left\{(r \pm a)\cos t \pm a\cos\frac{r \pm a}{a}t\right\}\end{aligned}\right\},$$

ein System von zwei Gleichungen, welches die gesuchte Evolute ausdrückt. Diese Evolute ist selbst eine Epicycloide oder Hypocycloide. Um den gefundenen Gleichungen die Form der Gleichungen (1 u. 2) des §. 67. zu geben, verwandeln wir sie zunächst in

$$\beta = \frac{r}{r \pm 2a}\left\{(r \pm a)\sin t - a\sin\left(\frac{r \pm a}{a}t \mp \pi\right)\right\},$$
$$\alpha = \frac{r}{r \pm 2a}\left\{(r \pm a)\cos t \mp a\cos\left(\frac{r \pm a}{a}t \mp \pi\right)\right\}.$$

Wir nehmen nun diejenige Gerade, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und mit der Abscissenachse den Winkel $\pm\frac{a\pi}{r}$ bildet, zur neuen Abscissenachse und die neuen Coordinaten α', β' rechtwinklig, so daß (§. 3. F. 9.)

$$\beta = \beta'\cos\frac{a\pi}{r} \pm \alpha'\sin\frac{a\pi}{r} \quad ; \quad \alpha = \alpha'\cos\frac{a\pi}{r} \mp \beta'\sin\frac{a\pi}{r},$$

und also

$$\beta' = \beta\cos\frac{a\pi}{r} \mp \alpha\sin\frac{a\pi}{r} \quad ; \quad \alpha' = \alpha\cos\frac{a\pi}{r} \pm \beta\sin\frac{a\pi}{r}$$

ist. Setzen wir hierin die obigen Ausdrücke von β und α, so ergiebt sich, nach einer leichten Reduction,

$$\beta' = \frac{r}{r \pm 2a}\left\{(r \pm a)\sin\left(t \mp \frac{a\pi}{r}\right) - a\sin\left[\left(\frac{r \pm a}{a}\right)\left(t \mp \frac{a\pi}{r}\right)\right]\right\},$$
$$\alpha' = \frac{r}{r \pm 2a}\left\{(r \pm a)\cos\left(t \mp \frac{a\pi}{r}\right) \mp a\cos\left[\left(\frac{r \pm a}{a}\right)\left(t \mp \frac{a\pi}{r}\right)\right]\right\},$$

oder, wenn wir $t \mp \frac{a\pi}{r} = t'$ setzen,

$$\beta' = \frac{r}{r \pm 2a}\left\{(r \pm a)\sin t' - a\sin\frac{r \pm a}{a}t'\right\},$$

$$\alpha' = \frac{r}{r \pm 2a}\left\{(r \pm a)\cos t' \mp a\cos\frac{r \pm a}{a}t'\right\} . \qquad \text{§. 88.}$$

Aus dieſen Gleichungen ſieht man, daß die Evolute der Epicycloide als eine Epicycloide und die der Hypocycloide als eine Hypocycloide betrachtet werden kann. Bezeichnen wir den Radius des Grundkreiſes dieſer Evolute durch r' und den des rollenden durch a', ſo haben wir durch Vergleichung der gefundenen Ausdrücke von β' und α' mit denen von y und x (§. 67. G. 1 und 2)

$$r' = \frac{r^2}{r \pm 2a} \quad ; \quad a' = \frac{ar}{r \pm 2a} .$$

Die Radien r' und a' ſtehen alſo in demſelben Verhältniſſe wie die Radien r und a, woraus wir ſchließen, daß die Evolute der Evolvente ähnlich iſt.

Nehmen wir z. B. an, daß a = r iſt, daß alſo die Evolvente eine Cardioide iſt (§. 67.), ſo haben wir $r' = \frac{1}{3}r$ und $a' = \frac{1}{3}r$, und demnach iſt die Evolute ebenfalls eine Cardioide, in welcher der Radius des Grundkreiſes dem dritten Theile des Radius des Grundkreiſes der Evolvente gleich iſt.

VII. Die Evolute der logarithmiſchen Spirale.

Wir haben $u = re^{\frac{t}{m}}$, $\frac{du}{dt} = \frac{r}{m}e^{\frac{t}{m}} = \frac{u}{m}$, $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{r}{m^2}e^{\frac{t}{m}} = \frac{u}{m^2}$, und ſetzen wir dieſe Ausdrücke in die Gleichungen (11 u. 13) des §. 83., ſo kommt

$$\delta = \frac{u}{m} = \frac{r}{m}e^{\frac{t}{m}} \quad ; \quad tang\,\vartheta = \infty ,$$

alſo $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, und ſomit $\gamma = t + \frac{1}{2}\pi$, daher $t = \gamma - \frac{1}{2}\pi$, woraus

$$\delta = \frac{r.e^{\frac{\gamma - \frac{1}{2}\pi}{m}}}{m}$$

als Gleichung der Evolute ſich ergiebt. Dieſe Evolute iſt alſo wieder eine logarithmiſche Spirale, und zwar fällt ſie mit dem Orte der Polarſubnormale der Evolvente zuſammen (§. 74. Aufg. 122. IV.). Dieſe Beſchaffenheit der Evolute hätte auch daraus hergeleitet werden können, daß die Polarſubnormale $= \frac{u}{m}$ (§. 72. Aufg. 117. V.) und der Krümmungsradius

§. 88. $\varrho = \sqrt{u^2 + \frac{u^2}{m^2}}$ (§. 84. Aufg. 140. X.) ist; daß also der Krümmungsradius die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks seyn muß, dessen Catheten der Radius vector und die Polarsubnormale sind, so daß der Endpunkt dieser Polarsubnormale mit dem Krümmungsmittelpunkte zusammen fällt.

Von den ausgezeichneten Punkten der Curven.

§. 89.

Die Tangente in einem Punkte einer Curve, der Bogen der Curve in der Nähe dieses Punktes und eine beliebige Gerade, die wir, der Einfachheit wegen, zur Abscissenachse nehmen wollen, können, im Allgemeinen, dreierlei Fig. 59. Lagen gegen einander haben. Es können nämlich 1) die Ordinaten der Tangente in der Nähe des Berührungspunktes vor und nach demselben, absolut genommen, größer seyn als die zu denselben Abscissen gehörenden Ordinaten der Curve, wie bei A, wo $ab > \alpha b$ und $a'b' > \alpha'b'$; alsdann ist die Curve im Punkte A concav gegen die Abscissenachse; oder es können 2) die Ordinaten der Tangente in der Nähe des Berührungspunktes vor und nach demselben, absolut genommen, kleiner seyn als die der Curve, wie in E, wo $ef < \varepsilon f$ und $e'f' < \varepsilon'f'$; alsdann ist die Curve im Punkte E convex gegen die Abscissenachse; oder es können 3) die Ordinaten der Tangente in der Nähe des Berührungspunktes, absolut genommen, vor demselben größer (oder kleiner), nach demselben aber kleiner (oder größer) als die zu denselben Abscissen gehörenden Ordinaten der Curve seyn, wie bei C, wo $cd > \gamma d$ hingegen $c'd' < \gamma'd'$; alsdann heißt der Punkt C Inflexionspunkt oder Wendungspunkt.

Wenn die Gleichung einer Curve in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten gegeben ist, so läßt sich aus dem Werthe, welchen der zweite Differentialcoefficient $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ für einen bestimmten Punkt x_1y_1 dieser Curve erhält, beurtheilen, ob die Curve in diesem Punkte x_1y_1 gegen die Abscissenachse concav oder convex sey. Die Gleichung der Tangente im Punkte x_1y_1 ist $y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1)$, und wenn wir die zur Abscisse $x_1 + h$ gehö-

rende Ordinate dieſer Geraden durch y' bezeichnen, ſo iſt, in Folge dieſer Gleichung, $y'-y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x_1+h-x_1)$ oder §. 89.

$$y' = y_1+\frac{dy_1}{dx_1}h .$$

Zu derſelben Abſciſſe x_1+h gehört aber eine Ordinate y der Curve, welche, zufolge des Taylor'ſchen Theorems, durch

$$y = y_1+\frac{dy_1}{dx_1}.h+\frac{d^2y_1}{dx_1^2}.\frac{h^2}{2}+\frac{d^3y_1}{dx_1^3}.\frac{h^3}{2.3}+\frac{d^4y_1}{dx_1^4}.\frac{h^4}{2.3.4}+\text{ etc.}$$

ausgedrückt werden kann. Es iſt daher

$$y = y'+\frac{d^2y_1}{dx_1^2}.\frac{h^2}{2}+\frac{d^3y_1}{dx_1^3}.\frac{h^3}{2.3}+\frac{d^4y_1}{dx_1^4}.\frac{h^4}{2.3.4}+\text{ etc. ;}$$

und nimmt man h ſo klein, daß, für dieſen Werth von h und für alle kleinern Werthe, abſolut genommen,

$$\frac{d^3y_1}{dx_1^3}.\frac{h^3}{2.3}+\frac{d^4y_1}{dx_1^4}.\frac{h^4}{2.3.4}+\text{ etc.} < \frac{d^2y_1}{dx_1^2}h^2$$

ſey, ſo iſt auch, abſolut genommen,

$y>y'$, wenn y' und $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ von gleichen Zeichen,

$y<y'$, wenn y' und $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ von entgegengeſetzten Zeichen

ſind, wo man noch y_1 für y' ſetzen kann, weil der Unterſchied, $y'-y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}h$, durch ein gehörig kleines h, kleiner gemacht werden kann, als irgend eine gegebene Größe. Die Curve iſt alſo im Punkte x_1y_1 gegen die Abſciſſenachſe convex, wenn y_1 und $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ gleiche Zeichen, und concav, wenn y_1 und $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ entgegengeſetzte Vorzeichen haben. Wenn $y_1 = 0$ iſt, ſo geht die Abſciſſenachſe durch den Punkt x_1y_1, und alsdann iſt die Curve in dieſem Punkte gegen die Abſciſſenachſe weder convex noch concav.

Soll der Punkt x_1y_1 ein Inflexionspunkt der Curve ſeyn, ſo muß die zur Abſciſſe (x_1-h) gehörende Ordinate y' der Tangente größer (oder kleiner) als die zu derſelben Abſciſſe gehörende Ordinate y der Curve ſeyn, wenn h gehörig klein genommen wird, während es ſich mit der zur Abſciſſe

§. 89. (x_1+h) gehörenden Ordinate y' und y umgekehrt verhalten muß. Es muß also für einen solchen Punkt x_1y_1 zu gleicher Zeit

$$y_1-\frac{dy_1}{dx_1}.h \gtrless y_1-\frac{dy_1}{dx_1}.h+\frac{d^2y_1}{dx_1^2}.\frac{h^2}{2}-\frac{d^3y_1}{dx_1^3}.\frac{h^3}{2.3}+\text{etc.},$$

$$y_1+\frac{dy_1}{dx_1}.h \lessgtr y_1+\frac{dy_1}{dx_1}.h+\frac{d^2y_1}{dx_1^2}.\frac{h^2}{2}+\frac{d^3y_1}{dx_1^3}.\frac{h^3}{2.3}+\text{etc.},$$

oder, was dasselbe ist,

$$0 \gtrless \frac{d^2y_1}{dx_1^2}\frac{h^2}{2}-\frac{d^3y_1}{dx_1^3}.\frac{h^3}{2.3}+\frac{d^4y_1}{dx_1^4}.\frac{h^4}{2.3.4}-\text{etc.},$$

$$0 \lessgtr \frac{d^2y_1}{dx_1^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3y_1}{dx_1^3}.\frac{h^3}{2.3}+\frac{d^4y_1}{dx_1^4}.\frac{h^4}{2.3.4}+\text{etc.}$$

Da nun aber, für ein gehörig kleines h und für jedes kleinere, das Zeichen dieser beiden Reihen von dem ihres ersten Gliedes abhängt, dieses erste Glied aber in beiden Reihen dasselbe ist; so kann der Punkt x_1y_1 nur dann ein Inflexionspunkt seyn, wenn $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=0$ und $\frac{d^3y_1}{dx_1^3}\gtrless 0$ (oder allgemeiner, wenn der zweite und eine gerade Anzahl nächstfolgender Differentialcoefficienten für x_1 und y_1 gleich Null werden, der erste unter den nicht verschwindenden Differentialcoefficienten aber von ungerader Ordnung ist), oder wenn $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=\pm\infty$.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, daß der Krümmungsradius ϱ eines Inflexionspunktes entweder gleich 0 oder $\pm\infty$ ist (§. 83. F. 16.).

Die Differentialrechnung bietet auch ein Mittel dar, die vielfachen und conjugirten Punkte einer Curve aufzufinden. Es sey

$$F(x,y)=0$$

die Gleichung einer Curve in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten, welche vielfache oder conjugirte Punkte hat. Da ein solcher Punkt der Durchschnittspunkt oder der Vereinigungspunkt mehrerer Zweige oder Züge der Curve ist, so schneidet jede Gerade, die durch ihn gezogen wird, die Curve in diesem Punkte zwei oder mehrere Male (§. 58.). Die Ordinate dieses Punktes ist also als die Ordinate zweier oder mehrerer zusammenfallenden Punkte zu betrachten, und deshalb müssen zu der Abscisse x eines solchen Punktes zwei oder mehrere gleiche Werthe von y gehören. Wäre also die Abscisse x eines solchen Punktes bekannt und in die Gleichung $F(x,y)=0$

substituirt, so würde sie eine Gleichung mit einer unbekannten Größe y seyn, welche zwei oder mehrere gleiche Wurzeln hat, und deren erste Ableitung nach y daher gleich Null seyn müßte. Hieraus folgt für den in Rede stehenden Punkt §. 89.

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0 .$$

Verwechseln wir die Abscissen- und Ordinatenachse, so folgt aus ähnlichen Gründen,

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0 .$$

Da nun $\left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dF}{dx}\right) = 0$ die Differentialgleichung der Curve ist, aus welcher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)} ,$$

so ist für den vielfachen oder conjugirten Punkt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} .$$

Die vielfachen, conjugirten und Inflexionspunkte werden unter der gemeinschaftlichen Benennung ausgezeichnete Punkte zusammengefaßt. Bei den vielfachen Punkten unterscheidet man diejenigen, in welchen sich die Zweige der Curve schneiden von denjenigen, in welchen sie sich berühren, und unter den letztern diejenige, über welche hinaus sich die Curve weiter erstreckt von denjenigen, in welchen sie eine Spitze bilden, die man Rückkehrpunkte nennt, endlich werden die Rückkehrpunkte in zwei Arten eingetheilt, je nachdem die Zweige der Curve auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite ihrer im Rückkehrpunkte gemeinschaftlichen Tangente liegen.

§. 90.

Um die ausgezeichneten Punkte einer Curve aufzufinden, wird man auf folgende Weise verfahren können. Man differentiire die auf rechtwinklige oder schiefwinklige Achsen bezogene Gleichung der Curve.

Man setze erstens den Differentialcoefficienten $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, Hieraus er-

§. 90. und durch Differentiation alsdann

$$\frac{dy}{dx} = 1+2x\pm\tfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2\pm\tfrac{15}{4}x^{\frac{1}{2}} .$$

Es kann der Ausdruck von $\frac{dy}{dx}$ unter dieser Form nicht $\frac{0}{0}$ werden, und es läßt sich also aus ihm nicht beurtheilen, ob die Curve vielfache Punkte habe. Differentiiren wir aber die Gleichung, ohne sie aufzulösen, so kommt

$$2(y-x-x^2)\frac{dy}{dx}-2(y-x-x^2)(1+2x) = 5x^4 ;$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(y-x-x^2)(1+2x)+5x^4}{2(y-x-x^2)} .$$

Setzen wir Zähler und Nenner dieses Ausdrucks gleich Null, so haben wir

$$2(y-x-x^2)(1+2x)+5x^4 = 0 \quad ; \quad y-x-x^2 = 0 ;$$

woraus sich $x = 0$ und $y = 0$ ergiebt. Diese Werthe befriedigen die Gleichung der Curve; der Anfangspunkt der Coordinaten kann daher ein vielfacher oder ein conjugirte Punkt seyn. Da aber in der Gleichung der Curve y, für jeden Werth von x zwischen 0 und $+\infty$, zwei reelle Werthe erhält, so gehört dieser Anfangspunkt zur stetigen Folge der Punkte der Curve, und ist daher kein conjugirter. Der wahre Werth von $\frac{dy}{dx}$, für $x = 0$ ist gleich 1, was sich aus der ersten Form des Ausdrucks dieses Differentialcoefficienten unmittelbar ergiebt, wenn man darin $x = 0$ setzt. Die beiden Zweige der Curve berühren sich demnach in diesem Punkte. Da ferner $\frac{d^2y}{dx^2}$, für $x = 0$, sich auf $+2$ reducirt, so liegen beide Zweige in der Nähe des Anfangspunktes auf derselben Seite der durch diesen Punkt gehenden Tangente; und da beide Werthe von y für jeden negativen Werth von x imaginär werden, so ist dieser Anfangspunkt der Coordinaten ein Rückkehrpunkt der zweiten Art.

Was den Inflexionspunkt betrifft, so bemerken wir, daß für den Zweig, welcher durch $y = x+x^2+x^{\frac{5}{2}}$ ausgedrückt wird, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2+\frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}$; für den Zweig aber, welchen $y = x+x^2-x^{\frac{5}{2}}$ ausdrückt, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2-\frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}$ ist. Da der erste Ausdruck niemals Null werden kann, so hat der erste Zweig keinen Inflexionspunkt. Der zweite Ausdruck wird gleich Null, wenn

$x^{\frac{1}{2}} =$

$x^{\frac{1}{3}} = \frac{8}{15}$, also wenn $x = \frac{64}{225}$; und für diesen Werth von x ist $\frac{d^3y}{dx^3} =$ §. 90.
$-\frac{15}{8}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{225}{64}$. Der Punkt des zweiten Zweiges, dessen Abscisse gleich $\frac{64}{225}$ ist, ist also ein Inflexionspunkt. Die Curve ist in Fig. 60. abgebildet; Fig. 60.
bei A ist der Rückkehrpunkt, und bei I der Inflexionspunkt.

III. Der Cissoide, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten (§. 59. S. 8)

$$(x-2r)y^2+x^3 = 0$$

ist. Nehmen wir die in §. 84. (Aufg. 140. I.) angegebenen Differentialcoefficienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3r-x)x^{\frac{1}{2}}}{(2r-x)^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3r^2}{(2r-x)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}} \quad ;$$

so ergiebt sich, indem wir $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ setzen, kein ausgezeichneter Punkt. Differentiiren wir aber die Gleichung unmittelbar, so kommt

$$2(x-2r)y\frac{dy}{dx}+y^2+3x^2 = 0 \text{ , also } \frac{dy}{dx} = \frac{y^2+3x^2}{2(2r-x)y} \text{ ,}$$

woraus wir die Gleichungen

$$y^2+3x^2 = 0 \quad \text{und} \quad (2r-x)y = 0$$

bilden, welche nur die reellen Werthe $x = 0$ und $y = 0$ geben. Diese Werthe befriedigen auch die Gleichung der Curve; der Anfangspunkt der Coordinaten könnte daher ein vielfacher oder conjugirter Punkt seyn. Da aber die Curve sich nur auf der Seite der positiven Abscissen befindet, so ist er ein Rückkehrpunkt, und zwar der ersten Art, weil der wahre Werth von $\frac{dy}{dx}$ für $x = 0$, wie man aus der zuerst angegebenen Form dieses Differentialcoefficienten sieht, gleich Null ist, die Tangente also mit der Abscissenachse zusammenfällt, und die Curve auf beiden Seiten dieser Geraden liegt.

Einen Inflexionspunkt hat die Curve nicht, weil $\frac{d^2y}{dx^2}$ für keinen endlichen Werth von x gleich Null wird, und weil für $x = 2r$, für welchen Werth $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich wird, auch y unendlich ist.

IV. Der Lemniscate, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten

§. 90. $$y^4+(2x^2+a^2)y^2-a^2x^2+x^4=0\,.$$

Durch Differentiation erhalten wir

$$\{2(y^2+x^2)+a^2\}y\frac{dy}{dx}+\{2(y^2+x^2)-a^2\}x=0\,,$$

$$\{2(y^2+x^2)+a^2\}y\frac{d^2y}{dx^2}+\{6y^2+2x^2+a^2\}\frac{dy^2}{dx^2}+8xy\frac{dy}{dx}+2y^2+6x^2-a^2=0\,,$$

$$\{2(y^2+x^2)+a^2\}y\frac{d^3y}{dx^3}+3\{(6y^2+2x^2+a^2)\frac{dy}{dx}+4xy\}\frac{d^2y}{dx^2}+12y\frac{dy^3}{dx^3}+12x\frac{dy^2}{dx^2}+12y\frac{dy}{dx}+12x=0\,.$$

Setzen wir nun $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$, also

$$\{2(y^2+x^2)+a^2\}y=0 \quad \text{und} \quad \{2(y^2+x^2)-a^2\}x=0\,,$$

so haben wir, da $2(y^2+x^2)+a^2$ für reelle Werthe von x und y nicht Null werden kann, die beiden Gleichungs-Systeme

$$\left\{\begin{matrix} y=0 \\ 2y^2+2x^2-a^2=0\end{matrix}\right\} \quad ; \quad \left\{\begin{matrix} y=0 \\ x=0\end{matrix}\right\}.$$

Das erste giebt $y=0$ und $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, welche Werthe aber die Gleichung der Curve nicht befriedigen. Das zweite System drückt den Anfangspunkt der Coordinaten oder den Mittelpunkt der Curve aus. Dieser kann daher ein ausgezeichneter Punkt seyn. Um den wahren Werth von $\frac{dy}{dx}$ für $x=0$ und $y=0$ zu finden, setzen wir diese Werthe in die zweite Differentialgleichung, in welcher nun der Coefficient von $\frac{d^2y}{dx^2}$ verschwindet, und die sich auf $a^2\frac{dy^2}{dx^2}-a^2=0$ reducirt. Wir erhalten somit $\frac{dy}{dx}=\pm 1$, und die Curve hat also im Anfangspunkte der Coordinaten zwei verschiedene Tangenten, von welchen die eine mit der Abscissenachse einen Winkel $=\frac{1}{4}\pi$, die andere aber einen Winkel $=\frac{3}{4}\pi$ bildet. Die Curve schneidet sich also in ihrem Mittelpunkte rechtwinklig.

Setzen wir, um den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu finden, in der dritten Differentialgleichung $x=0$, $y=0$ und $\frac{dy}{dx}=\pm 1$, so kommt $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, und da, wie man leicht finden wird, der dritte Differentialcoefficient nicht verschwindet, so ist der Mittelpunkt auch ein Inflexionspunkt beider Züge der Curve.

V. Der Quadratrix des Dinostratus, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten (§. 65. G. 1) §. 90.

$$y = x\,tang\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{\pi x}{2a}\right).$$

Differentiiren wir diese Gleichung, so kommt

$$\frac{dy}{dx} = tang\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{\pi x}{2a}\right) - \frac{\pi x}{2a\,cos^2\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{\pi x}{2a}\right)};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pi\left\{\frac{\pi}{2a}x\,sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{\pi x}{2a}\right) - cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{\pi x}{2a}\right)\right\}}{a\,cos^3\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{\pi x}{2a}\right)}.$$

Bringen wir den Ausdruck für den ersten Differentialcoefficienten auf die Form

$$\frac{2a\,sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{\pi x}{2a}\right)cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{\pi x}{2a}\right) - \pi x}{2a\,cos^2\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{\pi x}{2a}\right)} = \frac{a\,sin\left(\pi - \frac{\pi x}{a}\right) - \pi x}{2a\,cos^2\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{\pi x}{2a}\right)},$$

so ergiebt sich, daß $\frac{dy}{dx}$ nur für $x = 0$ auf $\frac{0}{0}$ gebracht wird. Differentiiren wir Zähler und Nenner des zuletzt angegebenen Ausdrucks, um seinen wahren Werth zu finden, so erhalten wir

$$\frac{-\pi\,cos\left(\pi - \frac{\pi x}{a}\right) - \pi}{2\pi\,cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{\pi x}{2a}\right)sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{\pi x}{2a}\right)} = -\frac{cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{\pi x}{2a}\right)}{sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{\pi x}{2a}\right)},$$

welcher Ausdruck für $x = 0$ auf Null reducirt wird. Der erste Differentialcoeffieient $\frac{dy}{dx}$ hat also für $x = 0$ nur einen Werth, und der Punkt der Curve, dem übrigens die Ordinate $y = \frac{2a}{\pi}$ zugehört (§. 65.), ist weder ein vielfacher noch ein conjugirter Punkt, da sich in ihm nicht mehrere Zweige vereinigen und die Curve durch ihn hindurch geht.

Um die Inflexionspunkte zu finden, setzen wir den oben angegebenen Ausdruck von $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleich Null. Daraus ergiebt sich $tang\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{\pi x}{2a}\right) = \frac{2a}{\pi x}$;

§. 90. und, wenn wir dieſen Werth der Tangente in die Gleichung der Curve ſubſtituiren, $y = \frac{2a}{\pi}$. Die Gerade, welche der Abſciſſenachſe in der Entfernung $\frac{2a}{\pi}$ parallel läuft, ſchneidet die Curve in unendlich vielen Punkten und alle dieſe Punkte ſind Inflexionspunkte, indem für die Abſciſſen dieſer Punkte $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, und, wie man leicht finden wird, $\frac{d^3y}{dx^3}$ nicht Null wird. Der Punkt, in welchem dieſe Gerade die Curve berührt, und deſſen Coordinaten $x = 0$ nnd $y = \frac{2a}{\pi}$ ſind, iſt kein Inflexionspunkt; für ihn iſt $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0}$,

Fig. 47. deſſen wahrer Werth gleich $-\frac{1}{2}\pi$ gefunden wird.

VI. Der Quadratrix des Tſchirnhauſen, deren Gleichung (§. 65. S. 2)

$$y = a \sin \frac{\pi x}{2a} .$$

Durch Differentiation erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\pi \cos\frac{\pi x}{2a} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{4a}\sin\frac{\pi x}{2a} \quad ; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\pi^3}{8a^2}\cos\frac{\pi x}{2a} .$$

Da $\frac{dy}{dx}$ nicht $\frac{0}{0}$ werden kann, ſo hat die Curve keine vielfachen oder conjugirten Punkte. Für alle Werthe von x, welche y gleich Null machen, d. i. (§. 65.) für $x = 0$; oder $\pm 2a$; oder $\pm 4a$; u. ſ. w., wird auch $\frac{d^2y}{dx^2}$, nicht aber $\frac{d^3y}{dx^3}$ gleich Null. Die Durchſchnittspunkte der Curve und der

Fig. 48. Abſciſſenachſe ſind demnach Inflexionspunkte.

VII. Der Evolute der Ellipſe, deren Gleichung (§. 88. S. 3)

$$\{b^2\beta^2 + a^2\alpha^2 - e^4\}^3 + 27a^2b^2e^4\beta^2\alpha^2 = 0 .$$

Die Differentiation giebt

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{a^2(b^2\beta^2 + a^2\alpha^2 - e^4)^2\alpha + 9a^2b^2e^4\beta^2\alpha}{b^2(b^2\beta^2 + a^2\alpha^2 - e^4)^2\beta + 9a^2b^2e^4\beta\alpha^2} ,$$

und daraus erhalten wir, wenn wir $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{0}{0}$ ſetzen,

$$\{(b^2\beta^2+a^2\alpha^2)^2+7b^2e^4\beta^2-2a^2e^4\alpha^2+e^8\}\alpha = 0\ ,$$
$$\{(b^2\beta^2+a^2\alpha^2)^2-2b^2e^4\beta^2+7a^2e^4\alpha^2+e^8\}\beta = 0\ ;$$

§. 90.

und aus diesen Gleichungen folgende Systeme von Werthen:

$$\left\{\begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=0\end{matrix}\right\}\ ;\quad \left\{\begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=\pm\frac{e^2}{b}\end{matrix}\right\}\ ;\quad \left\{\begin{matrix}\alpha=\pm\frac{e^2}{a}\\ \beta=0\end{matrix}\right\}\ ;$$

$$\left\{\begin{matrix}\alpha=\pm\frac{e^2}{a}\sqrt{-1}\\ \beta=\pm\frac{e^2}{b}\sqrt{-1}\end{matrix}\right\}\ ;\quad \left\{\begin{matrix}\alpha=\pm\frac{e^2}{2a}\sqrt{-1}\\ \beta=\pm\frac{e^2}{2b}\sqrt{-1}\end{matrix}\right\}\ .$$

Die beiden letzten Systeme geben keinen reellen Punkt, und das erste System befriedigt die Gleichung der Curve nicht. Das zweite und dritte System befriedigt aber allerdings diese Gleichung. Giebt man ihr, vermittelst der Gleichung (2) des §. 88., die Formen

$$\beta = \pm\frac{1}{b}\sqrt{(e^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}})^3}\ ;\quad \alpha = \pm\frac{1}{a}\sqrt{(e^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}})^3}\ ,$$

so erhellet, daß β nur so lange reell ist, als α zwischen $-\frac{e^2}{a}$ und $+\frac{e^2}{a}$, und daß α nur reell ist, wenn β zwischen $-\frac{e^2}{b}$ und $+\frac{e^2}{b}$ liegt. Die durch das zweite und dritte System ausgedrückten Punkte sind also Rückkehrpunkte. Diese Rückkehrpunkte sind übrigens, wie man aus §. 84. leicht finden kann, die Krümmungsmittelpunkte der Scheitel der Ellipse. Die Curve ist in Fig. 61. verzeichnet; a, a', b und b' sind die Rückkehrpunkte, welche den Scheiteln A, A', B und B' der Ellipse als Krümmungsmittelpunkte zugehören.

Fig. 61.

VIII. Der Evolute der Hyperbel.

Es lassen sich die Doppelpunkte dieser Curve aus den in VII. gefundenen Resultaten bestimmen. Man darf nämlich in den fünf Gleichungssystemen nur $b\sqrt{-1}$ für b setzen. Die beiden letzten Systeme geben hier ebenfalls keine reellen Punkte, wiewohl sie respective $\beta = \pm\frac{e^2}{b}$ und $\beta = \pm\frac{e^2}{2b}$ machen, weil $\alpha = \pm\frac{e^2}{a}\sqrt{-1}$ und $\alpha = \pm\frac{e^2}{2a}\sqrt{-1}$ ist. Das

ı befriedigt die Gleichung der Curve auch jetzt nicht; und das
:m giebt hier keine reellen Punkte, weil $\beta = \pm\frac{e^2}{b}\sqrt{-1}$ wird.
Syſtem aber gehört zu zwei reellen Punkten, welche Rückkehr=
zugleich die Krümmungsmittelpunkte der beiden Scheitel der Hy=

volute der Parabel, oder die Neiliſche Parabel hat nur einen
kt.

)er Evolute der Ciſſoide, deren Gleichung (§. 88. S. 6)

$$4096r^3\alpha + 1152r^2\beta^2 + 27\beta^4 = 0\,,$$

eine paraboliſche Linie iſt. Sie hat, wie jede paraboliſche Li=
vielfachen Punkt. Da der zweite Differentialcoefficient $\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} = \frac{81\beta^2}{\ldots}$ für keinen reellen und endlichen Werth von β gleich 0
den kann, ſo hat die Curve auch keinen Inflexionspunkt.

§. 91.

die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten gegeben iſt, ſo
ie vielfachen Punkte derſelben nicht auf dieſelbe Art wie vorher
Denn wenn auch dieſe Gleichung rational iſt und die Curve voll=
rückt, ſo kann es ſich doch ereignen, daß ſie nur ein Factor
olargleichung iſt, welche ſich aus der auf rechtwinkligen Achſen
eichung unmittelbar ergiebt, wie dies bei der Polargleichung der
:n Grades, in welchen ein Brennpunkt zum Pol angenommen
.), bei der Conchoide (§. 60.) und bei vielen andern Curven der
in doppelter Punkt kann alsdann, als ein Punkt des einen Zwei=
ve, t_1 und u_1, und, als ein Punkt des andern Zweiges, $t_1 + \pi$
ı Coordinaten haben, ſo daß die Polargleichung der Curve, für
ineswegs zwei gleiche Wurzeln zu haben braucht. Man kann
unbedingt ſchließen, daß, wenn $F(t, u)$ die Polargleichung der
$\frac{dF}{dt}\Big)$, für einen doppelten Punkt, gleich Null ſeyn müſſe. Als
eines ſolchen Falles nehmen wir die Gleichung (1) des §. 61.,

$$(u-a)^2 - 2b(u-a)\cos t + b^2 - r^2 = 0\,,$$

urve (§. 61. S. 3) vollſtändig ausdrückt. Setzen wir darin

$t+\pi$ für t und $-u$ für u, so kommt §. 91.

$$(u+a)^2-2b(u+a)\cos t+b^2-r^2=0\,,$$

und addiren und subtrahiren wir, so ergiebt sich

$$u^2-2bu\cos t+a^2+b^2-r^2=0\quad;\quad 2u-2b\cos t=0\,,$$

und daraus

$$u=\pm\sqrt{a^2+b^2-r^2}\quad\text{und}\quad\cos t=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{b}\,,$$

welches die Polarcoordinaten der doppelten Punkte sind, die die Curve, außer dem Anfangspunkte der Coordinaten, hat, und deren rechtwinklige Coordinaten wir bereits in §. 61. aufgefunden haben.

Es sey P der Inflexionspunkt einer Curve, dessen Radius vector u_1 Fig. 62. und der zugehörige Winkel t_1; ferner seyen t_1-h und t_1+h zwei wenig von t_1 verschiedene Winkel, zu welchen respective die Leitstrahlen u' und u'' der Curve und U' und U'' der Berührungslinie im Punkte P gehören. Aus der Polargleichung dieser Tangente (§. 71. S. 13)

$$\left\{\sin(t-t_1)\frac{du_1}{dt_1}-\cos(t-t_1)u_1\right\}U+u_1^2=0\,,$$

in welcher U den veränderlichen Radius vector dieser Geraden bedeutet, erhalten wir

$$\left\{\sin(t-t_1)\frac{du_1}{dt_1}-\cos(t-t_1)u_1\right\}\frac{dU}{dt}+\left\{\cos(t-t_1)\frac{du_1}{dt_1}+\sin(t-t_1)u_1\right\}U=0\,;$$

$$\left\{\sin(t-t_1)\frac{du_1}{dt_1}-\cos(t-t_1)u_1\right\}\frac{d^2U}{dt^2}$$

$$+2\left\{\cos(t-t_1)\frac{du_1}{dt_1}+\sin(t-t_1)u_1\right\}\frac{dU}{dt}-\left\{\sin(t-t_1)\frac{du_1}{dt_1}-\cos(t-t_1)u_1\right\}U=0\,.$$

Setzen wir nun $t=t_1$ und bezeichnen den, diesem Winkel entsprechenden, Werth von U durch U_1, so haben wir aus diesen Gleichungen

$$U_1=u_1\quad;\quad\frac{dU_1}{dt_1}=\frac{du_1}{dt_1}\quad;\quad\frac{d^2U_1}{dt_1^2}=\frac{2\frac{du_1^2}{dt_1^2}+u_1^2}{u_1}\,.$$

Da nun ferner

$$U'=U_1+\frac{dU_1}{dt_1}.h+\frac{d^2U_1}{dt_1^2}.\frac{h^2}{2}+\text{etc.}\,,$$

$$U''=U_1-\frac{dU_1}{dt_1}.h+\frac{d^2U_1}{dt_1^2}.\frac{h^2}{2}-\text{etc.}\,,$$

§. 91.

$$u' = u_1 + \frac{du_1}{dt_1}.h + \frac{d^2u_1}{dt_1^2}.\frac{h^2}{2} + \text{etc.},$$

$$u'' = u_1 - \frac{du_1}{dt_1}.h + \frac{d^2u_1}{dt_1^2}.\frac{h^2}{2} - \text{etc.},$$

so haben wir auch

$$u' - U' = \left(\frac{d^2u_1}{dt_1^2} - \frac{2\frac{du_1^2}{dt_1^2} + u_1^2}{u_1}\right)\frac{h^2}{2} + \left(\frac{d^3u_1}{dt_1^3} - \text{etc.}\right)\frac{h^3}{2.3} + \ldots,$$

$$u'' - U'' = \left(\frac{d^2u_1}{dt_1^2} - \frac{2\frac{du_1^2}{dt_1^2} + u_1^2}{u_1}\right)\frac{h^2}{2} - \left(\frac{d^3u_1}{dt_1^3} - \text{etc.}\right)\frac{h^3}{2.3} + \ldots.$$

Wenn aber P ein Inflexionspunkt ist, so muß, wenn $u' > U'$ ist, $u'' < U''$, oder wenn $u' < U'$ ist, $u'' > U''$ seyn; es müssen also $u' - U'$ und $u'' - U''$ entgegengesetzte Zeichen haben, was für ein gehörig kleines h nur Statt finden kann, wenn $\frac{d^2u_1}{dt_1^2} - \frac{2\frac{du_1^2}{dt_1^2} + u_1^2}{u_1}$ gleich 0 oder gleich ∞, oder, was dasselbe ist, wenn

$$\frac{u_1^2 + 2\frac{du_1^2}{dt_1^2} - u_1\frac{d^2u_1}{dt_1^2}}{u_1} = 0 \quad \text{oder} \quad = \infty \qquad (1)$$

ist *).

Aufgabe [148]. Die Inflexionspunkte der Conchoide und des Lituus zu finden.

---

*) Man kann dasselbe Resultat aus der Bedingung $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ gleich 0 oder gleich ∞ herleiten. Denn es ist, wie wir schon in der Aufgabe 138. (§. 83.) gefunden haben,

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{u_1^2 + 2\frac{du_1^2}{dt_1^2} - u_1\frac{d^2u_1}{dt_1^2}}{\left(\frac{du_1}{dt_1}\cos t_1 - u_1 \sin t_1\right)^3}.$$

Der Nenner dieses Ausdrucks aber, gleich Null oder gleich ∞ gesetzt, giebt keine Indication eines Inflexionspunktes, weil wir dies nicht in der obigen Herleitung gefunden haben. Wenn er verschwindet oder unendlich wird, so ist dadurch nur angezeigt, daß die Tangente im Punkte $t_1 u_1$ auf der Geraden, von welcher an die t gezählt sind, senkrecht steht, oder daß sie dieser Geraden parallel ist.

I. Wir haben, wie im §. 84. (Aufg. 140.), für die Conchoide §. 91

$$u = \frac{b + a\sin t}{\sin t} \; ; \; \frac{du}{dt} = -\frac{b\cos t}{\sin^2 t} \; ; \; \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{b(1+\cos^2 t)}{\sin^3 t} \; ;$$

und durch Substitution dieser Werthe in den vorher angegebenen Ausdruck (1) erhalten wir

$$\frac{a(a\sin^2 t + 3b\sin^2 t - 2b)}{(b + a\sin t)\sin^2 t} .$$

Dieser Ausdruck nun wird ∞, wenn $b + a\sin t = 0$, oder wenn $\sin t = 0$ ist. Im ersten Falle ist $u = 0$; der dadurch ausgedrückte Anfangspunkt der Coordinaten ist aber kein Inflexionspunkt, sondern ein conjugirter, oder ein Doppelpunkt oder ein Rückkehrpunkt, was sich aus dem im §. 60. Gesagten schon ergiebt. Im zweiten Falle ist $u = \infty$. Derselbe Ausdruck wird gleich Null, wenn

$$a\sin^3 t + 3b\sin^2 t - 2b = 0$$

ist. Um zu finden, wann diese Gleichung drei, und wann sie nur eine reelle Wurzel hat, setzen wir $\sin t = \frac{1}{z}$; alsdann kommt $2bz^3 - 3bz - a = 0$.

Diese Gleichung hat bekanntermaßen drei reelle Wurzeln, wenn $2b^2 \geqq a^2$, aber nur eine reelle Wurzel, wenn $2b^2 < a^2$; und dasselbe gilt folglich auch von der Gleichung, durch welche $\sin t$ bestimmt ist. Damit aber t reell sey, muß nicht nur $\sin t$ reell, sondern auch kleiner als $+1$ und größer als -1 seyn. Setzen wir, um hierüber Aufschluß zu erhalten, $\sin t = 0$ und $\sin t = +1$, so wird der erste Theil der Gleichung nicht auf Null, sondern respective auf $-2b$ und $a+b$ reducirt. Es liegt also in jedem Falle eine reelle Wurzel der Gleichung zwischen 0 und $+1$. Setzen wir ferner $\sin t = v - 1$, so kommt

$$av^3 + 3(b-a)v^2 + 3(a-2b)v + (b-a) = 0 \; ;$$

und nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ist nämlich erstens $b \geqq a$, in welchem Falle auch $b^2 \geqq a^2$, und um so mehr $2b^2 > a^2$, die Gleichung also drei reelle Wurzeln hat, so ist die Succession der Zeichen der Gleichung in v

$$+ + - + .$$

Diese Gleichung hat also, wenn $b > a$, zwei positive und eine negative Wurzel und für diesen negativen Werth von v ist $\sin t < -1$, also t imaginär. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch, wenn man in die erste Gleichung für $\sin t$ nach einander $+1$, 0, -1, u. $-\infty$ setzt, wodurch der

§. 91. erste Theil derselben $a+b$, $-b$, $b-a$ u. $-\infty$, also $+$, $-$, $+$, $-$ wird, woraus folgt, daß die drei Wurzeln dieser Gleichung respective zwischen $+1$ und 0, 0 und -1, -1 und $-\infty$ liegen. Also, wenn $b > a$ ist, sind zwei Werthe von t reell und einer ist imaginär. Ist nun zweitens $b < a$, so sind entweder zwei Werthe von $\sin t$ imaginär und dann ist nur ein Werth von t reell, oder es sind alle drei Werthe von $\sin t$ reell; aber alsdann ist dennoch nur ein Werth von t reell. Denn wenn die drei Wurzeln reell sind, so ist, wie oben bemerkt worden, $2b^2 > a^2$ oder $= a^2$, und da in dem jetzigen Falle $a > b$, so ist auch $2ab > a^2$ also $2b > a$; demnach sind $b-a$ und $a-2b$ negative Größen; die Succession der Zeichen in der Gleichung in v ist daher

$$+ \quad - \quad - \quad - \quad .$$

Diese Gleichung hat also zwei negative Wurzeln, und demnach sind zwei Werthe von $\sin t < -1$, d. i. zwei Werthe von t imaginär. Also, wenn $b < a$ ist, sind zwei Werthe von t imaginär und einer ist reell.

Da nun zu jedem Werthe von $\sin t$ zwei Werthe von t, nämlich t und $\pi - t$, gehören, so hat die Conchoide, wenn $b > a$, vier Inflexionspunkte, und, wenn $b < a$ ist, zwei Inflexionspunkte. Wenn $b = a$ ist, sind nur zwei Inflexionspunkte vorhanden und die Curve bildet alsdann im Anfangspunkte der Coordinaten eine Spitze.

II. Für den Lituus haben wir (§. 68. S. 4)

$$u = \pm\frac{r\alpha^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \text{daraus} \quad \frac{du}{dt} = \mp\frac{r\alpha^{\frac{1}{2}}}{2t^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \pm\frac{3r\alpha^{\frac{1}{2}}}{4t^{\frac{5}{2}}} \; .$$

Der Ausdruck (1) ist also im gegenwärtigen Falle

$$\pm\frac{r\alpha^{\frac{1}{2}}(4t^2-1)}{t^{\frac{1}{2}}} \; ;$$

er wird ∞ wenn $t = 0$, und gleich Null wenn $t = \infty$ oder wenn $t = \frac{1}{2}$. Aber für $t = 0$ ist $u = \infty$, daher giebt $t = 0$ keinen Inflexionspunkt an; für $t = \infty$ ist zwar $u = 0$, aber dieser Anfangspunkt wird von der Spirale niemals erreicht. Für $t = \frac{1}{2}$ ist $u = \pm r\sqrt{2\alpha}$ und der dadurch angegebene Punkt ist allerdings ein Inflexionspunkt. In der Fig. 55. Fig. 55. ist er durch I bezeichnet.

Von parallelen Curven.

§. 92. §. 92.

Einer Curve BCD ist eine andere Curve B'C'D' parallel, wenn diejenigen Stücke, BB', CC', DD' u. s. w., der an jener Curve gezogenen Normalen, welche zwischen beiden Curven liegen, sämmtlich einander gleich sind. Die constante Länge dieser Stücke soll die Entfernung der beiden Curven heißen. Fig. 63.

Aufgabe [149]. *Die Gleichung einer Curve, $F(x,y)=0$, in rechtwinkligen Coordinaten ist gegeben; man soll die Gleichung der ihr in der gegebenen Entfernung c parallelen Curve finden.*

Es seyen x', y' die auf dieselben Achsen bezogenen Coordinaten der gesuchten Curve. Die Gleichung der Normale in einem Punkte x_1y_1 der gegebenen Curve ist (§. 71. S. 8)

$$(y-y_1)\frac{dy_1}{dx_1}+(x-x_1)=0\,.$$

Weil nun ein Punkt $x'_1y'_1$ der gesuchten Curve auf dieser Normale und zwar in der Entfernung c vom Punkte x_1y_1 liegen soll, so hat man zu gleicher Zeit

$$(y'_1-y_1)\frac{dy_1}{dx_1}+(x'_1-x_1)=0\,,$$
$$(y'_1-y_1)^2+(x'_1-x_1)^2=c^2\,;$$

und weil diese Relationen zwischen je zwei correspondirenden Punkten beider Curven Statt finden müssen,

$$(y'-y)\frac{dy}{dx}+(x'-x)=0\,, \qquad (1)$$
$$(y'-y)^2+(x'-x)^2=c^2\,. \qquad (2)$$

Eliminirt man zwischen der gegebenen Gleichung

$$F(x,y)=0\,,\ \text{ihrer Differentialgleichung}\ \left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dF}{dx}\right)=0\,,$$

und den Gleichungen (1) u. (2) die drei Größen x, y, $\frac{dy}{dx}$; so erhält man eine Gleichung zwischen x' und y', welche die der gesuchten Curve ist.

§. 92. Entwickelt man aus den Gleichungen (1) u. (2) y' und x', so kommt

$$y' = y \pm \frac{c}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}} \quad ; \quad x' = x \mp \frac{c\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}} . \qquad (3)$$

Ist die gegebene Curve durch ein System zweier Gleichungen zwischen x, y und einer dritten Veränderlichen t gegeben, so hat man

$$y' = y \pm \frac{c\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dx^2}{dt^2}}} \quad ; \quad x' = x \mp \frac{c\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dx^2}{dt^2}}} . \qquad (4)$$

Fig. 63. Lehrsatz [48]. Wenn einer Curve BCD eine Curve B'C'D' parallel ist, so ist auch die erste Curve BCD der zweiten B'C'D' parallel.

Um diesen Satz zu beweisen, ist nur nöthig zu zeigen, daß die Normalen der Curve BCD auch zugleich Normalen der Curve B'C'D' sind, oder mit andern Worten, daß die Tangenten in zwei correspondirenden Punkten xy und $x'y'$ einander parallel, daß also $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}$ ist.

Zu dem Ende bemerken wir zunächst, daß in Folge der Gleichungen (1), (2) und $F(x, y) = 0$ je drei von den Größen x, y, x', y' Functionen der vierten Unabhängigen sind. Wählen wir x' zu dieser Unabhängigen, und differentiiren die Gleichung (2) aus diesem Gesichtspunkte, so erhalten wir

$$(y'-y)\frac{dy'}{dx'} + (x-x') - \left\{(y'-y)\frac{dy}{dx} + (x'-x)\right\}\frac{dx}{dx'} = 0 .$$

Da aber, in Folge der Gleichung (1), der $\frac{dx}{dx'}$ multiplicirende Factor $= 0$ ist, so reducirt sich die so eben gefundene Gleichung auf

$$(y-y')\frac{dy'}{dx'} + (x-x') = 0 ,$$

und wenn man, zwischen dieser Gleichung und (1), $(x-x')$ eliminirt, so kommt

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx} , \qquad (5)$$

was gezeigt werden sollte.

Aufgabe [150]. Der Krümmungsradius ϱ eines Punktes B einer Curve BCD und die Entfernung c einer ihr parallelen Curve B'C'D' ist gegeben. Man soll den Krümmungsradius ϱ' des dem Punkte B correspondirenden Punktes B' durch ϱ und c ausdrücken. §. 92. Fig. 63.

Die Lösung dieser Aufgabe läßt sich zwar aus der Betrachtung der Evolute der Curve BCD leicht auffinden; wir wollen indessen den analytischen Weg einschlagen.

Der Krümmungsradius ϱ' ist, wenn x', y' die Coordinaten von B' sind (§. 83. F. 10.),

$$\varrho' = \frac{\left(1+\frac{dy'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}} \quad . \qquad (6)$$

Nun ist (5) $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}$, und wenn wir diese Gleichung aus dem im vorigen Satze aufgestellten Gesichtspunkte differentiiren,

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dx'} \quad . \qquad (7)$$

Differentiiren wir aber eben so die Gleichung (1), so kommt

$$\left\{(y'-y)\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)\right\}\frac{dx}{dx'} + \frac{dy'}{dx'}\cdot\frac{dy}{dx}+1 = 0 \; ;$$

und setzen wir in diese Gleichung den Werth (3) für y', und $\frac{dy}{dx}$ für $\frac{dy'}{dx'}$ in Folge von (5), so erhalten wir

$$\left\{\pm c\frac{d^2y}{dx^2} - \left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\frac{dx}{dx'} + \left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \; ,$$

also

$$\frac{dx}{dx'} = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} \mp c\frac{d^2y}{dx^2}} \quad . \qquad (8)$$

Elimiriren wir nun zwischen den Gleichungen (5, 6, 7 u. 8), $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ und $\frac{dx}{dx'}$, so kommt

§. 92.

$$\varrho' = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \mp c \ ,$$

und, da $\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \varrho$ ist,

$$\varrho' = \varrho \mp c \ , \qquad (9)$$

welches der verlangte Ausdruck ist.

Die Differenz der Krümmungsradien ($\varrho' - \varrho$) correspondirender Punkte zweier parallelen Curven ist also eine constante Größe und der Entfernung dieser Curven gleich.

§. 93.

Da die Normalen der correspondirenden Punkte zweier parallelen Curven auf einander fallen und die Differenz der Krümmungsradien der Entfernung dieser Punkte gleich ist, so folgt, daß auch die Krümmungsmittelpunkte der correspondirenden Punkte auf einander fallen; woraus sich unmittelbar ergiebt, daß zwei parallele Curven eine und dieselbe Evolute haben.

Aufgabe [151]. Die Curve zu finden, welche einem gegebenen Kreise in einer gegebenen Entfernung parallel ist.

Es sey

$$y^2+x^2 = r^2$$

die Gleichung des gegebenen Kreises und c die gegebene Entfernung. Alsdann ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ und $\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{1}{y}\sqrt{y^2+x^2} = \frac{r}{y}$. Die Gleichungen (3) des vor. §. sind daher für den jetzigen Fall

$$y' = y\left(1 \pm \frac{c}{r}\right) \quad ; \quad x' = x\left(1 \pm \frac{c}{r}\right) ;$$

woraus

$$y = \frac{r}{r \pm c}.y' \quad ; \quad x = \frac{r}{r \pm c}.x' \ .$$

Diese Ausdrücke, in die Gleichung des gegebenen Kreises substituirt, geben

$$y'^2+x'^2 = (r \pm c)^2$$

als Gleichung der gesuchten Curve. Diese besteht also aus zweien dem ge- §. 93.
gebenen concentrischen Kreisen, deren Radien respective $r+c$ und $r-c$ sind, was wir leicht hätten voraussehen können.

Wenn die Curve, welche einer gegebenen in einer bestimmten Entfernung c parallel ist, nicht aus zwei Linien zusammen gesetzt ist, so besteht sie wenigstens aus zwei Zügen, die unter sich in der Entfernung 2c parallel sind. Dies folgt daraus, daß zu jedem Punkte xy der gegebenen Curve, wegen der doppelten Vorzeichen in den Gleichungen (3 od. 4), welche man als zu c gehörig ansehen kann, zwei correspondirende Punkte x'y' der parallelen Curve gehören.

Was die Gestalt einer parallelen Curve betrifft, so ist diese im Allgemeinen nicht nur von der Gestalt der gegebenen, sondern auch von der Größe der Entfernung c abhängig. Wir wollen annehmen, eine gegebene Curve M, welcher eine andere Curve M' in der Entfernung c parallel ist, habe keinen ausgezeichneten Punkt, aber der Krümmungsradius ϱ der Curve M sey zwischen zwei bestimmten Grenzen γ und γ' enthalten, so daß er nicht kleiner als γ und nicht größer als γ' seyn, aber jeden zwischen diesen Grenzen liegenden Werth haben könne. — Die Ellipse kann als Beispiel einer solchen Curve dienen. Wenn 2a und 2b ihre Achsen sind, so kann ihr Krümmungsradius nicht kleiner als $\frac{b^2}{a}$ und nicht größer als $\frac{a^2}{b}$ seyn, was sich aus (1) in §. 84. leicht ergiebt. — Nun sind zwei Fälle möglich, entweder c liegt innerhalb derselben Grenzen γ und γ' ohne einer derselben gleich zu seyn, oder dies findet nicht Statt. In dem ersten Falle muß es in der Curve M einen Punkt x_1y_1 geben, für welchen $\varrho_1 = c$ ist. Da nun von den beiden correspondirenden Punkten x_1y_1 u. $x'_1y'_1$ der Krümmungsradius des einen $\varrho'_1 = \varrho_1 - c$ ist, so ist $\varrho'_1 = 0$. Sind die Krümmungsradien der dem Punkte x_1y_1 nahe liegenden Punkte xy vor demselben kleiner und nach demselben größer als c, so sind die Krümmungsradien der Punkte x'y', welche dem Punkte $x'_1y'_1$ nahe liegen, da immer $\varrho' = \varrho - c$, negativ und positiv. Es findet also in dem Punkte $x'_1y'_1$ ein Wechsel der Concavität und Convexität Statt, und dieser Punkt der Curve M' ist somit ein ausgezeichneter. In dem zweiten Falle, wenn nämlich $c < \gamma$ oder $c > \gamma'$ ist, findet ein Wechsel der Concavität und Convexität in der Curve M' nicht Statt.

Wenn der Krümmungsradius ϱ der Curve M von 0 bis ∞ wachsen

§. 93. kann, so hat jede parallele Curve M' einen ausgezeichneten Punkt, wie auch c angenommen werden mag.

Was die Verzeichnung der Curve betrifft, welche einer gegebenen parallel ist, so dürfte es in der Regel am gerathensten seyn, eine Anzahl Normalen der gegebenen zu construiren und auf denselben gleiche Stücke abzuschneiden; und was ihren analytischen Ausdruck anbelangt, so ist besser, sie durch das System zweier Gleichungen auszudrücken, als vermittelst beschwerlicher Eliminationen eine einzige Gleichung, die gewöhnlich sehr complicirt ist, aufzusuchen.

Aufgabe [152]. Die Curve, welche einer gegebenen Ellipse, und zweitens diejenige, welche einer gegebenen Cycloide parallel ist, zu finden.

I. Es sey $a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2$ die Gleichung der gegebenen Ellipse. Wir führen eine dritte Veränderliche t ein, indem wir

$$y = b\sin t \quad \text{und} \quad x = a\cos t$$

setzen. Substituiren wir nämlich diese Ausdrücke in die Gleichung der Ellipse, so kommt, nach der Division durch a^2b^2, $\sin^2 t+\cos^2 t = 1$, eine Gleichung, welche von jedem Werth von t befriedigt wird; wir können daher t als die einzige Unabhängige betrachten. Nun haben wir $\frac{dy}{dt} = b\cos t$ und $\frac{dx}{dt} = -a\sin t$; und die Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen (4) des vorigen §. giebt

$$\left\{\begin{array}{l} y' = \left\{b \pm \frac{ac}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\right\}.\sin t \\ x' = \left\{a \pm \frac{bc}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\right\}.\cos t \end{array}\right\}.$$

Das System dieser beiden Gleichungen drückt die der Ellipse parallele Curve aus. In Fig. 64. und 65. ist diese abgebildet; für die erstere ist $c = \frac{1}{15}$, Fig. 64., für die zweite $c = 1\frac{1}{2}$, während $a = 1$ und $b = \frac{1}{2}$ ist; jene hat keinen 65. ausgezeichneten Punkt; diese hat vier Rückkehrpunkte und außerdem zwei Doppelpunkte.

II. Es sey die Cycloide durch das System der beiden Gleichungen

$y =$

$$\left\{\begin{array}{l} y = a(1-\cos t) \\ x = a(t-\sin t) \end{array}\right\}$$ §. 93.

(§. 66. S. 3) gegeben. Dann haben wir $\frac{dy}{dt} = a\sin t$; $\frac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$, und alſo, zufolge der Gleichungen (4) des vor. §.,

$$y' = a - a\cos t \pm \frac{c(1-\cos t)}{\sqrt{2(1-\cos t)}} \quad ; \quad x' = at - a\sin t \mp \frac{c\sin t}{\sqrt{2(1-\cos t)}},$$

oder, wenn man $\frac{1}{2}t = \vartheta$ ſetzt,

$$\left\{\begin{array}{l} y' = \{2a\sin\vartheta \pm c\}.\sin\vartheta \\ x' = 2a\vartheta - \{2a\sin\vartheta \pm c\}.\cos\vartheta \end{array}\right\}.$$

Das Syſtem dieſer beiden Gleichungen drückt die der Cycloide parallele Curve aus.

Von den einhüllenden oder Grenz-Curven.

§. 94.

Wenn man eine Reihe von Curven betrachtet, die nach irgend einem Geſetze continuirlich auf einander folgen, ſo ſind drei Fälle gedenkbar. Die Curven der Reihe berühren entweder ſämmtlich eine und dieſelbe Curve (welche letztere auch aus mehreren einzelnen Curven beſtehen oder in einen oder mehrere Punkte degeneriren kann) und zwar in immer anderen und anderen Punkten, oder jene Curven ſchneiden oder berühren ſich alle in denſelben Punkten, oder endlich jene Curven liegen ſo in oder neben einander, daß die beiden erſten Fälle nicht Statt finden. Als ein Beiſpiel für den erſten Fall kann eine Reihe gleicher Kreiſe dienen, deren Mittelpunkte auf der Peripherie eines andern Kreiſes liegen; alle Kreiſe der Reihe berühren zwei, dem zuletzt genannten concentriſche, Kreiſe, von welchen der kleinere in einen Punkt degenerirt, wenn der gemeinſchaftliche Radius aller Kreiſe der Reihe dem Radius des Kreiſes gleich iſt, auf welchem die Mittelpunkte liegen. Als ein Beiſpiel für den zweiten Fall dient eine Reihe von Kreiſen, welche eine gemeinſchaftliche Sehne haben, oder welche ſich ſämmtlich in einem und demſelben Punkte berühren; und als Beiſpiel für den dritten Fall eine Reihe concentriſcher Kreiſe.

§. 94. Wenn der erste Fall Statt findet, so heißt die Curve, welche sämmtliche Curven der Reihe berührt, die einhüllende oder Grenz-Curve, jede Curve der Reihe aber die eingehüllte.

Jede Gleichung $F(x, y, c) = 0$, in welcher x, y rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinaten, c aber eine willkürlich zu bestimmende Constante bedeutet, drückt eine bestimmte oder individuelle Curve aus, wenn dem c ein bestimmter Werth beigelegt wird; sie drückt aber immer andere und andere continuirlich auf einander folgende Curven aus, wenn dem c verschiedene continuirlich auf einander folgende Werthe beigelegt werden. Betrachtet man also die Gleichung $F(x, y, c) = 0$ als diejenige einer eingehüllten Curve, so stellt sich die

Aufgabe [153]. Aus der Gleichung $F(x, y, c) = 0$ einer eingehüllten Curve, die Gleichung der einhüllenden Curve zu finden.

Wäre die Gleichung der einhüllenden Curve bekannt, so würde der Punkt, in welchem sie von einer jeden eingehüllten Curve berührt wird, gefunden werden können, indem man x und y aus der gegebenen Gleichung der eingehüllten und aus derjenigen der einhüllenden bestimmt. Diese Coordinaten des Berührungspunktes, die wir zur Unterscheidung durch x', y' bezeichnen wollen, würden alsdann durch die Constante c ausgedrückt seyn; sie sind somit Functionen von c, so daß wir haben $x' = \varphi(c)$ und $y' = \psi(c)$, wo φ und ψ zwei noch unbekannte Functionen bedeuten. Da aber diese Werthe von x' und y' die Gleichung $F(x, y, c) = 0$ befriedigen müssen, so wird diese Gleichung identisch gleich Null werden, wenn man für x und y darin respective $\varphi(c)$ und $\psi(c)$ setzt. Die nach c genommenen Differentialcoefficienten dieser Gleichung werden also für diese Werthe verschwinden. Wir haben demnach, wenn wir, der Kürze wegen, $F(x, y, c)$ durch F, und $F(x', y', c)$ durch F' bezeichnen, $\frac{dF'}{dc} = 0$, oder, was dasselbe ist:

$$\left\{\left(\frac{dF'}{dy'}\right)\frac{dy'}{dx'} + \left(\frac{dF'}{dx'}\right)\right\}\frac{dx'}{dc} + \left(\frac{dF'}{dc}\right) = 0 .$$

Nun ist aber die Differentialgleichung der eingehüllten Curve

$$\left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dF}{dx}\right) = 0 ,$$

und weil für einen Berührungspunkt dieser Curve und der einhüllenden $x = x'$, $y = y'$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}$ ist,

$$\left(\frac{dF'}{dy'}\right)\frac{dy'}{dx'}+\left(\frac{dF'}{dx'}\right)=0\,,$$ §. 94.

wodurch sich die vorige Gleichung auf

$$\left(\frac{dF'}{dc}\right)=0$$

reducirt. Für diejenigen Punkte, in welchen sich die einhüllende und eingehüllte Curve berühren, ist also zu gleicher Zeit

$$F(x',y',c)=0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dF(x',y',c)}{dc}\right)=0\,,$$

aus welchen beiden Gleichungen man im Allgemeinen x' und y' durch c ausdrücken, d. i. die Functionen $\varphi(c)$ und $\psi(c)$ bestimmen kann. Eliminirt man aber zwischen diesen Gleichungen das c, so erhält man eine Gleichung, welche den Ort des Berührungspunktes, d. i. die einhüllende Curve ausdrückt. Als Lösung unserer Aufgabe haben wir demnach folgende Regel. Man differentiire die gegebene Gleichung der eingehüllten Curve $F(x,y,c)=0$ nur nach c, setze das Resultat gleich Null, und eliminire c zwischen der so gebildeten und der gegebenen Gleichung; die Finalgleichung ist alsdann die Gleichung der einhüllenden Curve.

Wenn die Gleichung der eingehüllten Curve mehrere willkürliche Constanten enthält, wenn zugleich aber so viele Gleichungen zwischen diesen Constanten gegeben sind, daß sie dadurch alle bis auf eine bestimmt werden, so erleidet das Verfahren zur Aufsuchung der einhüllenden Curve keine wesentliche Aenderung. Denn wenn die Gleichung der eingehüllten Curve n Constanten, $c_1, c_2, \ldots c_n$, enthält, zwischen welchen $(n-1)$ Gleichungen gegeben sind, so kann man, vermittelst der letztern, $(n-1)$ Constanten aus jener Gleichung wegschaffen, und sodann nach der angegebenen Art verfahren; oder man kann die Gleichung der Curve und die gegebenen $(n-1)$ andern Gleichungen in Beziehung auf $c_1, c_2, \ldots c_n$ differentiiren, indem man $(n-1)$ dieser Größen als Functionen der $n$ten ansieht, wodurch man n Differentialgleichungen erhält; eliminirt man sodann zwischen allen Gleichungen, deren Anzahl $= 2n$, die $(2n-1)$ Größen $c_1, c_2, \ldots c_n, \frac{dc_1}{dc_n}, \frac{dc_2}{dc_n}, \ldots \frac{dc_{n-1}}{dc_n}$, so ist die Finalgleichung die Gleichung der einhüllenden Curve.

Ueber die obige Auflösung der Aufgabe ist noch Folgendes zu bemerken.

§. 94. Aus den beiden Gleichungen

$$F(x', y', c) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dF(x', y', c)}{dc}\right) = 0$$

kann man ſowohl x' als y' eliminiren, und dadurch ſowohl eine Gleichung zwiſchen y' und c als zwiſchen x' und c erhalten, ſo daß man c ſowohl durch x' als durch y' ausdrücken kann. In den Fällen, in welchen das x' und das y' aus dieſen Ausdrücken von ſelbſt fortfallen, iſt c offenbar keine Function dieſer Größen, daher iſt dann auch umgekehrt weder y' noch x' eine Function von c, was der Vorausſetzung einer einhüllenden Curve widerſpricht. In dieſen Fällen iſt demnach die durch Elimination von c ſich ergebende Gleichung nicht diejenige einer einhüllenden Curve. Iſt z. B.

$$(y^2+x^2-a^2)(y^2-2cy)+c^2(x^2-a^2) = 0$$

die gegebene Gleichung der Curven, in welcher c die willkürliche Conſtante bedeutet, ſo erhalten wir durch Differentiation nach c

$$-(y^2+x^2-a^2)y+c(x^2-a^2) = 0\,.$$

Eliminiren wir c zwiſchen beiden Gleichungen, ſo kommt

$$y^2(y^2+x^2-a^2) = 0\,;$$

und dieſe Gleichung, welche die Abſciſſenachſe und einen Kreis ausdrückt, obwohl ſie nach der angegebenen Regel gebildet worden, iſt dennoch nicht diejenige von einhüllenden Curven. Denn eliminirt man x, ſo geht y von ſelbſt fort, und man erhält $c = 0$, ſo daß alſo c keine Function von x oder y, ſondern unveränderlich iſt. Inzwiſchen berühren alle durch die erſte Gleichung ausgedrückten Curven den durch die Gleichung $y^2+x^2-a^2 = 0$ ausgedrückten Kreis, aber immer in denſelben beiden Punkten der Abſciſſenachſe, deren Abſciſſen $+a$ und $-a$ ſind, wovon man ſich leicht überzeugen wird.

Wenn c ſich als keine Function von x oder y darſtellt, ſo drückt die durch Elimination von c reſultirende Gleichung, welche nun keiner einhüllenden Curve angehört, nur eine beſtimmte Curve unter den gegebenen Curven der Reihe aus, und eben dieſe Gleichung kann alsdann aus der gegebenen dadurch hervorgebracht werden, daß man dem c denjenigen conſtanten Werth beilegt, der ſich für dieſe Größe nach der angegebenen Weiſe finden würde. So z. B. erhält man die Gleichung $y^2(y^2+x^2-a^2) = 0$ aus der zuerſt angeführten, wenn man darin $c = 0$ ſetzt.

Man muß aber nicht umgekehrt ſchließen, nämlich daß, wenn man aus einer gegebenen Gleichung $F(x, y, c) = 0$, nach dem angegebenen Verfah-

ren durch Elimination von c, eine Gleichung $f(x, y) = 0$ erhalten hat, welche letztere aus der gegebenen auch dadurch hervorgebracht werden kann, daß man dem c einen bestimmten constanten Werth beilegt, diese Gleichung $f(x, y) = 0$ eine einhüllende Curve der gegebenen nicht ausdrücken könne; und wir glauben dies ausdrücklich bemerken zu müssen, weil die Art, wie sich Lagrange hierüber äußert, zu einem solchen Schlusse veranlassen könnte *). Denn es ist möglich, daß die Gleichung $f(x, y) = 0$ aus der Gleichung $F(x, y, c) = 0$ entsteht sowohl dadurch, daß man für c jenen bestimmten constanten Werth setzt als dadurch, daß man statt des c eine bestimmte Function von x und y substituirt. Ist z. B. §. 94.

$$2a^2y = c(y^2 + x^2) - 2c^2x + c^3$$

die gegebene Gleichung, so ergiebt sich für $c = 0$

$$y = 0,$$

und man würde sehr irren, wenn man diese Gleichung nicht als diejenige einer einhüllenden Curve wollte gelten lassen; denn setzt man $c = x$, so erhält man ebenfalls $y = 0$; und in der That drückt die erstgenannte Gleichung eine Reihe von Kreisen aus, welche die Abscissenachse in immer anderen und anderen Punkten berühren.

Aus dem bis jetzt Gesagten ergiebt sich, daß wir der in der obigen Lösung angegebenen Regel folgenden Zusatz beifügen müssen. Nachdem man durch Elimination von c zwischen den Gleichungen $F(x, y, c) = 0$ und $\left(\frac{dF(x, y, c)}{dc}\right) = 0$ die Gleichung $f(x, y) = 0$ erhalten hat, untersuche man, ob, in Folge dieser Gleichungen, c eine Function von x oder y sey oder nicht, und verwerfe in dem letztern Falle die gefundene Gleichung als keine Grenz-Curve ausdrückend.

Eine zweite Bemerkung, die wir nicht übergehn dürfen, ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Es sey aus $F(x, y, c) = 0$ die Gleichung $f(x, y) = 0$ der einhüllenden Curve gefunden worden. Hätten wir jene Gleichung nach c aufgelöst, und ihr dadurch die Form $\varphi(x, y) + c = 0$ gegeben, so würde der aus ihr erhaltene Differentialcoefficient nach c, da $\varphi(x, y)$ kein c enthält, gleich 1 sich ergeben haben, welcher nicht gleich Null gesetzt werden kann. Die angegebene Regel würde also auf die Gleichung $\varphi(x, y) + c = 0$ angewendet, zu keinem Resultate geführt haben, obgleich eine Grenz-

*) Leçons sur le calcul des fonctions, nouv. édit. (1806) p. 181.

§. 94. curve wohl existirt. Man muß nicht glauben, daß die Regel bloß in dem Falle kein Resultat giebt, wenn die gegebene Gleichung nach c aufgelöst ist, oder, mit andern Worten, wenn c sich nur in einem Gliede und von x und y abgesondert befindet; es kann dies auch in andern Fällen Statt finden. Wäre z. B. die Gleichung der gegebenen Curven

$$cy - e^{\sqrt{x-a}} = 0 ,$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnen soll, so würde der Differentialcoefficient nach c gleich Null gesetzt,

$$y = 0$$

geben. Zwischen dieser Gleichung und der gegebenen ist nun c nicht mehr zu eliminiren, und wenn sich nach der mehrerwähnten Regel eine einhüllende Curve hier ergeben sollte, so müßte $y = 0$ selbst die Gleichung dieser Curve seyn. Entwickeln wir aber c aus der ersten Gleichung, so kommt

$$c = \frac{e^{\sqrt{x-a}}}{y} ,$$

ein Ausdruck, der für $y = 0$, $c = \infty$ giebt. Da nun c hier keine Function von x und y ist, so ist auch $y = 0$ nicht die Gleichung der einhüllenden Curve, und also eine solche durch die Anwendung unserer Regel bis jetzt nicht gefunden, obgleich sie wirklich existirt. Denn bringen wir die gegebene Gleichung auf die Form $log\, cy = \sqrt{x-a}$ oder

$$(log\, cy)^2 - (x-a) = 0 ,$$

so giebt die Differentiation nach c

$$\frac{log\, cy}{c} = 0 ,$$

woraus $cy = 1$, also $c = \frac{1}{y}$, und durch Elimination von c

$$x - a = 0$$

als Gleichung der Grenz-Curve folgt.

Die angegebene Regel führt also in besondern Fällen nicht zu der Gleichung der Grenzcurve, und dies rührt daher, daß in der Gleichung

$$\left\{\left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dF}{dx}\right)\right\}\frac{dx}{dc} + \left(\frac{dF}{dc}\right) = 0$$

der Ausdruck $\left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dF}{dc}\right)$ in solchen Fällen einen Nenner hat, welcher,

eben für die Berührungspunkte einer jeden Curve der Reihe mit der Grenzcurve, gleich Null wird. Bezeichnen wir demnach jenen Ausdruck durch $\frac{A\frac{dy}{dx}+B}{N}$, wo A, B und N im Allgemeinen Functionen von x und y sind, so ist jene Gleichung, nach Fortschaffung des Nenners,

$$\left\{A\frac{dy}{dx}+B\right\}\frac{dx}{dc}+N\left(\frac{dF}{dc}\right)=0\,;$$

und dieser Gleichung wird, da $A\frac{dy}{dx}+B=0$ ist, nicht nur durch $\left(\frac{dF}{dc}\right)=0$, sondern auch durch $N=0$ Genüge geleistet. Wir müssen daher, um keinen besondern Fall zu übergehn, der gefundenen Regel noch folgenden zweiten Zusatz beifügen. Man setze in der unmittelbaren Differentialgleichung der gegebenen den Nenner dieser abgeleiteten Gleichung, wenn ein solcher vorhanden ist, gleich Null; enthält die auf diese Weise gebildete Gleichung das c nicht, so kann sie die Gleichung einer Grenzcurve seyn. Ob sie es ist, muß dadurch geprüft werden, daß man erstlich x oder y zwischen ihr und der gegebenen Gleichung eliminirt, und dadurch entscheidet, ob c als eine Function von y oder x sich darstellt; und daß man zweitens untersucht, ob die gefundene Curve von der gegebenen wirklich berührt wird, d. i. ob die aus der gegebenen Gleichung durch Differentiation und Elimination von c sich ergebende Differentialgleichung mit der Differentialgleichung der gefundenen Curve übereinstimmt. §. 94.

Ist z. B. $cy-e^{\sqrt{x-a}}=0$, wie oben, die gegebene Gleichung der eingehüllten Curven, so erhalten wir durch Differentiation

$$c\frac{dy}{dx}-\frac{e^{\sqrt{x-a}}}{2\sqrt{x-a}}\,,$$

und setzen wir den Nenner gleich Null, so erhalten wir $x-a=0$. Eliminiren wir zur Prüfung erstlich x, so ergiebt sich $cy-1=0$, also $c=\frac{1}{y}$, und somit c als eine Function von y. Eliminiren wir zweitens c zwischen der gegebenen Gleichung und ihrer Differentialgleichung, so kommt

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2\sqrt{x-a}}{y}\,,$$

eine Gleichung, welche, für $x-a=0$, $\frac{dx}{dy}=0$ giebt, und dieser Werth

§. 94. stimmt mit demjenigen überein, welchen die Gleichung $x-a=0$ durch Differentiation für $\frac{dx}{dy}$ unmittelbar giebt. Es ist also $x-a=0$ die Gleichung einer einhüllenden Linie, was wir übrigens schon oben gefunden hatten *).

§. 95.

Fig. 66. Aufgabe [154]. Auf einer gegebenen Geraden sind zwei feste Punkte B, B′ beliebig angenommen. Eine gerade Linie GG′ bewegt sich so, daß das Product der in B u. B′ errichteten Ordinaten BD u. B′D′, die einer gegebenen Richtung parallel sind, einer ebenfalls gegebenen Größe b^2 gleich sey. Es soll die Curve gefunden werden, welche von den Geraden GG′ berührt wird.

Wir nehmen die Gerade BB′ zur Abscissenachse und die, durch den Halbirungspunkt A der Entfernung BB′ gehende, der gegebenen Richtung parallele, Gerade YY′ zur Ordinatenachse. Ist nun $AB = AB' = a$ und bezeichnen wir die Gleichung der Geraden GG′ durch

$$y = c_1 x + c_2 , \qquad (1)$$

so ist, für $x = a$, $y = c_2 + c_1 a$, und für $x = -a$, $y = c_2 - c_1 a$. Demnach, in Folge der Aufgabe,

$$c_2^2 - a^2 c_1^2 = b^2 , \qquad (2)$$

und, wenn wir nun aus der ersten Gleichung c_2 fortschaffen,

$$y = c_1 x \pm \sqrt{b^2 + a^2 c_1^2} . \qquad (3)$$

Differentiiren wir diese Gleichung nur nach c_1 und setzen den Differentialcoefficienten gleich Null (vor. §.), so kommt

$$x \pm \frac{a^2 c_1}{\sqrt{b^2 + a^2 c_1^2}} = 0 , \qquad (4)$$

---

*) Auf die, durch unsern zweiten Zusatz gehobene, Unvollständigkeit der oben angegebenen Regel hat Hr. Ohm in seinem Versuch eines vollkommen consequenten Systems ꝛc. zuerst mit mehr Bestimmtheit aufmerksam gemacht, als dies früher geschehen war, und die zweite Regel vorgeschrieben, daß man auch $\left(\frac{dF}{dy}\right) = \frac{1}{0}$ setzen soll. Es ist hierbei zu bemerken, daß man ebenfalls $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}$ setzen müsse. In dem, im Texte angeführten, Beispiele ist $\left(\frac{dF}{dy}\right) = c$, und $c = \frac{1}{0}$ giebt keine einhüllende Curve. Dagegen ist $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{e^{\sqrt{x-a}}}{2\sqrt{x-a}}$, und also für $\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{1}{0}$, wie oben, $x-a=0$.

und, wenn wir c_1 zwiſchen (3) und (4) elimininen, §. 95.

$$a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2 , \qquad (5)$$

als Gleichung der geſuchten Curve, welche alſo eine Ellipſe oder Hyperbel iſt, je nachdem b^2 eine poſitive oder negative Größe bedeutet, d. i. je nachdem die Gerade GG' in den Punkten B und B' der Abſciſſenachſe Ordinaten von gleichen oder von entgegengeſetzten Zeichen hat.

Statt c_2 vor der Differentiation zwiſchen (1) und (2) zu elimininen, hätten wir auch dieſe beiden Gleichungen ſogleich nach c_1 differentiiren können. Dies würde uns

$$x+\frac{dc_2}{dc_1} = 0 \quad \text{und} \quad c_2\frac{dc_2}{dc_1}-a^2c_1 = 0 ,$$

und durch Elimination von $\frac{dc_2}{dc_1}$,

$$c_2x+c_1a^2 = 0 \qquad (6)$$

gegeben haben. Beſtimmen wir nun aus (1) und (6) die Größen c_1 und c_2, und ſetzen ihre Werthe in (2), ſo ergiebt ſich, wie vorher, die Gleichung (5).

Aufgabe [155]. Es iſt ein Winkel BAB', und auf den Schenkeln Fig. 67.
deſſelben ſind zwei Punkte B, B' gegeben. Eine Gerade GG' bewegt ſich ſo, daß ſie von jenen Schenkeln die Stücke AD, AD' abſchneidet, deren Product $\overline{AD}.\overline{AD'} = \overline{BD}.\overline{B'D'}$ iſt. Es ſoll die Curve gefunden werden, welche von der Geraden GG' berührt wird.

Wir ziehen BB', und durch den Halbirungspunkt C derſelben die Gerade AX, die wir zur Abſciſſenachſe, ferner durch A der BB' die YY' parallel, die wir zur Ordinatenachſe annehmen. Bezeichnen wir noch, der Kürze wegen, AB, AB' durch m, m' und AD, AD' durch n, n', ferner AC durch 2a und BB' durch 2b; ſo haben wir, in Folge der Aufgabe, $nn' = (m-n)(m'-n')$ oder

$$mm'-nm'-n'm = 0 . \qquad (7)$$

Sind nun α, β und α', β' die Coordinaten der Punkte D und D', ſo iſt die Gleichung der Geraden GG'

$$(\alpha'-\alpha)y-(\beta'-\beta)x-\alpha'\beta+\alpha\beta' = 0 . \qquad (8)$$

Wir haben aber, weil D und D' auf den Geraden AB und AB' liegen,

$$\beta = \frac{b}{2a}\alpha \;\; ; \;\; \beta' = -\frac{b}{2a}\alpha' \;\; ; \;\; n = \frac{m}{2a}\alpha \;\; ; \;\; n' = \frac{m'}{2a}\alpha' ,$$

§. 95. Fig. 67. und dieſe Ausdrücke, in (7) und (8) ſubſtituirt, geben

$$\alpha+\alpha'-2a=0\,,$$
$$2a(\alpha'-\alpha)y+b(\alpha'+\alpha)x-2b\alpha'\alpha=0\,,$$

woraus durch Elimination von α'

$$2a(a-\alpha)y+abx-b(2a\alpha-\alpha^2)=0\,. \qquad (9)$$

Differentiiren wir dieſe Gleichung der Geraden GG' nach α, ſo kommt

$$ay+ba-b\alpha=0\,, \qquad (10)$$

und, wenn wir α zwiſchen (9) u. (10) eliminiren,

$$ay^2=b^2(x-a)\,, \qquad (11)$$

als Gleichung der geſuchten Curve, welche alſo eine Parabel iſt.

Da, für $y=0$, $x=a$ iſt, ſo geht dieſe Parabel durch den Halbirungspunkt von AC; da ferner, für $x=2a$, $y=\pm b$ und $\frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{2ay}=\pm\frac{b}{2a}$ iſt, ſo geht dieſe Curve auch durch die Punkte B, B' und wird daſelbſt von den Schenkeln des gegebenen Winkels berührt.

Wir kommen bei einer andern Wahl der Coordinatenachſen zu einer andern Form der Gleichung der geſuchten Curve, die gekannt zu werden verdient. Nehmen wir nämlich die Schenkel des gegebenen Winkels zu Coordinatenachſen, ſo haben wir, wie vorher,

$$mm'=m'n+mn'\,, \qquad (7)$$

und für die Gleichung der Geraden GG' (§. 4. S. 14.)

$$\frac{y}{n}+\frac{x}{n'}=1\,. \qquad (12)$$

Durch Differentiation erhalten wir aus dieſen Gleichungen

$$m'+m\frac{dn'}{dn}=0 \quad \text{und} \quad \frac{y}{n^2}+\frac{x}{n'^2}\cdot\frac{dn'}{dn}=0\,,$$

und, durch Elimination von $\frac{dn'}{dn}$,

$$\frac{m^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{n}=\frac{m'^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{n'}\,. \qquad (13)$$

Setzen wir die reciproken Werthe von $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n'}$, welche ſich aus (12) u. (13) ergeben, für n und n' in die Gleichung (7), ſo kommt

$$m'^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{2}}m'^{\frac{1}{2}} . \qquad (14)$$

§. 95. Fig. 67.

Dieſe Gleichung der Parabel, der man auch die Form

$$\left(\frac{y}{m}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x}{m'}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \qquad (15)$$

geben kann, läßt ſich durch Transformation aus der Gleichung (11) ableiten. Denn wir haben, wenn wir unter α, β, γ die Winkel, die in §. 3. genannt worden, verſtehen,

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha} = \frac{2a}{m'} ; \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha} = \frac{2a}{m} ; \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = -\frac{b}{m'} ; \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{b}{m} ;$$

und daher ſtatt der Transformationsformeln (§. 3. F. 3.) die folgenden:

$$x = \frac{2a}{mm'}(m'y' + mx') \quad ; \quad y = \frac{b}{mm'}(m'y' - mx') .$$

Die Subſtitution in (11) giebt, nach der Diviſion durch ab^2, und wenn wir die Accente weglaſſen,

$$(m'y - mx)^2 - mm'(2m'y + 2mx - mm') = 0 ,$$

eine Gleichnng, mit welcher die Gleichung (14), wenn ſie rational gemacht wird, übereinſtimmt.

Aufgabe [156]. Eine Gerade bewegt ſich ſo, daß ſie mit zwei in Lage gegebenen ſich ſchneidenden Geraden Dreiecke bildet, deren Flächeninhalt eine gegebene Größe q^2 hat. Es ſoll die Curve gefunden werden, welche von jener Geraden berührt wird.

Wir nehmen die gegebenen Geraden zu Coordinatenachſen und bezeichnen den von ihnen eingeſchloſſenen Winkel durch α. Sind nun a und b die beiden Stücke, welche auf dieſen Geraden von der beweglichen Linie abgeſchnitten werden, ſo iſt die Gleichung der letztern (§. 4. S. 13)

$$ay + bx = ab .$$

Wir haben jetzt, in Folge der Aufgabe, $\frac{1}{2}ab\sin\alpha = q^2$, alſo $b = \frac{2q^2}{a\sin\alpha}$, und demnach

$$a^2\sin\alpha\, y + 2q^2x = 2q^2a . \qquad (16)$$

Durch Differentiation nach a erhalten wir

$$a\sin\alpha\, y = q^2 , \qquad (17)$$

und durch Elimination von a zwiſchen (16) und (17)

$$xy = \frac{q^2}{2\sin\alpha} , \qquad (18)$$

§. 95. als Gleichung der gesuchten Curve, welche also eine Hyperbel ist, deren Asymptoten die gegebenen Geraden sind. (Man vergl. §. 33. Aufg. 53.)

Aufgabe [157]. Eine gerade Linie von gegebener Länge k bewegt sich so, daß ihre Endpunkte auf zwei in Lage gegebenen sich rechtwinklig schneidenden Geraden liegen. Man soll die Curve finden, welche von jener Linie berührt wird.

Wir nehmen die beiden festen Geraden zu Coordinatenachsen, und nennen die Stücke derselben, welche die bewegliche Linie abschneidet a und b. Dann ist die Gleichung der letztern (§. 4. S. 14)

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1\,,$$

und zwischen den Constanten a, b haben wir die Gleichung

$$a^2+b^2=k^2\,.$$

Die Differentiation nach a giebt

$$\frac{y}{b^2}\frac{db}{da}+\frac{x}{a^2}=0 \quad \text{und} \quad b\frac{db}{da}+a=0\,,$$

woraus, durch Elimination von $\frac{db}{da}$, $\frac{ay}{b^2}=\frac{bx}{a^2}$ oder $ya^3=xb^3$ folgt. Aus dieser letzten Gleichung und aus der zuerst aufgestellten ergiebt sich $a=x^{\frac{1}{3}}(y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}})$ und $b=y^{\frac{1}{3}}(y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}})$, welche Ausdrücke, in die Gleichung $a^2+b^2=k^2$ substituirt,

$$y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{2}{3}} \qquad (19)$$

geben. Wenn wir diese Gleichung der gesuchten Curve rational machen, so erhalten wir

$$(y^2+x^2-k^2)^3+27k^2x^2y^2=0\,.$$

Setzen wir r für k, so stimmt diese Gleichung mit der im §. 67. gefundenen Gleichung (S. 9) derjenigen Hypocycloide überein, in welcher des rollenden Kreises Radius dem vierten Theile vom Radius des festen gleich ist. Die gesuchte Curve ist demnach eine solche Hypocycloide.

Uebrigens ist leicht einzusehen, daß unsere Curve (19) mit der Evolute der Ellipse (§. 88. S. 2) in der Verwandtschaft der Affinität steht.

§. 96.

Aufgabe [158]. Der Mittelpunkt eines Kreises von gegebenem Radius bewegt sich auf einer gegebenen Curve. Es soll die einhüllende Curve des Kreises gefunden werden.

Es sey $F(x, y) = 0$ die Gleichung der gegebenen Curve in rechtwinkligen Coordinaten und c der gegebene Radius des Kreises. Bezeichnen wir die, auf dasselbe Coordinatensystem bezogenen, laufenden Coordinaten des Kreises durch x', y', so ist seine Gleichung §. 96.

$$(y'-y)^2+(x'-x)^2 = c^2 , \qquad (1)$$

in welcher x und y als zwei willkürliche Constanten anzusehen sind, die durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ von einander abhängen. Differentiiren wir die Gleichung (1) nach x, so kommt

$$(y'-y)\frac{dy}{dx}+(x'-x) = 0 , \qquad (2)$$

Elimiiren wir sodann zwischen den Gleichungen $F(x, y) = 0$, und (1) u. (2), die willkürlichen Constanten x und y, so erhalten wir eine Gleichung in x' und y', welche die der einhüllenden Curve ist.

Da aber die Gleichungen (1) und (2) mit den Gleichungen (1) und (2) der 149sten Aufgabe (§. 92.) übereinstimmen, so folgt, daß die einhüllende Curve eine der gegebenen in der Entfernung c parallele Curve ist.

Aufgabe [159]. Ein Kreis von veränderlichem Radius bewegt sich so, daß sein Mittelpunkt eine gegebene Curve beschreibt, seine Peripherie aber fortwährend durch einen und denselben gegebenen Punkt geht. Es soll die einhüllende Curve des Kreises gefunden werden.

Wir nehmen den gegebenen Punkt zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten. Es seyen α, β die Coordinaten des Mittelpunktes und x, y die laufenden Coordinaten des Kreises. Die Gleichung dieses Kreises ist alsdann

$$y^2+x^2-2\beta y-2\alpha x = 0 . \qquad (3)$$

Da nun die Constanten α, β, in Folge der gegebenen Gleichung der Curve der Mittelpunkte, $F(\alpha, \beta) = 0$, von einander abhängen, so differentiiren wir die Gleichung (3), indem wir β als eine Function von α betrachten, wodurch sich

$$y\frac{d\beta}{d\alpha}+x = 0 \qquad (4)$$

ergiebt; und elimiiren wir zwischen den Gleichungen $F(\alpha, \beta) = 0$ und (3) u. (4) die Größen α und β, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen x und y, welche diejenige der einhüllenden Curve ist.

Für einen bestimmten Werth von α und von β, welche der Gleichung

§. 96. $F(\alpha, \beta) = 0$ genügen, drückt die Gleichung (3) einen individuellen Kreis aus, dessen Mittelpunkt in demjenigen Punkte der gegebenen Curve liegt, dem diese Coordinaten zugehören; die Gleichung (4) aber drückt eine Gerade aus, welche durch den gegebenen Anfangspunkt der Coordinaten geht und der Normale jenes Punktes $\alpha\beta$ der Curve parallel ist. Da nun die Werthe von x und y, welche die Gleichungen (3) und (4) befriedigen, die Coordinaten desjenigen Punktes sind, in welchem der Kreis von der einhüllenden Curve berührt wird, so folgt, daß dieser Berührungspunkt mit dem Endpunkte der Sehne zusammen fällt, welche durch den, auf dem Kreise liegenden, Anfangspunkt geht und die auf der Tangente der Curve im Mittelpunkte des Kreises senkrecht ist. Da ferner jene Sehne von dieser Tangente halbirt wird, so sind die, vom Anfangspunkte auf die Tangenten der gegebenen Curve herabgelassenen, Perpendikel halb so lang als die Leitstrahlen der die Kreise einhüllenden Curve, woraus denn folgt, daß die Curve der Fußpunkte der Perpendikel und diese einhüllende Curve ähnlich und ähnlichliegend sind.

Zu demselben Resultate gelangen wir durch Rechnung auf folgende Weise.

Die Gleichung der Tangente an der Curve $F(\alpha, \beta) = 0$ im Punkte $\alpha\beta$ ist

$$(y' - \beta) = \frac{d\beta}{d\alpha}(x' - \alpha) ,$$

wo x' und y' die laufenden Coordinaten bezeichnen; die Gleichung des durch den Anfangspunkt gehenden Perpendikels aber

$$y'\frac{d\beta}{d\alpha} + x' = 0 .$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir für den Fußpunkt des Perpendikels die Coordinaten

$$y' = \frac{\beta - \alpha\frac{d\beta}{d\alpha}}{1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}} \quad ; \quad x' = -\frac{\beta - \alpha\frac{d\beta}{d\alpha}}{1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} . \qquad (5)$$

Die Gleichungen (3) und (4) aber geben für den Berührungspunkt der einhüllenden Curve und des Kreises

$$y = \frac{2\left(\beta - \alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)}{1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}} \quad ; \quad x = -\frac{2\left(\beta - \alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)}{1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} . \qquad (6)$$

Wir haben also $y = 2y'$, $x = 2x'$, woraus sich unmittelbar ergiebt (§. 17. S. 2), daß die Curve der Fußpunkte der Perpendikel und die einhüllende Curve der Kreise ähnlich sind, ähnlich-liegen und den Anfangspunkt der Coordinaten zum Aehnlichkeitspunkt haben. §. 96.

Transformiren wir die Gleichungen (6) in Polarcoordinaten, indem wir, wie in §. 83., $y = u\sin t$, $x = u\cos t$, $\beta = \delta\sin\gamma$, $\alpha = \delta\cos\gamma$ setzen, so ergiebt sich

$$u = \frac{2\delta^2}{\sqrt{\delta^2 + \frac{d\delta^2}{d\gamma^2}}} \quad ; \quad tang\, t = \frac{\delta\, tang\,\gamma - \frac{d\delta}{d\gamma}}{\frac{d\delta}{d\gamma}\, tang\,\gamma + \delta} . \qquad (7)$$

Beispiel I. Es sey die gegebene Curve der Mittelpunkte eine Ellipse deren Achsen 2a und 2b sind.

Wir nehmen den gegebenen Punkt zum Anfangspunkte und zwei den Achsen parallele Gerade zu Coordinatenachsen. Alsdann ist die Gleichung der Ellipse

$$a^2(\beta - h)^2 + b^2(\alpha - g)^2 = a^2b^2 , \qquad (8)$$

wo g und h die Coordinaten ihres Mittelpunktes bedeuten. Aus dieser Gleichung erhalten wir $a^2(\beta - h)\frac{d\beta}{d\alpha} + b^2(\alpha - g) = 0$, und durch Elimination von $\frac{d\beta}{d\alpha}$ zwischen dieser Differentialgleichung und der Gleichung (4)

$$a^2(\beta - h)x = b^2(\alpha - g)y . \qquad (9)$$

Die beiden Gleichungen (3) u. (9) geben

$$\beta - h = \frac{b^2y(y^2 + x^2 - 2hy - 2gx)}{2(b^2y^2 + a^2x^2)} ,$$

$$\alpha - g = \frac{a^2x(y^2 + x^2 - 2hy - 2gx)}{2(b^2y^2 + a^2x^2)} ,$$

und wenn wir diese Ausdrücke in (8) substituiren, so kommt

$$(y^2 + x^2 - 2hy - 2gx)^2 = 4(b^2y^2 + a^2x^2) , \qquad (10)$$

als Gleichung der gesuchten Curve, die also eine Linie vierten Grades ist.

Ist der gegebene Punkt ein Brennpunkt der Ellipse, so sind die Coordinaten ihres Mittelpunktes $h = 0$ und $g = \sqrt{a^2 - b^2}$. Die Gleichung (10), welche dann in $(y^2 + x^2 - 2\sqrt{a^2 - b^2}.x)^2 = 4(b^2y^2 + a^2x^2)$ über-

§. 96. geht, läßt sich wie folgt

$$(y^2+x^2)\{y^2+x^2-4\sqrt{a^2-b^2}.x-4b^2\} = 0$$

zerlegen. Der erste Factor dieser Gleichung drückt den Anfangspunkt der Coordinaten oder den Brennpunkt der Ellipse, der zweite Factor drückt einen Kreis aus, dessen Gleichung, wenn man $x+2\sqrt{a^2-b^2}$ für x setzt, in

$$y^2+x^2 = 4a^2 \qquad (11)$$

übergeht. Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt demnach in dem zweiten Brennpunkte der Ellipse und sein Radius ist ihrer größern Achse 2a gleich.

II. Es sey die gegebene Curve eine logarithmische Spirale und der gegebene Punkt der Pol dieser Curve.

Aus der Gleichung der logarithmischen Spirale $\delta = re^{\frac{\gamma}{m}}$ (§. 68. G. 5) erhalten wir $\frac{d\delta}{d\gamma} = \frac{r}{m}.e^{\frac{\gamma}{m}} = \frac{\delta}{m}$. Die Formeln (7) geben nun

$$u = \frac{2m\delta}{\sqrt{m^2+1}} \quad ; \quad tang\, t = \frac{tang\,\gamma - \frac{1}{m}}{\frac{1}{m}tang\,\gamma + 1} .$$

und wenn wir $tang\,\mu$ für die Constante $\frac{1}{m}$ setzen, $tang\, t = \frac{tang\,\gamma - tang\,\mu}{tang\,\mu\, tang\,\gamma + 1}$, also $t = \gamma - \mu$. Hieraus erhalten wir

$$\gamma = t+\mu \quad ; \quad \delta = \frac{\sqrt{1+m^2}}{2m}.u \; ;$$

und diese Werthe in die Gleichung $\delta = re^{\frac{\gamma}{m}}$ gesetzt, geben

$$u = \frac{2mr}{\sqrt{1+m^2}}.e^{\frac{t+\mu}{m}}, \quad \text{oder} \quad u = 2r\cos\mu.e^{(t+\mu)\,tang\,\mu}$$

als Gleichung der gesuchten Curve, die also wieder eine logarithmische Spirale ist. Diese ist der gegebenen gleich, nur hat sie eine andere Lage.

§. 97.

Aufgabe [160]. Die einhüllende Curve der logarithmischen Linie

zu finden, deren Gleichung $y = me^{\frac{x}{m}}$ ist, wenn m als die willkürliche Constante betrachtet wird. §. 97.

Aus der Gleichung $y = me^{\frac{x}{m}}$ ergiebt sich, durch Differentiation nach m, unmittelbar

$$e^{\frac{x}{m}} - e^{\frac{x}{m}} \cdot \frac{x}{m} = 0 \quad \text{oder} \quad e^{\frac{x}{m}}\left(1 - \frac{x}{m}\right) = 0 .$$

Der Factor $e^{\frac{x}{m}}$ giebt keine einhüllende Curve; der zweite Factor aber giebt $m = x$, und, dieser Werth in die Gleichung $y = me^{\frac{x}{m}}$ substituirt,

$$y = ex \qquad (1)$$

als Gleichung der einhüllenden Curve. Diese ist also eine Gerade, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und mit der, allen eingehüllten Curven gemeinschaftlichen, Asymptote einen Winkel μ bildet, so daß $tang\,\mu = e = 2{,}7182818\ldots$, und demnach sehr nahe $\mu = 69^\circ\ 48'\ 9''$.

Aufgabe [161]. Es soll die einhüllende Curve der Kettenlinie gefunden werden, indem m in der Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2}m\left\{e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right\}$$

als willkürliche Constante betrachtet wird.

Differentiiren wir die Gleichung der eingehüllten Curve nach m, so kommt

$$0 = \tfrac{1}{2}\left\{e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}} - \frac{x}{m}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)\right\} .$$

Um m zwischen dieser Gleichung und der gegebenen zu eliminiren, setzen wir in die letztere $\frac{2y}{m}$ für $e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}$, wodurch sie sich in

$$2y - x(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}) = 0$$

verwandelt. Dieser Gleichung geben wir, durch Multiplication mit $\frac{e^{\frac{x}{m}}}{x}$, die Form

§. 97.

$$e^{2\frac{x}{m}} - 2\frac{y}{x}e^{\frac{x}{m}} - 1 = 0,$$

woraus ſich

$$e^{\frac{x}{m}} = \frac{y}{x} \pm \frac{\sqrt{y^2+x^2}}{x} \quad \text{und} \quad e^{-\frac{x}{m}} = -\frac{y}{x} \pm \frac{\sqrt{y^2+x^2}}{x},$$

und demnach $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) = \pm\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{x}$ ergiebt. Da nun aber

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) = \frac{y}{m}$$

iſt, ſo haben wir $\frac{y}{m} = \pm\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{x}$, alſo $m = \pm\frac{xy}{\sqrt{y^2+x^2}}$; und dieſer Ausdruck, in die Gleichung der eingehüllten Curve ſubſtituirt, giebt

$$y = \pm\frac{xy}{2\sqrt{y^2+x^2}}\left\{e^{\pm\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{y}} + e^{\mp\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{y}}\right\} \qquad (2)$$

als Gleichung der geſuchten Curve. Aber dieſe Gleichung kann nur eine oder mehrere gerade Linien ausdrücken, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen; denn ſetzt man $y = nx$, ſo verwandelt ſie ſich in

$$1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{n^2+1}}\left\{e^{\pm\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}} + e^{\mp\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}}\right\},$$

welche Gleichung x nicht enthält und für n eine Anzahl Werthe giebt, die, wenn ſie reell ſind, die trigonometriſchen Tangenten der Winkel angeben, unter welchen die in Rede ſtehenden Geraden die Abſciſſenachſe ſchneiden. Um dieſe Winkel auf eine bequeme Art zu finden, ſetzen wir $y = u\sin t$, $x = u\cos t$. Dadurch erhalten wir aus (2)

$$1 = \pm\tfrac{1}{2}\cos t\left\{e^{\pm\frac{1}{\sin t}} + e^{\mp\frac{1}{\sin t}}\right\},$$

und durch Multiplication mit $\pm 2\frac{e^{\pm\frac{1}{\sin t}}}{\cos t}$,

$$e^{\pm 2\frac{1}{\sin t}} \mp \frac{2}{\cos t}e^{\pm\frac{1}{\sin t}} + 1 = 0.$$

Löſen wir dieſe Gleichung auf, ſo kommt §. 97.

$$e^{\pm\frac{1}{\sin t}} = \pm\left\{\frac{1\pm\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}\right\},$$

oder

$$e^{\pm\frac{1}{\sin t}} = \pm\frac{1\pm\sin t}{\cos t}.$$

Wir ſetzen nun $t = \frac{1}{2}\pi - \vartheta$, und erhalten dadurch

$$e^{\pm\frac{1}{\cos\vartheta}} = \pm\frac{1\pm\cos\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Nehmen wir auf beiden Seiten die Logarithmen, ſo kommt, da $\frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = tang\frac{1}{2}\vartheta$ und $\frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta} = cotang\frac{1}{2}\vartheta$,

$\cos\vartheta\, log(\pm tang\frac{1}{2}\vartheta)\pm 1 = 0$ oder $\cos\vartheta\, log(\pm cotang\frac{1}{2}\vartheta)\pm 1 = 0$,

wo *log* den natürlichen Logarithmus bedeutet. Gehen wir zu den gemeinen Logarithmen über, und ſetzen wieder $\frac{1}{2}\pi - t$ für ϑ, ſo haben wir

$$2{,}302585\, \sin t\, .\, log\, vulg(\pm\, tang[45^0 - \tfrac{1}{2}t]) \pm 1 = 0,$$

oder $$2{,}302585\, \sin t\, .\, log\, vulg(\pm cotang[45^0 - \tfrac{1}{2}t]) \pm 1 = 0.$$

Dieſe beiden Gleichungen laſſen nur zwei reelle Werthe für t zu, die ſehr nahe gleich 56° 27′ 57″ und 123° 32′ 3″ ſind. Die beiden Geraden, welche als die einhüllende Curve angeſehen werden müſſen, gehen alſo durch den Anfangspunkt der Coordinaten und bilden mit einander einen Winkel von beinahe 67° 4′ 6″.

§. 98.

Zufolge der Erklärung in §. 42. iſt der Ort B der Pole aller Tangenten einer Curve A die reciproke Curve der letztern. Eine bloß geometriſche Betrachtung hat daſelbſt gezeigt, daß, wenn die Curve B der Ort der Pole aller Tangenten der Curve A iſt, auch umgekehrt die Curve A der Ort der Pole aller Tangenten der Curve B ſey; oder, mit andern Worten, daß der Ort der Pole aller Tangenten der Curve A von den Polaren aller Punkte dieſer Curve berührt werde. Wir können dieſe Beziehung zweier reciproken Curven durch Rechnung allgemein erweiſen, und zwar auf folgende Art.

Es ſey, unter der Vorausſetzung, daß x, y und t, u rechtwinklige oder

§. 98. schiefwinklige Coordinaten bedeuten,

$$(ay+bx+c)u+(a'y+b'x+c')t+a''y+b''x+1=0 \qquad (1)$$

die Gleichung, welche die Verwandtschaft der Reciprocität zweier Systeme ausdrückt (§. 19. S. 1), oder, was dasselbe sagt, die Gleichung der Polarlinie eines Punktes xy. Wir setzen zur Abkürzung

$$ay+bx+c=M \;;\; a'y+b'x+c'=M' \;;\; a''y+b''x+1=M'',$$

so daß jene Gleichung durch

$$Mu+M't+M''=0 \qquad (2)$$

dargestellt wird. Ist nun $F(t,u)=0$ die gegebene Gleichung einer Curve A, so werden wir

1) den Ort B des Pols der Tangente der Curve A dadurch auffinden, daß wir die Gleichung der Tangente dieser Curve in einem Punkte t'u' derselben, nämlich

$$u-u'=\frac{du'}{dt'}(t-t'), \quad \text{oder} \quad u=\frac{du'}{dt'}t-\left(\frac{du'}{dt'}t'-u'\right)$$

mit der Gleichung der Polarlinie des Punktes xy, nämlich mit

$$Mu+M't+M''=0, \quad \text{oder} \quad u=-\frac{M'}{M}t-\frac{M''}{M}$$

identificiren, woraus sich

$$-\frac{M'}{M}=\frac{du'}{dt'} \quad (3), \quad \text{und} \quad \frac{M''}{M}=\frac{du'}{dt'}t'-u' \qquad (4)$$

ergiebt; und daß wir zwischen diesen Gleichungen (3) und (4) und der Gleichung $F(t',u')=0$ die Größen t' und u' elimiviren. Die Finalgleichung in x und y ist alsdann die Gleichung des Ortes B. Statt einer der Gleichungen (3) u. (4) können wir aber auch irgend eine Combination derselben in Anwendung bringen. Eliminiren wir also $\frac{du'}{dt'}$ zwischen ihnen, so kommt $\frac{M''}{M}=-\frac{M'}{M}t'-u'$ oder $Mu'+M't'+M''=0$ (eine Gleichung, die wir unmittelbar aus (2) erhalten, wenn wir die Bedingung ausdrücken, daß diese Polare durch den Punkt t'u' geht); und wir haben also, um die Gleichung der Curve B zu finden, nur t', u', $\frac{du'}{dt'}$ zwischen den Gleichungen

$$Mu'+M't'+M''=0 \;;\; M\frac{du'}{dt'}+M'=0 \;;\; F(t',u')=0 \;;\; \left(\frac{dF}{du'}\right)\frac{du'}{dt'}+\left(\frac{dF}{dt'}\right)=0 \quad (5)$$

zu elimiviren.

Wir werden aber §. 98.

2) die Curve, welche von den Polarlinien (1) der, auf der Curve $F(t,u) = 0$ liegenden, Punkte berührt wird, als eine einhüllende Curve dadurch erhalten, daß wir die Coordinaten t, u, welche in der Gleichung jener Geraden vorkommen, als willkürliche Constanten betrachten, die durch die Gleichung $F(t,u) = 0$ von einander abhängig gemacht sind; also dadurch, daß wir $t, u, \frac{du}{dt}$ zwischen den Gleichungen

$$Mu+M't+M''=0 \; ; \; M\frac{du}{dt}+M'=0 \; ; \; F(t,u)=0 \; ; \; \left(\frac{dF}{du}\right)\frac{du}{dt}+\left(\frac{dF}{dt}\right)=0 \quad (5)$$

eliminiren.

Da nun die in 1) angegebene Elimination mit der so eben in 2) genannten zu derselben Finalgleichung in x, y führt, so folgt, daß der Ort des Pols der Tangente an der Curve A mit derjenigen Curve zusammenfällt, welche von den Polaren der Punkte auf der Curve A berührt wird, was gezeigt werden sollte.

Wenn die gegebene Curve A transscendent ist, so ist die reciproke Curve B ebenfalls transscendent; wenn aber jene Curve A eine Linie nten Grades ist, so kann die reciproke Curve B höchstens vom $n(n-1)$ten Grade seyn. Dies folgt daraus, daß die Curve B von einer geraden Linie in eben so vielen Punkten geschnitten wird, als von dem Pole dieser Geraden Tangenten an die Curve A gezogen werden können. Nun ist aber die Anzahl dieser Tangenten (§. 75.) höchstens gleich $n(n-1)$, und somit die Anzahl der Durchschnittspunkte einer Geraden und der Curve B höchstens gleich $n(n-1)$.

Die Gestalt und die Lage der reciproken Curve B einer gegebenen Curve A ändert sich, wenn die Constanten in der Gleichung (1), durch welche die Beziehung der Reciprocität ausgedrückt wird, sich ändern. Mit einer und derselben Curve A stehen daher unendlich viele Curven B in der Verwandtschaft der Reciprocität. Aber alle diese Curven B sind einander collinearverwandt, was aus der zu Ende des §. 19. gemachten Bemerkung hervorgeht, und diese Curven sind somit auch von demselben Grade.

Bei den folgenden Aufgaben wollen wir annehmen, daß die Constanten

$$a = -\frac{1}{r^2} \; ; \; b' = -\frac{1}{r^2} \; ; \; b = c = a' = c' = a'' = b'' = 0$$

seyen; daß also die Gleichung (1) sich auf

§. 98.

$$yu+xt-r^2=0$$

reducire, daß demnach $M=y$, $M'=x$, $M''=-r^2$ sey, und daß x, y sowohl als t, u rechtwinklige Coordinaten bedeuten; oder, was dasselbe ist, daß ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, und dessen Gleichung also

$$y^2+x^2-r^2=0$$

ist, zur Directrix der Reciprocität genommen sey (§. 35.).

Die Gleichungen (5) sind alsdann folgende

$$yu+xt-r^2=0,\ (6)\ ;\ y\frac{du}{dt}+x=0,\ (7)\ ;\ F(u,t)=0\ ;\ \left(\frac{dF}{du}\right)\frac{du}{dt}+\left(\frac{dF}{dt}\right)=0;$$

und zwischen den Krümmungsradien und den Leitstrahlen beider Curven findet nun eine Relation Statt, die wir jetzt aufsuchen wollen.

Wir differentiiren die Gleichungen (6) u. (7), indem wir, da jede drei von den Größen t, u, x, y Functionen der vierten sind, x als die einzige unabhängige Veränderliche betrachten, und erhalten

$$u\frac{dy}{dx}+t+\left(y\frac{du}{dt}+x\right)\frac{dt}{dx}=0\ , \qquad (8)$$

$$y\frac{d^2u}{dt^2}\frac{dt}{dx}+\frac{dy}{dx}\frac{du}{dt}+1=0\ . \qquad (9)$$

Die Gleichung (8) reducirt sich aber, in Folge von (7), auf

$$u\frac{dy}{dx}+t=0\ , \qquad (10)$$

und differentiiren wir diese Gleichung (10), so kommt

$$u\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{du}{dt}\frac{dy}{dx}+1\right)\frac{dt}{dx}=0\ . \qquad (11)$$

Wir erhalten nun, durch Elimination von $\frac{dt}{dx}$ zwischen (9) und (11), die Gleichung

$$uy\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^2u}{dt^2}=\left(1+\frac{du}{dt}\frac{dy}{dx}\right)^2\ . \qquad (12)$$

Da, wenn wir die Krümmungsradien beider Curven respective durch ϱ, ϱ' bezeichnen (§. 83. F. 9.),

$$\varrho=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\quad ;\quad \varrho'=\frac{\left(1+\frac{du^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2u}{dt^2}}$$

ist, so haben wir §. 98.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\varrho} \quad ; \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\left(1+\frac{du^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\varrho'} ,$$

wodurch wir die Gleichung (12) in

$$uy\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{du^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \varrho\varrho'\left(1+\frac{du}{dt}\frac{dy}{dx}\right)^2$$

verwandeln. Setzen wir hierin, zufolge der Gleichungen (7) und (10), $\frac{du}{dt} = -\frac{x}{y}$ und $\frac{dy}{dx} = -\frac{t}{u}$, so kommt nach Fortschaffung der Nenner

$$(y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}(u^2+t^2)^{\frac{3}{2}} = \varrho\varrho'(yu+xt)^2 ,$$

oder wenn wir, in Folge von (6), r^2 für $yu+xt$ setzen, und die Leitstrahlen der Punkte xy und tu, also $\sqrt{y^2+x^2}$ und $\sqrt{u^2+t^2}$ durch δ und δ' bezeichnen,

$$\delta^3\delta'^3 = r^4\varrho\varrho' , \qquad (13)$$

welches die erwähnte Relation ist.

Wenn die Gleichung der Curve A in Polarcoordinaten gegeben ist, so ist es, um die reciproke Curve B aufzusuchen, am bequemsten die Gleichungen (6) u. (7) ebenfalls in Polarcoordinaten auszudrücken. Setzen wir zu dem Ende

$$x = \delta\cos\gamma , \; y = \delta\sin\gamma , \; t = \delta'\cos\gamma' , \; u = \delta'\sin\gamma' ,$$

und demnach $\frac{du}{dt} = \frac{\frac{d\delta'}{d\gamma'}\sin\gamma'+\delta'\cos\gamma'}{\frac{d\delta'}{d\gamma'}\cos\gamma'-\delta'\sin\gamma'}$, so erhalten wir aus (6) und (7), und nach einer leichten Reduction,

$$\delta\delta'\cos(\gamma-\gamma') = r^2 , \quad (14) \quad ; \quad \frac{d\delta'}{d\gamma'}+\delta'\tang(\gamma-\gamma') = 0 . \quad (15)$$

Eliminiren wir $\delta\delta'$ aus (13), vermittelst der Gleichung (14), so haben wir die Relation

$$r^2 = \varrho\varrho'\cos^2(\gamma-\gamma') . \qquad (16)$$

Aufgabe [162]. Die reciproke Curve einer Parabel höherer Art zu finden.

Es sey die auf rechtwinklige Achsen bezogene Gleichung

§. 98.

$$u + kt^n = 0 \qquad (17)$$

diejenige der gegebenen Parabel höherer Art (§. 56.). Dann ist $\frac{du}{dt} = -nkt^{n-1}$, und also die Gleichung (7) $nkyt^{n-1} = x$, woraus

$$t = \frac{x^{\frac{1}{n-1}}}{n^{\frac{1}{n-1}} k^{\frac{1}{n-1}} y^{\frac{1}{n-1}}},$$

und sodann, in Folge der Gleichung (17)

$$u = -\frac{x^{\frac{n}{n-1}}}{n^{\frac{n}{n-1}} k^{\frac{1}{n-1}} y^{\frac{n}{n-1}}}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke für t und u in (6), so kommt, nach einer leichten Reduction,

$$y = \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n k r^{2(n-1)}} \cdot x^n \qquad (18)$$

als Gleichung der reciproken Curve, die also wieder eine Parabel höherer Art und zwar von demselben Grade als die gegebene ist.

Ist die gegebene Curve die Neilische Parabel, welche die Evolute einer gemeinen Parabel (§. 88.), und deren Gleichung

$$u = \frac{4}{3\sqrt{3}p^{\frac{1}{2}}} t^{\frac{3}{2}}$$

ist, so haben wir $n = \frac{3}{2}$ und $k = -\frac{4}{3\sqrt{3}p^{\frac{1}{2}}}$, also in Folge von (18),

$$y = -\frac{p^2}{2r} x^{\frac{3}{2}} \qquad (19)$$

als Gleichung der reciproken Curve.

Aufgabe [163]. Die reciproken Curven derjenigen Linien zu finden, deren Gleichungen in rechtwinkligen Coordinaten unter der Form

$$\frac{u^n}{b^n} + \frac{t^n}{a^n} = k \qquad (20)$$

dargestellt werden können.

Wir erhalten zunächst aus der gegebenen Gleichung $\frac{u^{n-1}}{b^n}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{t^{n-1}}{a^n}=0$, §. 98.

und dann, vermittelst (7), $b^n y t^{n-1} = a^n x u^{n-1}$; ferner hieraus

$$t = \frac{a^{\frac{n}{n-1}} x^{\frac{1}{n-1}}}{b^{\frac{n}{n-1}} y^{\frac{1}{n-1}}} u, \qquad (21)$$

und, durch Substitution dieses Ausdrucks in (20),

$$u = \frac{k^{\frac{1}{n}} b^{\frac{n}{n-1}} y^{\frac{1}{n-1}}}{\left(b^{\frac{n}{n-1}} y^{\frac{n}{n-1}} + a^{\frac{n}{n-1}} x^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}},$$

wodurch sich der Ausdruck (21) in

$$t = \frac{k^{\frac{1}{n}} a^{\frac{n}{n-1}} x^{\frac{1}{n-1}}}{\left(b^{\frac{n}{n-1}} y^{\frac{n}{n-1}} + a^{\frac{n}{n-1}} x^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

verwandelt. Diese beiden Ausdrücke, in (6) substituirt, geben nach einigen Umformungen

$$b^{\frac{n}{n-1}} y^{\frac{n}{n-1}} + a^{\frac{n}{n-1}} x^{\frac{n}{n-1}} = k^{\frac{1}{n-1}} r^{\frac{2n}{n-1}} \qquad (22)$$

als Gleichung der reciproken Curve.

Ist die gegebene Curve die Evolute der Ellipse (§. 88. G. 2), so haben wir, indem wir $n = \frac{2}{3}$, $b = \frac{e^2}{b}$, $a = \frac{e^2}{a}$ und $k = 1$ setzen, aus (22)

$$\frac{a^2}{y^2} + \frac{b^2}{x^2} = \frac{e^4}{r^4}$$

als Gleichung der reciproken Curve jener Evolute, welche also, wie leicht zu sehen, eine Linie vierten Grades ist.

Aufgabe [164]. Die reciproken Curven der hyperbolischen und logarithmischen Spiralen zu finden.

I. Wir differentiiren die Gleichung der hyperbolischen Spirale (§. 68. G. 3), in welcher wir $r\alpha$ durch a bezeichnen, also

$$\delta'\gamma' = a \quad \text{oder} \quad \delta' = \frac{a}{\gamma'},$$

§. 98. und erhalten

$$\frac{d\delta'}{d\gamma'} = -\frac{a}{\gamma'^2} = -\frac{\delta'^2}{a}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (15), so haben wir für (14) und (15) die beiden Gleichungen

$$\delta\delta' cos(\gamma-\gamma') = r^2 \quad ; \quad \delta' = a\, tang(\gamma-\gamma'),$$

woraus wir

$$\delta' = \frac{ar^2}{\sqrt{a^2\delta^2-r^4}} \quad ; \quad tang(\gamma-\gamma') = \frac{r^2}{\sqrt{a^2\delta^2-r^4}}$$

entwickeln. Hieraus erhalten wir

$$\gamma' = \gamma - arc\left(tang = \frac{r^2}{\sqrt{a^2\delta^2-r^4}}\right),$$

und, wenn wir diese Werthe von δ' und γ' in die Gleichung $\delta'\gamma' = a$ oder in $\frac{a}{\delta'} = \gamma'$ substituiren,

$$\frac{\sqrt{a^2\delta^2-r^4}}{r^2} = \gamma - arc\left(tang = \frac{r^2}{\sqrt{a^2\delta^2-r^4}}\right)$$

als Gleichung der gesuchten Curve. Drehen wir die Abscissenachse um einen rechten Winkel aus ihrer jetzigen Lage, und setzen also $\gamma+\frac{1}{2}\pi$ für γ, so haben wir

$$\gamma = \frac{\sqrt{a^2\delta^2-r^4}}{r^2} + arc\left(tang = \frac{r^2}{\sqrt{a^2\delta^2-r^4}}\right) - \frac{1}{2}\pi,$$

oder, wenn wir reduciren, und zugleich $r = a$ nehmen,

$$\gamma = \frac{\sqrt{\delta^2-a^2}}{a} - arc\left(tang = \frac{\sqrt{\delta^2-a^2}}{a}\right).$$

Die reciproke Curve der hyperbolischen Spirale ist demnach eine Kreisevolvente (§. 66. S. 2).

II. Wir differentiiren die Gleichung der logarithmischen Spirale (§. 68. S. 5), in welcher wir a für r setzen, nämlich

$$\delta' = ae^{\frac{\gamma'}{m}},$$

und erhalten $\frac{d\delta'}{d\gamma'} = \frac{1}{m}\delta'$. Die Gleichungen (14) u. (15) sind also in

dem gegenwärtigen Falle §. 98.

$$\delta\delta' cos(\gamma-\gamma') = r^2 \quad ; \quad \frac{1}{m} + tang(\gamma-\gamma') = 0 .$$

Nennen wir den conſtanten Winkel, deſſen trigonometriſche Tangente $-\frac{1}{m}$ iſt, μ, ſo haben wir $\frac{1}{m} = -tang\,\mu$, alſo in Folge der letzten Gleichung $tang\,\mu = tang(\gamma-\gamma')$; ſomit $\mu = \gamma-\gamma'$ oder $\gamma' = \gamma-\mu$. Eliminiren wir aber $\gamma-\gamma'$ zwiſchen den beiden zuletzt gefundenen Gleichungen, ſo kommt $m\delta\delta' = r^2\sqrt{m^2+1}$, alſo $\delta' = \frac{r^2\sqrt{m^2+1}}{m\delta}$, und, wenn wir dieſe Ausdrücke für γ' und δ' in die Gleichung der Spirale ſetzen,

$$\frac{r^2\sqrt{m^2+1}}{m\delta} = ae^{\frac{\gamma-\mu}{m}} \quad \text{oder} \quad \delta = \frac{r^2\sqrt{m^2+1}}{ma} e^{\frac{\mu-\gamma}{m}}$$

als Gleichung der reciproken Curve. Dieſe iſt alſo wieder eine logarithmiſche Spirale, welche der gegebenen gleich iſt und nur eine andere Lage hat.

§. 99.

Eine gerade Linie bewege ſich ſo, daß ſie eine gegebene Curve C beſtändig unter einem und demſelben Winkel μ ſchneidet, d. h. daß ſie mit der Tangente im Durchſchnittspunkte einen conſtanten Winkel μ bildet. Alsdann berührt jene Gerade eine andere Curve C', welche die Evolutoide der Curve C für den Winkel μ genannt wird.

Aufgabe [165]. Die Gleichung einer Curve in rechtwinkligen Coordinaten iſt gegeben. Es ſoll die Gleichung ihrer Evolutoide gefunden werden.

Da die Tangente im Punkte xy der gegebenen Curve mit der Abſciſſenachſe einen Winkel bildet, deſſen trigonometriſche Tangente $\frac{dy}{dx}$ iſt, ſo macht die ſich bewegende Gerade, indem ſie durch dieſen Punkt geht, mit der Abſciſſenachſe einen Winkel, deſſen trigonometriſche Tangente $\frac{\frac{dy}{dx} \pm m}{1 \mp m\frac{dy}{dx}}$ iſt, wo $m = tang\,\mu$. Die Gleichung dieſer Geraden iſt daher, wenn α, β

§. 99. ihre laufenden Coordinaten bezeichnen,

$$\beta - y = \frac{\frac{dy}{dx} \pm m}{1 \mp m\frac{dy}{dx}}(\alpha - x) ,$$

oder

$$(\beta - y) - \frac{dy}{dx}(\alpha - x) \pm \{(\beta - y)\frac{dy}{dx} + (\alpha - x)\}m = 0 . \qquad (1)$$

Betrachten wir nun x und y als zwei willkürliche Conſtanten, die durch die Gleichung der gegebenen Curve von einander abhängig gemacht ſind, und differentiiren die Gleichung (1) nach x, ſo kommt

$$(\alpha - x)\frac{d^2y}{dx^2} \pm \left\{1 + \frac{dy^2}{dx^2} - (\beta - y)\frac{d^2y}{dx^2}\right\}m = 0 . \qquad (2)$$

Elimiriren wir jetzt zwiſchen der Gleichung der gegebenen Curve, ihrer Differentialgleichung und den Gleichungen (1) und (2) die drei Größen x, y und $\frac{dy}{dx}$, ſo erhalten wir eine Gleichung in α u. β, welche die der Evolutoide iſt.

Entwickeln wir aus den beiden Gleichungen (1) u. (2) $(\beta - y)$ und $(\alpha - x)$, ſo kommt

$$\alpha - x = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\left(m\frac{dy}{dx} \pm 1\right)m}{\frac{d^2y}{dx^2}(m^2+1)} ; \quad -y = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\left(m \mp \frac{dy}{dx}\right)m}{\frac{d^2y}{dx^2}(m^2+1)} , \qquad (3)$$

und wir haben daher für denjenigen Punkt $\alpha\beta$, in welchem die Evolutoide von der, durch den Punkt xy der gegebenen Curve gehenden, Geraden berührt wird, wenn wir $m = tang\,\mu = \frac{\sin\mu}{\cos\mu}$ ſetzen,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\sin\mu \pm \cos\mu\right)\sin\mu}{\frac{d^2y}{dx^2}} ; \\ \beta &= y + \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\left(\sin\mu \mp \frac{dy}{dx}\cos\mu\right)\sin\mu}{\frac{d^2y}{dx^2}} \end{aligned}\right\} . \qquad (4)$$

Setzen wir $\mu = 0$, so gehen diese Ausdrücke in $\alpha = x$ und $\beta = y$ §. 99.
über, d. i. die Evolutoide fällt mit der gegebenen Curve zusammen, was auch von vorn herein klar ist. Setzen wir aber $\mu = \frac{1}{2}\pi$, so kommt

$$\alpha = x - \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad ; \quad \beta = y + \frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} ,$$

zwei Ausdrücke, welche mit denen der Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes vom Punkte xy identisch sind, und die Evolutoide geht für diesen Fall in die Evolute der gegebenen Curve über, wie dies, zufolge der am Ende des §. 87. gemachten Bemerkung, auch seyn muß.

Die Entfernung R der beiden Punkte xy und $\alpha\beta$ ist

$$R = \pm\{(\beta-y)^2+(\alpha-x)^2\}^{\frac{1}{2}} ,$$

oder, wenn wir die Ausdrücke (4) substituiren,

$$R = \pm\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \sin\mu ,$$

ein Ausdruck, der durch Einführung des Krümmungsradius ϱ (§. 83. F. 9) in

$$R = \varrho \sin\mu \qquad (5)$$

übergeht.

Da, in Folge dieser Gleichung (5), $R = \varrho\cos(\frac{1}{2}\pi-\mu)$ und $\frac{1}{2}\pi-\mu$ der Winkel ist, welchen die oft erwähnte Gerade mit der Normale bildet, so fällt der Fußpunkt des Perpendikels, welcher vom Krümmungsmittelpunkt des Punktes xy auf diese Gerade herabgelassen wird, mit dem Punkte $\alpha\beta$ zusammen, in welchem dieselbe Gerade die Evolutoide berührt.

Aufgabe [166]. Die Evolutoide der Cycloide zu finden.

Wir differentiiren das System der beiden Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} x = at - a\sin t \\ y = a - a\cos t \end{array}\right\} , \qquad (6)$$

durch welches die Cycloide dargestellt wird (§. 66. G. 3), und erhalten nach einander

§. 99.

$$\frac{dx}{dt} = a(1-\cos t) \;;\; \frac{dy}{dt} = a\sin t \;;\; \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{\sin t}{1-\cos t}}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2} \;;\; 1+\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{2}{1-\cos t}.$$

Setzen wir dieſe Ausdrücke in die Gleichungen (4), ſo finden wir

$$\alpha = a\{t-(1-2\sin^2\mu)\sin t \mp 2\sin\mu\cos\mu\cos t \pm 2\sin\mu\cos\mu\},$$
$$\beta = a\{1-(1-2\sin^2\mu)\cos t \pm 2\sin\mu\cos\mu\sin t - 2\sin^2\mu\}.$$

Dieſe Ausdrücke laſſen ſich nun folgendermaßen umformen

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = a[(t\pm 2\mu)-\sin(t\pm 2\mu)\pm(\sin 2\mu - 2\mu)]\\ \beta = a[1-\cos(t\pm 2\mu)-2\sin^2\mu]\end{array}\right\}, \qquad (7)$$

und das Syſtem dieſer beiden Gleichungen drückt die geſuchte Evolutoide aus. Dieſe Curve iſt wieder eine der gegebenen gleiche Cycloide; denn ſetzen wir $t\pm 2\mu = \vartheta$, und verlegen den Anfangspunkt der Coordinaten nach einem Punkte, deſſen Coordinaten reſpective $\pm a(\sin 2\mu - 2\mu)$ und $-2a\sin^2\mu$ ſind, indem wir $\alpha = \alpha' \pm a(\sin 2\mu - 2\mu)$ und $\beta = \beta' - 2a\sin^2\mu$ ſetzen, ſo verwandelt ſich das Syſtem (7) in

$$\left.\begin{array}{l}\alpha' = a\vartheta - a\sin\vartheta\\ \beta' = a - a\cos\vartheta\end{array}\right\}$$

und ſtimmt mit (6) überein. Man ſieht hieraus auch, daß die doppelten Vorzeichen in den Gleichungen (7) ſich nur auf die Lage der geſuchten Curve beziehen, die allerdings eine zwiefach verſchiedene iſt, indem es zwei erzeugende Gerade giebt, welche die gegebene Curve unter dem Winkel μ ſchneiden.

Von den Brennlinien.

§. 100.

Es ſey irgend eine Curve C gegeben, die von zwei Syſtemen A, B continuirlich auf einander folgender Geraden geſchnitten wird. Wenn nun beide Syſteme ſo beſchaffen ſind, daß je zwei Gerade a, b aus beiden Sy-

ſtenen, welche ſich in einem Punkte m der Curve C ſchneiden, mit der Normale in m Winkel bilden, deren Sinuſſe in einem conſtanten Verhältniſſe n : n' ſtehen, ſo heißt eine jede derjenigen beiden Curven, welche reſpective von den Geraden der Syſteme A und B berührt werden, **Brennlinie** oder **Cauſtica** für die Curve C. Die Geraden des einen Syſtems nennt man die **einfallenden** Strahlen, die des andern Syſtems die **gebrochenen**, oder, wenn das genannte Verhältniß der Sinuſſe 1 : —1 iſt, die **zurückgeworfenen** Strahlen. Das eben erwähnte Verhältniß heißt **Brechungsverhältniß**, und die Brennlinie für gebrochene Strahlen **Diacauſtica**, die für zurückgeworfene Strahlen **Catacauſtica**. §. 100.

Jede der beiden Brennlinien kann in einen Punkt degeneriren oder ins Unendliche fallen, welches Letztere Statt findet, wenn die Strahlen eines Syſtems parallel ſind. Ein Beiſpiel dieſer Fälle bieten die Linien zweiten Grades dar. Denn nehmen wir an, daß das Syſtem A aus allen Geraden beſtehe, welche durch einen Brennpunkt einer Ellipſe gezogen werden können, und daß dieſe Ellipſe die zurückwerfende Curve ſey, ſo werden alle Geraden des Syſtems B durch den andern Brennpunkt dieſer Ellipſe gehen; die beiden Brennpunkte vertreten alſo hier die Brennlinien. Nehmen wir aber an, daß das Syſtem A aus den Geraden beſtehe, welche durch den Brennpunkt einer Parabel gezogen werden können, und daß dieſe Parabel die zurückwerfende Linie ſey, ſo werden alle Geraden des Syſtems B einander parallel ſeyn.

Aufgabe [167]. *Die auf rechtwinklige Achſen bezogenen Gleichungen einer brechenden Curve und einer Brennlinie ſind gegeben. Es ſoll die Gleichung der zugehörigen andern Brennlinie gefunden werden.*

Es ſeyen x, y die Coordinaten der brechenden Curve, α', β' die der gegebenen und α, β die der geſuchten Brennlinie; ferner ſeyen

$$F(x, y) = 0\,, \quad (1) \quad ; \quad f(\alpha', \beta') = 0\,, \qquad (2)$$

die gegebenen Gleichungen, und $n' : n$ das conſtante Brechungsverhältniß.

Sind nun μ' und μ die Winkel, welche der einfallende und der gebrochene Strahl im Punkte xy der brechenden Curve mit der Normale in dieſem Punkte bilden, ſo haben wir

$$\frac{\sin\mu}{\sin\mu'} = \frac{n}{n'} \quad \text{oder} \quad n' \sin\mu = n \sin\mu'\,. \qquad (3)$$

Bezeichnen wir aber die Winkel, welche die beiden genannten Strahlen und

§. 100. denjenigen, welchen die erwähnte Normale mit der Abscissenachse bilden, respective durch φ', φ und ψ, so ist

$$\sin\mu = \sin(\varphi - \psi) \quad ; \quad \sin\mu' = \sin(\varphi' - \psi) \, ,$$

also $\sin\mu = \sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi$; $\sin\mu' = \sin\varphi'\cos\psi - \cos\varphi'\sin\psi$.

Da nun die Gleichungen der drei durch den Punkt xy gehenden Geraden, nämlich des einfallenden und des gebrochenen Strahls und der Normale,

$$u - y = \varkappa'(t - x) \quad ; \quad u - y = \varkappa(t - x) \quad ; \quad u - y = -\frac{1}{p}(t - x) \quad (4)$$

sind, wo t, u die laufenden Coordinaten dieser Geraden bezeichnen, und, der Kürze wegen, $\varkappa'$, $\varkappa$ und p für $\frac{d\beta'}{d\alpha'}$, $\frac{d\beta}{d\alpha}$ und $\frac{dy}{dx}$ gesetzt sind; so haben wir

$$\operatorname{tang}\varphi' = \varkappa' \quad ; \quad \operatorname{tang}\varphi = \varkappa \quad ; \quad \operatorname{tang}\psi = -\frac{1}{p} \, ;$$

also

$$\sin\varphi' = \frac{\varkappa'}{\sqrt{1+\varkappa'^2}} \quad ; \quad \sin\varphi = \frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}} \quad ; \quad \sin\psi = -\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \, ;$$

$$\cos\varphi' = \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa'^2}} \quad ; \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa^2}} \quad ; \quad \cos\psi = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \, ;$$

und somit, durch Substitution dieser Ausdrücke in diejenigen von $\sin\mu$ und $\sin\mu'$

$$\sin\mu = \frac{1+\varkappa p}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+\varkappa^2}} \quad ; \quad \sin\mu' = \frac{1+\varkappa' p}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+\varkappa'^2}} \, .$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (3), so kommt

$$\frac{n'(1+\varkappa p)}{\sqrt{1+\varkappa^2}} = \frac{n(1+\varkappa' p)}{\sqrt{1+\varkappa'^2}} \, . \qquad (5)$$

Da nun der Punkt $\alpha'\beta'$ in dem auffallenden Strahle liegt, so haben wir, in Folge von (4), $\beta' - y = \varkappa'(\alpha' - x)$ und somit

$$\varkappa' = \frac{\beta' - y}{\alpha' - x} \, . \qquad (6)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (5), so können wir $\varkappa$ durch x, y, α' und β', und da wir zwischen diesen vier Größen noch drei Gleichungen, nämlich (1), (2) und $\varkappa' = \frac{d\beta'}{d\alpha'} = \frac{\beta' - y}{\alpha' - x}$ haben, $\varkappa$ durch eine dieser Größen, z. B. durch α', ausdrücken. Substituiren wir den so gefundenen Ausdruck von

von x in die Gleichung des gebrochenen Strahls §. 100.

$$\beta - y = x(\alpha - x) , \qquad (7)$$

deſſen laufende Coordinaten wir jetzt durch α u. β bezeichnen, ſo enthält ſie, nachdem wir auch für x und y ihre Werthe, in α' ausgedrückt, ſubſtituirt haben, nur dieſe eine Größe α', welche ſich von einem zurückgeworfenen Strahle zum andern verändert, und die wir daher als eine ſolche willkürliche Conſtante anzuſehen haben. Wir werden alſo die geſuchte Brennlinie dadurch finden, daß wir die einhüllende Curve der, durch die Gleichung (7) ausgedrückten, Geraden aufſuchen, wodurch dann die Aufgabe gelöſt iſt.

Wir müſſen noch bemerken, daß durch Subſtitution der Ausdrücke von x' und x aus (6) u. (7) in (5)

$$\frac{n'\{(\beta - y)p + (\alpha - x)\}}{\sqrt{(\beta - y)^2 + (\alpha - x)^2}} = \frac{n\{(\beta' - y)p + (\alpha' - x)\}}{\sqrt{(\beta' - y)^2 + (\alpha' - x)^2}} \qquad (8)$$

ſich ergiebt.

Wenn das Brechungsverhältniß $n' : n = 1 : -1$ iſt, vereinfacht ſich die Gleichung (5); denn wir haben alsdann

$$(1 + x'^2)(1 + xp)^2 = (1 + x^2)(1 + x'p)^2 ,$$

eine Gleichung, welche, nach Aufhebung der Parentheſen, die Form

$$(x - x')\{(x + x')p^2 + 2(1 - xx')p - (x + x')\} = 0$$

annimmt. Der erſte Factor dieſer Gleichung iſt aber zu verwerfen, weil x nicht gleich x' ſeyn kann, ohne daß der zurückgeworfene Strahl mit dem auffallenden zuſammen fiele, was im Allgemeinen der Vorausſetzung $\sin\mu' : \sin\mu = 1 : -1$ widerſpricht. Nachdem wir dieſen Factor weggelaſſen haben, können wir die Gleichung wie folgt ſchreiben

$$\frac{x - p}{1 + xp} = \frac{p - x'}{1 + x'p} , \qquad (9)$$

und dieſe letzte Gleichung hätten wir auch unmittelbar aus der Gleichung $\tang(\varphi - \psi) = -\tang(\varphi' - \psi)$ herleiten können.

Aufgabe [168]. Es ſoll eine Relation zwiſchen den Längen des auffallenden und des gebrochenen Strahls, beide von ihrem gemeinſchaftlichen Punkte auf der brechenden Curve bis zu den Berührungspunkten auf den Brennlinien gerechnet, gefunden werden.

Differentiiren wir die Gleichung (8) nach α', indem wir β' als Function von α', ferner x und ſomit auch y als Function derſelben Größe an-

§. 100. sehen, und setzen den sich ergebenden Differentialcoefficienten gleich Null, was zufolge der vorigen Aufgabe geschehen müßte, wenn die Brennlinie der auffallenden Strahlen und die brechende Curve gegeben wären, und die Brennlinie der gebrochenen Strahlen gefunden werden sollte; so erhalten wir, indem wir, der Kürze wegen, $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{d^2y}{dx^2} = q$ setzen,

$$n'\left\{\frac{(\beta-y)q-(p^2+1)+\frac{[(\beta-y)p+(\alpha-x)]^2}{(\beta-y)^2+(\alpha-x)^2}}{\sqrt{(\beta-y)^2+(\alpha-x)^2}}\right\}\frac{dx}{d\alpha'} =$$

$$n\left\{\frac{(\beta'-y)q-(p^2+1)+\frac{[(\beta'-y)p+(\alpha'-x)]^2}{(\beta'-y)^2+(\alpha'-x)^2}}{\sqrt{(\beta'-y)^2+(\alpha'-x)^2}}\right\}\frac{dx}{d\alpha'}$$

$$+n\left\{p\frac{d\beta'}{d\alpha'}+1-\frac{[(\beta'-y)p+(\alpha'-x)][(\beta'-y)\frac{d\beta'}{d\alpha'}+(\alpha'-x)]}{(\beta'-y)^2+(\alpha'-x)^2}\right\}.$$

Das letzte Glied des zweiten Theils dieser Gleichung läßt sich auf die Form

$$\frac{\{(\beta'-y)-p(\alpha'-x)\}\{(\beta'-y)-\frac{d\beta'}{d\alpha'}(\alpha'-x)\}}{\{(\beta'-y)^2+(\alpha'-x)^2\}^{\frac{1}{2}}}.n$$

bringen. Da nun aber, in Folge von (6), $\frac{d\beta'}{d\alpha'} = \varkappa' = \frac{\beta'-y}{\alpha'-x}$, also $(\beta'-y)-\frac{d\beta'}{d\alpha'}(\alpha'-x) = 0$ ist, so verschwindet dieses Glied in der gefundenen Gleichung. Um diese jetzt noch mehr zu vereinfachen, wollen wir annehmen, die Coordinaten seyen sämmtlich so transformirt, daß die Tangente im Punkte xy der brechenden Curve die Abscissenachse, und die Normale in diesem Punkte die Ordinatenachse werde. Alsdann ist in der gefundenen Gleichung $x = 0$, $y = 0$ und $p = \frac{dy}{dx} = 0$ und, wenn wir den Krümmungsradius des eben genannten Punktes durch ϱ bezeichnen, $q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho}$ (§. 83.), wodurch sie sich auf

§. 100.

$$n'\left\{\frac{\frac{\beta}{\varrho}-1+\frac{\alpha^2}{\beta^2+\alpha^2}}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}\right\} = n\left\{\frac{\frac{\beta'}{\varrho}-1+\frac{\alpha'^2}{\beta'^2+\alpha'^2}}{\sqrt{\beta'^2+\alpha'^2}}\right\}.$$

oder

$$n'\left\{\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}\cdot\frac{1}{\varrho}-\frac{\beta^2}{\beta^2+\alpha^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}\right\} = n\left\{\frac{\beta'}{\sqrt{\beta'^2+\alpha'^2}}\cdot\frac{1}{\varrho}-\frac{\beta'^2}{\beta'^2+\alpha'^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta'^2+\alpha'^2}}\right\}$$

reducirt. Es ist aber bei der gegenwärtigen Lage der Coordinatenachsen offenbar $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}} = \cos\mu$ und $\frac{\beta'}{\sqrt{\beta'^2+\alpha'^2}} = \cos\mu'$, wenn μ und μ' die Winkel bezeichnen, welche der gebrochene und der einfallende Strahl mit der Normale bilden, und außerdem ist, wenn δ und δ' die beiden in Rede stehenden Längen dieser Strahlen bedeuten, $\pm\sqrt{\beta^2+\alpha^2} = \delta$ und $\pm\sqrt{\beta'^2+\alpha'^2} = \delta'$. Wir erhalten demnach aus unserer letzten Gleichung

$$n'\left\{\frac{\cos\mu}{\varrho}\mp\frac{\cos^2\mu}{\delta}\right\} = n\left\{\frac{\cos\mu'}{\varrho}\mp\frac{\cos^2\mu'}{\delta'}\right\}, \qquad (10)$$

welches die verlangte Relation ist.

Für den Fall einer zurückwerfenden Curve, in welchem $n' = -n$ und also $\mu' = -\mu$, ist, erhalten wir aus (10)

$$\frac{2}{\varrho\cos\mu} = \pm\frac{1}{\delta}\pm\frac{1}{\delta'}; \qquad (11)$$

und, wenn die einfallenden Strahlen außerdem einander parallel sind, also $\delta' = \infty$ ist,

$$\delta = \pm\tfrac{1}{2}\varrho\cos\mu. \qquad (12)$$

§. 101.

Aufgabe [169]. Es ist eine gerade Linie und ein Punkt gegeben. Von diesem Punkte fallen Strahlen auf jene Gerade und werden von ihr nach einem gegebenen Verhältnisse gebrochen. Es soll die Brennlinie der gebrochenen Strahlen gefunden werden.

Wir nehmen die gegebene Gerade zur Abscissenachse, die durch den gegebenen Punkt auf ihr senkrecht errichtete Gerade zur Ordinatenachse und nennen die Ordinate dieses Punktes h. Alsdann sind die in dem vorigen §. mit α' und β' bezeichneten Größen nicht mehr veränderlich und zwar ist $\alpha' = 0$ und $\beta' = h$; ferner ist die Gleichung der brechenden Curve $y = 0$,

§. 101. und daher $p = \frac{dy}{dx} = 0$. Die Gleichung (8) des vorigen §. giebt, durch Substitution der eben genannten Werthe,

$$\frac{n'(\alpha - x)}{\sqrt{\beta^2 + (\alpha - x)^2}} = -\frac{nx}{\sqrt{h^2 + x^2}}, \qquad (1)$$

und entwickeln wir β^2, so kommt

$$\beta^2 = \frac{(n'^2h^2 - m^2x^2)(\alpha - x)^2}{n^2x^2}, \qquad (2)$$

wenn wir, der Kürze wegen, $n^2 - n'^2 = m^2$ setzen. Diese Gleichung differentiiren wir bloß nach x (§. 100.), und finden nach einigen sich von selbst darbietenden Reductionen

$$m^2x^3 = n'^2h^2\alpha . \qquad (3)$$

Zwischen dieser Gleichung (3) und der Gleichung (1) oder (2) ist nun x zu eliminiren; um aber zu einer symmetrischen Finalgleichung zu gelangen, verfahren wir bei dieser Elimination wie folgt. Wir nehmen aus der Gleichung (3)

$$\alpha = \frac{m^2x^3}{n'^2h^2}, \qquad (4)$$

und setzen diesen Ausdruck in (2), wodurch wir

$$\beta^2 = -\frac{(m^2x^2 - n'^2h^2)^3}{n^2n'^4h^4} \qquad (5)$$

erhalten. Aus (4) und (5) entwickeln wir

$$x = \frac{n'^{\frac{2}{3}}h^{\frac{2}{3}}}{m^{\frac{2}{3}}}.\alpha^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad m^2x^2 - n'^2h^2 = -n^{\frac{2}{3}}n'^{\frac{4}{3}}h^{\frac{4}{3}}\beta^{\frac{2}{3}},$$

und hieraus erhalten wir

$$x^2 = \frac{n'^{\frac{4}{3}}h^{\frac{4}{3}}}{m^{\frac{4}{3}}}.\alpha^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad x^2 = \frac{n'^2h^2}{m^2} - \frac{n^{\frac{2}{3}}n'^{\frac{4}{3}}h^{\frac{4}{3}}}{m^2}.\beta^{\frac{2}{3}}.$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke einander gleich und dividiren durch $\frac{n'^2h^2}{m^2}$, so ergiebt sich

$$\frac{m^{\frac{2}{3}}}{n'^{\frac{2}{3}}}.\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}.\alpha^{\frac{2}{3}} + \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n'^{\frac{2}{3}}}.\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}.\beta^{\frac{2}{3}} = 1,$$

welches die Gleichung der gesuchten Brennlinie ist. Verwechseln wir die

Abſciſſen- und Ordinatenachſe mit einander, und ſetzen §. 101.

$$\frac{n}{n'}h = a \quad ; \quad \frac{m}{n'}h = b \, ,$$

woraus $\frac{n^2-m^2}{n'^2}h^2 = a^2-b^2$, oder, weil $n^2-n'^2 = m^2$, $h^2 = a^2-b^2$ folgt, ſo nimmt die Gleichung die Geſtalt

$$\frac{b^{\frac{2}{3}}}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{3}}}\cdot\beta^{\frac{2}{3}} + \frac{a^{\frac{2}{3}}}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{3}}}\cdot\alpha^{\frac{2}{3}} = 1$$

an. Die geſuchte Brennlinie iſt alſo die Evolute einer Ellipſe oder Hyperbel, je nachdem b reell oder imaginär iſt, alſo je nachdem $m^2 = n^2-n'^2$ poſitiv oder negativ iſt (§. 88.). Die erſte Achſe dieſer Ellipſe oder Hyperbel fällt mit der vom ſtrahlenden Punkte auf die brechende Gerade herabgelaſſenen Senkrechten, und ein Brennpunkt dieſer Curve mit dem ſtrahlenden Punkte zuſammen.

Aufgabe [170]. Es iſt ein Kreis gegeben, auf welchen Strahlen, einer gegebenen Richtung parallel, auffallen. Es ſoll die Gleichung der Brennlinie der gebrochenen und insbeſondere die der zurückgeworfenen Strahlen gefunden werden.

Wir nehmen den Mittelpunkt des gegebenen Kreiſes zum Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten und die durch ihn der gegebenen Richtung parallele Gerade zur Abſciſſenachſe. Die Gleichung des Kreiſes iſt alsdann

$$y^2+x^2 = r^2 \, , \qquad (6)$$

und da die einfallenden Strahlen der Abſciſſenachſe parallel ſind, ſo iſt in der Gleichung (5) des vorigen §. $\varkappa' = 0$, dieſe Gleichung ſelbſt daher

$$\frac{n'(1+\varkappa p)}{\sqrt{1+\varkappa^2}} = n \, . \qquad (7)$$

Setzen wir hierin $\frac{\beta-y}{\alpha-x}$ für $\varkappa$ (§. 100. S. 7), ſo kommt

$$n'\{(\beta-y)p+(\alpha-x)\} = n\sqrt{(\beta-y)^2+(\alpha-x)} \, , \qquad (8)$$

eine Gleichung, die wir auch aus der Gleichung (8) des vorigen §. dadurch hätten herleiten können, daß wir $\alpha' = \infty$ ſetzen.

Aus (6) finden wir $\frac{dy}{dx} = p = -\frac{x}{y}$, und durch Subſtitution in (8), und wenn wir zugleich r^2 für x^2+y^2 ſetzen,

§. 101. $$n'\{\alpha y-\beta x\} = ny\sqrt{\beta^2+\alpha^2+r^2-2\beta y-2\alpha x} . \qquad (9)$$

Setzen wir ferner $y = r\sin t$ und $x = r\cos t$, wodurch die Gleichung (6), und unabhängig von t, befriedigt wird, so erhalten wir aus (9)

$$n'^2\{\alpha-\beta\cot t\}^2 = n^2\{\beta^2+\alpha^2+r^2-2r\beta\sin t-2r\alpha\cos t\} . \quad (10)$$

Wir differentiiren diese Gleichung nach t, und erhalten

$$n'^2\{\alpha-\beta\cot t\}\frac{\beta}{\sin^2 t} = n^2 r\{\alpha\sin t-\beta\cos t\} ,$$

oder

$$n'^2\{\alpha\sin t-\beta\cos t\}\beta = n^2 r\sin^3 t\{\alpha\sin t-\beta\cos t\} ,$$

woraus sich

$$\sin t = \frac{n'^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}r^{\frac{1}{3}}}$$

ergiebt. Bringen wir nun die Gleichung (10) auf die Form

$$(n'^2-n^2)\alpha^2+2(n^2 r\sin t-n'^2\beta)\cot t\,\alpha+(n'^2\cot^2 t-n^2)\beta^2+n^2 r(2\beta\sin t-r)=0 ,$$

und substituiren darin für $\sin t$ den so eben gefundenen Ausdruck und für $\cot t$ den sich daraus ergebenden, nämlich $\frac{\sqrt{n^{\frac{4}{3}}r^{\frac{2}{3}}-n'^{\frac{4}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}}}{n'^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}}$, so erhalten wir

$$(n'^2-n^2)\alpha^2+2\{n^{\frac{4}{3}}r^{\frac{2}{3}}-n'^{\frac{4}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}}\alpha-\{n^2r^2-3n'^{\frac{2}{3}}n^{\frac{4}{3}}r^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{4}{3}}+(n^2+n'^2)\beta^2\} = 0$$

als Gleichung der gesuchten Brennlinie für Strahlen, welche nach dem Verhältniß $n' : n$ gebrochen sind.

Für zurückgeworfene Strahlen ist $n'^2 = n^2$, und dadurch reducirt sich die gefundene Gleichung auf

$$2(r^{\frac{2}{3}}-\beta^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\alpha-(r^2-3r^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{4}{3}}+2\beta^2) = 0 .$$

Diese Gleichung läßt sich wie folgt zerlegen

$$(r^{\frac{2}{3}}-\beta^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\{2\alpha-(r^{\frac{2}{3}}-\beta^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(r^{\frac{2}{3}}+2\beta^{\frac{2}{3}})\} = 0 .$$

Der erste Factor drückt zwei der Abscissenachse parallele Gerade, $\beta = r$ und $\beta = -r$, aus; der zweite Factor aber giebt

$$4\alpha^2 = (r^{\frac{2}{3}}-\beta^{\frac{2}{3}})(r^{\frac{2}{3}}+2\beta^{\frac{2}{3}})^2 ,$$

oder rational gemacht

$$27r^4\beta^2 = (4\beta^2+4\alpha^2-r^2)^3 ,$$

als Gleichung der gesuchten Brennlinie für zurückgeworfene Strahlen.

Setzen wir $r = 2r_1$, so kommt

$$27r_1^4\beta^2 = 4(\beta^2+\alpha^2-r_1^2)^3 \,,$$ §. 101.

welches die Gleichung (7) des §. 67. iſt, und die Brennlinie iſt daher eine Epicycloide. Der Grundkreis dieſer Epicycloide iſt dem zurückſtrahlenden concentriſch; der Radius des erſtern iſt der Hälfte, der Radius des rollenden Kreiſes aber dem vierten Theile des Radius dieſes zurückwerfenden Kreiſes gleich.

Aufgabe [171]. *Die Catacauſtica für einen Kreis zu finden, wenn die einfallenden Strahlen von einem gegebenen Punkte ausgehen.*

Wir nehmen die Verbindungslinie des Mittelpunktes vom gegebenen Kreiſe und des ſtrahlenden Punktes zur Abſciſſenachſe und die Senkrechte durch jenen Mittelpunkt zur Ordinatenachſe. Die Gleichung des Kreiſes iſt alsdann

$$y^2+x^2 = r^2 \,,$$

und da das Brechungsverhältniß $n' : n = 1 : -1$ iſt, ſo haben wir (§. 100. G. 9)

$$\frac{\varkappa-p}{1+\varkappa p} = \frac{p-\varkappa'}{1+\varkappa' p} \,.$$

Bezeichnen wir die Abſciſſe des Punktes, von dem die einfallenden Strahlen ausgehen, durch a, ſo haben wir ferner $\beta' = 0$, $\alpha' = a$, und aus den Gleichungen (6) und (7) des vor. §.

$$\varkappa' = \frac{y}{x-a} \;;\; \varkappa = \frac{\beta-y}{\alpha-x} \,,$$

welche Ausdrücke wir in die vorige Gleichung ſubſtituiren, und, indem wir zugleich $-\frac{x}{y}$ für p ſetzen,

$$\frac{\beta y+\alpha x-(x^2+y^2)}{\alpha y-\beta x} = \frac{x^2+y^2-ax}{ay}$$

erhalten. Wir ſetzen ferner, wie in der vorigen Aufgabe, $y = r\sin t$ und $x = r\cos t$, wodurch ſich ergiebt

$$\frac{\beta\sin t+\alpha\cos t-r}{\alpha\sin t-\beta\cos t} = \frac{r-a\cos t}{a\sin t} \,,$$

und wenn wir die Nenner wegſchaffen,

$$\{a(\cos^2 t-\sin^2 t)-r\cos t\}\beta-\{2a\sin t\cos t-r\sin t\}\alpha+ra\sin t = 0 \,,$$

oder

§. 101. $$\{a\cos 2t - r\cos t\}\beta - \{a\sin 2t - r\sin t\}\alpha + ra\sin t = 0 .$$

Differentiiren wir dieſe Gleichung bloß nach t, ſo kommt

$$\{2a\sin 2t - r\sin t\}\beta + \{2a\cos 2t - r\cos t\}\alpha - ra\cos t = 0 ,$$

und zwiſchen dieſen beiden letzten Gleichungen müßten wir t elimiiren, um die Gleichung der Catacauſtica zu erhalten. Da aber die Finalgleichung der Elimination eine ziemlich zuſammengeſetzte Form hat, ſo iſt es beſſer, die beiden eben gefundenen Gleichungen, welche α und β nur in erſter Potenz enthalten, beſtehen zu laſſen, oder aus ihnen α und β vermittelſt t ausgedrückt darzuſtellen. Wir finden durch Entwickelung, nach einer kleinen Reduction,

$$\alpha = \frac{ra\{a(3\cos t - 2\cos^3 t) - r\}}{2a^2 - 3ar\cos t + r^2} ,$$

$$\beta = \frac{2ra^2\sin^3 t}{2a^2 - 3ar\cos t + r^2} .$$

Für den beſondern Fall, in welchem der ſtrahlende Punkt auf der Peripherie des zurückwerfenden Kreiſes liegt, in dem alſo $a = r$ iſt, wird der Nenner der ſo eben aufgeſtellten Ausdrücke ein Factor der Zähler, und die Diviſion giebt alsdann

$$\alpha = \frac{r}{3}\{2\cos^2 t + 2\cos t - 1\} \quad ; \quad \beta = \frac{2r}{3}\{1 + \cos t\}\sin t ,$$

oder, unter einer andern Form,

$$\alpha = \frac{2r}{3}\cos t + \frac{r}{3}\cos 2t \quad ; \quad \beta = \frac{2r}{3}\sin t + \frac{r}{3}\sin 2t .$$

Setzen wir hierin $\alpha = -\alpha_1$, $\beta = -\beta_1$, $t = \pi + \vartheta$ und $r = 3r_1$, ſo erhalten wir

$$\alpha_1 = 2r_1\cos\vartheta - r_1\cos 2\vartheta \quad ; \quad \beta_1 = 2r_1\sin\vartheta - r_1\sin 2\vartheta ,$$

woraus ſich durch Vergleichung mit §. 67. (S. 1) ergiebt, daß dieſe Catacauſtica eine Epicycloide ſey, in welcher der Radius des feſten Kreiſes und der des rollenden gleich $r_1 = \frac{r}{3}$ iſt, und daß ſie alſo die Cardioide iſt (§. 67. S. 6).

§. 102.

Statt der Brennlinie, welche von den auffallenden Strahlen berührt wird, kann auch eine Evolvente dieſer Curve, welche alſo von dieſen auf-

fallenden Strahlen senkrecht geschnitten wird, gegeben seyn, und alsdann kann ebenfalls die Brennlinie der gebrochenen oder zurückgeworfenen Strahlen gefunden werden. Es ist aber oft besser, zuerst eine Evolvente dieser Brennlinie der gebrochenen Strahlen, und sodann aus dieser Evolvente ihre Evolute, d. i. die Brennlinie selbst, aufzusuchen. §. 102.

Lehrsatz [49]. Die Brennlinie B für irgend eine brechende oder zurückwerfende Curve C und für Strahlen, welche Tangenten einer Brennlinie A, somit Normalen einer Evolvente A' dieser Brennlinie A sind, ist die Evolute einer Curve B', welche die einhüllende Curve derjenigen Kreise ist, deren Mittelpunkte auf der brechenden Curve C liegen und deren Radien zu den Entfernungen dieser Mittelpunkte von der Curve A' in dem constanten Brechungsverhältnisse stehen.

Wir sehen, in der Absicht diesen Satz zu erweisen, die brechende Curve C und die Evolvente A' als gegeben an, und bezeichnen die rechtwinkligen Coordinaten der erstern Curve durch x, y, die der letztern aber durch α', β'. Die Gleichungen der drei, durch den Punkt xy gehenden, Geraden, nämlich des einfallenden, des gebrochenen Strahls und der Normale im Punkte xy, sind die Gleichungen (4) des §. 100.; nur ist jetzt x' nicht gleich $\frac{d\beta'}{d\alpha'}$, sondern $x' = -\frac{1}{\frac{d\beta'}{d\alpha'}}$, weil α', β' nicht die Coordinaten der Brennlinie A, sondern die der Evolvente A' dieser Curve sind; woher denn auch statt der Gleichung (6) in §. 100. die Gleichung

$$(\beta' - y)\frac{d\beta'}{d\alpha'} + \alpha' - x = 0 \qquad (1)$$

eintritt.

Die Gleichung (8) des §. 100., nämlich

$$\frac{n'\{(\beta - y)p + (\alpha - x)\}}{\sqrt{(\beta - y)^2 + (\alpha - x)^2}} = \frac{n\{(\beta' - y)p + (\alpha' - x)\}}{\sqrt{(\beta' - y)^2 + (\alpha' - x)^2}}, \qquad (2)$$

drückt alle Punkte eines gebrochenen Strahls aus, wenn wir α' als constant ansehen, von welcher Größe β', x und y, in Folge der Relationen, welche zwischen diesen vier Größen Statt finden, Functionen sind. Dies ist aus der Herleitung jener Gleichung klar. Zerlegen wir nun die Gleichung (2) in zwei andere Gleichungen, indem wir

§. 102. $\frac{n\sqrt{(\beta-y)^2+(\alpha-x)^2}}{n\sqrt{(\beta'-y)^2+(\alpha'-x)^2}} = 1 \quad ; \quad \frac{n'^2\{(\beta-y)p+(\alpha-x)\}}{n^2\{(\beta'-y)p+(\alpha'-x)\}} = 1$

setzen, so sind diejenigen Werthe von α und β, welche zu gleicher Zeit diese beiden Gleichungen befriedigen, die Coordinaten eines Punktes des gebrochenen Strahls. Geben wir diesen beiden Gleichungen die Formen

$$(\beta-y)^2+(\alpha-x)^2 = \frac{n^2}{n'^2}\{(\beta'-y)^2+(\alpha'-x)^2\}\,, \qquad (3)$$

$$(\beta-y)p+(\alpha-x) = \frac{n^2}{n'^2}\{(\beta'-y)p+(\alpha-x)\}\,, \qquad (4)$$

so ist klar, daß die erste (3) einen Kreis ausdrückt, dessen Mittelpunkt der Punkt xy, und dessen Radius $\frac{n}{n'}\sqrt{(\beta'-y)^2+(\alpha'-x)^2}$ zu der Entfernung $\sqrt{(\beta'-y)^2+(\alpha'-x)^2}$ in dem Verhältniß $n : n'$ steht. Die andere Gleichung (4) ist aber gerade diejenige, welche sich ergiebt, wenn wir die Kreisgleichung (3) nach α' differentiiren und dabei β' sowohl als x und y als Functionen dieser willkürlichen Constanten α' ansehen; denn diese Differentiation giebt zwar

$$\{(\beta-y)p+\alpha-x\}\frac{dx}{d\alpha'} = \frac{n^2}{n'^2}\{(\beta'-y)p+\alpha'-x\}\frac{dx}{d\alpha'}-\frac{n^2}{n'^2}\{(\beta'-y)\frac{d\beta'}{d\alpha'}+(\alpha'-x)\}\,,$$

es ist aber, in Folge der Gleichung (1) das zweite Glied des letzten Theiles gleich Null, und daher reducirt sie sich auf die Gleichung (4). Das System der beiden Gleichungen (3) und (4) drückt nun, weil die zweite Gleichung aus der ersten durch Differentiation nach der willkürlichen Constanten α' entsteht, die einhüllende Curve aller durch (3) ausgedrückten Kreise aus (§. 94.). Der Punkt des gebrochenen Strahls, welcher auf dem Kreise (3) und der Linie (4) liegt, befindet sich also auch auf der eben erwähnten einhüllenden Curve; er ist folglich der Berührungspunkt des Kreises und dieser Curve; und da der gebrochene Strahl auch durch den Mittelpunkt xy des Kreises geht, so ist dieser Strahl die Normale des Kreises und also auch der einhüllenden Curve. Alle gebrochenen Strahlen sind folglich Normalen der genannten einhüllenden Curve, und diese ist somit eine Evolvente der von den gebrochenen Strahlen berührten Brennlinie, was gezeigt werden sollte *).

*) Der eben erwiesene Satz ist in dieser Allgemeinheit zuerst von H. Gergonne bekannt gemacht worden. Ann. de math. T. XV.

Wenn eine Evolvente A' der Brennlinie A gegeben ist, um daraus die Brennlinie B oder eine Evolvente B' derselben zu finden, so kann man der Curve A' irgend eine ihr parallele Curve A'' substituiren, weil diese letztere ebenfalls eine Evolvente der Curve A ist, oder mit andern Worten, weil A' und A'' dieselbe Evolute haben (§. 93.). So z. B. kann man, wenn die auffallenden Strahlen von einem Punkte ausgehen, einen jeden Kreis K, welcher diesen Punkt zum Mittelpunkte hat, als die Curve A' betrachten, indem alle auffallenden Strahlen diesen Kreis senkrecht schneiden. Man kann alsdann die Entfernung der Mittelpunkte xy der eingehüllten Kreise, welche in dem Lehrsatz erwähnt ist, von der brechenden Curve bis zum Kreise K nehmen; man kann aber auch die Entfernung von dem Punkte xy bis zu dem strahlenden Punkte selbst dafür setzen. §. 102.

Wenn die auffallenden Strahlen einander parallel sind, so tritt eine gerade Linie, welche sie senkrecht schneidet, an die Stelle der Evolvente A'.

Um ein Beispiel von der Anwendung zu geben, die sich von dem obigen Satze machen läßt, wollen wir den Fall eines strahlenden Punktes und einer zurückwerfenden Curve annehmen. Alsdann haben wir $n^2 = n'^2$, und wenn wir die erwähnte Entfernung vom Punkte xy bis zum strahlenden Punkte nehmen, den Radius der eingehüllten Kreise der eben genannten Entfernung gleich zu setzen. Diese Kreise, deren Mittelpunkte auf der zurückwerfenden Curve liegen, gehen demnach durch den strahlenden Punkt, und ihre einhüllende Curve ist diejenige, die wir im §. 96. (Aufg. 159.) betrachtet haben *). Nehmen wir, um diesen Fall noch mehr zu particularisiren, an, daß die zurückwerfende Curve eine Ellipse sey, deren Mittelpunkt g u. h zu Coordinaten hat, während der strahlende Punkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, so ist die Brennlinie die Evolute der Curve, deren Gleichung

$$(y^2+x^2-2hg-2gx)^2 = 4(b^2y^2+a^2x^2)$$

wir in §. 96. gefunden haben (S. 10.). Für den Fall des Kreises, in welchem $b = a$ ist, und wenn wir die Abscissenachse durch den Mittelpunkt dieses Kreises gehen lassen, reducirt sich diese Gleichung der Evolvente der Brennlinie auf

$$(y^2+x^2-2gx)^2 = 4r^2(y^2+x^2) ,$$

*) Daß dieselbe Curve eine Roulette sey, in welcher die zurückwerfende Curve die Basis und eine ihr gleiche Linie die rollende Curve ist, werden wir später nachzuweisen Gelegenheit haben.

§. 102. welches die Gleichung (4) des §. 61. ist, wenn wir g und r mit r und $\frac{1}{2}a$ vertauschen. Für den Fall der gleichseitigen Hyperbel aber, und wenn wir den strahlenden Punkt in den Mittelpunkt dieser Curve legen, reducirt sich jene Gleichung, da alsdann $g = h = 0$ und $b^2 = -a^2$ ist, auf

$$(y^2+x^2)^2+4a^2(y^2-x^2) = 0 ,$$

und die Evolvente der Brennlinie ist also eine Lemniscate (§. 62. S. 2), die Brennlinie selbst also diejenige Curve, welche wir im §. 88. (S. 9) gefunden haben, wenn wir für das dortige a jetzt 2a setzen.

Particularisiren wir unsern Fall auf eine andere Weise, indem wir annehmen, die zurückwerfende Curve sey eine logarithmische Spirale und der strahlende Punkt liege in ihrem Pol, so ist die Evolvente der Catacaustica eine ihr gleiche logarithmische Spirale (§. 96.), und da deren Evolute wiederum eine logarithmische Spirale ist, die dieser gleich ist (§. 88.), so ist die Catacaustica eine der zurückwerfenden gleiche logarithmische Spirale.

Vermischte Aufgaben.

§. 103.

Aufgabe [172]. Eine gegebene Curve bewegt sich so, daß sie fortwährend zwei gegebene feste Curven berührt. Es soll der Ort gefunden werden, welchen ein, mit der beweglichen Curve fest verbundener, gegebener Punkt bei dieser Bewegung beschreibt.

Es seyen

$$\varphi(x, y) = 0 , \quad (1) \quad ; \quad \psi(x, y) = 0 \qquad (2)$$

die auf dieselben rechtwinkligen Achsen bezogenen Gleichungen der festen, und

$$F(t, u) = 0 \qquad (3)$$

die auf andere rechtwinklige Achsen bezogene Gleichung der beweglichen Curve; ferner seyen t', u' die auf die zuletzt genannten Achsen sich beziehenden Coordinaten des gegebenen Punktes. Stellen wir uns vor, daß die Achsen der t und u mit der beweglichen Curve fest verbunden sind, so werden sie bei der Bewegung dieser Curve ihre Lage fortwährend ändern, und nennen wir den veränderlichen Winkel, welchen die Achse der t mit der Achse der x bildet, β, und die veränderlichen Coordinaten des Anfangspunktes der tu, a

und b, so haben wir, zufolge §. 3. (F. 1. u. 9.) §. 103.

$$x = \cos\beta\, t - \sin\beta\, u + a\ ,$$
$$y = \sin\beta\, t + \cos\beta\, u + b\ ,$$

woraus

$$t = \cos\beta(x-a) + \sin\beta(y-b)\ ,$$
$$u = \cos\beta(y-b) - \sin\beta(x-a)\ ,$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in (3)

$$F\{[\cos\beta(x-a)+\sin\beta(y-b)]\ ,\ [\cos\beta(y-b)-\sin\beta(x-a)]\} = 0 \quad (4)$$

als Gleichung der beweglichen Curve, wenn sie auf die festen Achsen der x und y bezogen wird. Um nun die Bedingung auszudrücken, daß die Curve (4) die Curven (1) und (2) berühre, bezeichnen wir die Coordinaten des Berührungspunktes auf der Curve (1) durch x', y' und diejenigen des Berührungspunktes auf der Curve (2) durch x'', y''. Alsdann müssen x' u. y' die beiden Gleichungen (1) u. (4) und ihre ersten Differentialgleichungen befriedigen, so daß wir durch Elimination von x', y' u. $\frac{dy'}{dx'}$ zwischen diesen vier Gleichungen eine Relation zwischen a, b u. β erhalten; ferner müssen x'' u. y'' die Gleichungen (2) u. (4) und ihre ersten Differentialgleichungen befriedigen, so daß wir durch Elimination von x'', y'' und $\frac{dy''}{dx''}$ eine zweite Relation zwischen a, b u. β bekommen.

Nennen wir die auf die Achsen der x u. y bezogenen Coordinaten des Punktes $t'u'$, X und Y, so haben wir

$$X = \cos\beta\, t' - \sin\beta\, u' + a \ ; \ Y = \sin\beta\, t' + \cos\beta\, u' + b\ , \quad (5)$$

und wenn wir aus diesen Gleichungen und den so eben erwähnten beiden Gleichungen zwischen a, b u. β diese letzten Größen eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung in X u. Y, welche die des gesuchten Ortes ist.

Beispiel. Es soll die Curve gefunden werden, welche ein Punkt der Ebene einer gegebenen Ellipse beschreibt, während diese sich so bewegt, daß sie beständig die Schenkel eines in Lage gegebenen rechten Winkels berührt.

Es sey $A^2u^2 + B^2t^2 = A^2B^2$ die Gleichung der Ellipse. Wir nehmen die Schenkel des rechten Winkels zur Achse der x und der y. Alsdann haben wir, zufolge des Obigen,

$$y' = 0\ ;\ \frac{dy'}{dx'} = 0\ ;\ A^2[\cos\beta(y'-b)-\sin\beta(x'-a)]^2 + B^2[\sin\beta(y'-b)+\cos\beta(x'-a)]^2 = A^2B^2;$$

§. 103. $\{A^2[\cos\beta(y'-b)-\sin\beta(x'-a)]\cos\beta+B^2[\sin\beta(y'-b)+\cos\beta(x'-a)]\sin\beta\}\frac{dy'}{dx'}=$

$\{A^2[\cos\beta(y'-b)-\sin\beta(x'-a)]\sin\beta-B^2[\sin\beta(y'-b)+\cos\beta(x'-a)]\cos\beta\}$

und

$x''=0\ ;\ \frac{dx''}{dy''}=0\ ;\ A^2[\cos\beta(y''-b)-\sin\beta(x''-a)]^2+B^2[\sin\beta(y''-b)+\cos\beta(x''-a)]^2=A^2B^2;$

$\{A^2[\cos\beta(y''-b)-\sin\beta(x''-a)]\cos\beta+B^2[\sin\beta(y''-b)+\cos\beta(x''-a)]\sin\beta\}\frac{dy''}{dx''}=$

$\{A^2[\cos\beta(y''-b)-\sin\beta(x''-a)]\sin\beta-B^2[\sin\beta(y''-b)+\cos\beta(x''-a)]\cos\beta\}$.

Von dieſen 8 Gleichungen reduciren ſich die dritte und vierte, vermittelſt der erſten und zweiten, auf

$$A^2[b\cos\beta+(x'-a)\sin\beta]^2+B^2[(x'-a)\cos\beta-b\sin\beta]^2=A^2B^2\ ,$$
$$A^2[b\cos\beta+(x'-a)\sin\beta]\sin\beta+B^2[(x'-a)\cos\beta-b\sin\beta]\cos\beta=0\ ,$$

und die ſiebente u. achte, vermittelſt der fünften u. ſechſten, auf

$$A^2[(y''-b)\cos\beta+a\sin\beta]^2+B^2[(y''-b)\sin\beta-a\cos\beta]^2=A^2B^2\ ,$$
$$A^2[(y''-b)\cos\beta+a\sin\beta]\cos\beta+B^2[(y''-b)\sin\beta-a\cos\beta]\sin\beta=0\ .$$

Die Elimination von x' oder (x'—a) zwiſchen jenen beiden Gleichungen und die von y'' oder (y''—b) zwiſchen dieſen beiden giebt

$$b^2=A^2\sin^2\beta+B^2\cos^2\beta\quad ;\quad a^2=A^2\cos^2\beta+B^2\sin^2\beta\ ,$$

und demnach haben wir, zufolge der Gleichungen (5),

$$\left.\begin{array}{l} X=\cos\beta t'-\sin\beta u'\pm\sqrt{A^2\cos^2\beta+B^2\sin^2\beta} \\ Y=\sin\beta t'+\cos\beta u'\pm\sqrt{A^2\sin^2\beta+B^2\cos^2\beta} \end{array}\right\}\ , \qquad (6)$$

zwiſchen welchen Gleichungen wir β elimiiniren müßten, um die Gleichung der geſuchten Curve in X, Y zu erhalten. Im Allgemeinen iſt es aber gerathener, das Syſtem dieſer beiden Gleichungen (6) beſtehen zu laſſen.

Iſt der beſchreibende Punkt der Mittelpunkt der Ellipſe, alſo $t'=u'=0$, ſo haben wir

$$X=\pm\sqrt{A^2\cos^2\beta+B^2\sin^2\beta}\quad ;\quad Y=\pm\sqrt{A^2\sin^2\beta+B^2\cos^2\beta}\ , \qquad (7)$$

und wenn wir quadriren und addiren

$$X^2+Y^2=A^2+B^2\ .$$

Der Ort iſt alſo ein Kreis, deſſen Mittelpunkt im Scheitel des gegebenen rechten Winkels liegt, und deſſen Radius $\sqrt{A^2+B^2}$ iſt, was ſich auch aus §. 38. hätte erſchließen laſſen. Aber dieſer Kreis kann von dem Mittelpunkte

der Ellipse offenbar nicht vollständig beschrieben werden. Um die Endpunkte der Kreisbogen zu finden, welche er wirklich beschreibt, können wir die größten und kleinsten Werthe der Ausdrücke (7) aufsuchen. Setzen wir die Differentialcoefficienten dieser Ausdrücke gleich Null oder gleich ∞, so haben wir §. 103.

$$\sin\beta\cos\beta = 0, \text{ oder } \sqrt{A^2\cos^2\beta+B^2\sin^2\beta} = 0 \text{ u. } \sqrt{A^2\sin^2\beta+B^2\cos^2\beta} = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen können von keinem reellen Werthe von β befriedigt werden; die erste Gleichung aber giebt $\sin\beta = 0$ oder $\cos\beta = 0$, und für diese Werthe verschwinden die zweiten Differentialcoefficienten nicht; die entsprechenden Werthe von X u. Y aber sind

$$X = \begin{cases} \pm A \\ \pm B \end{cases} \quad ; \quad Y = \begin{cases} \pm B \\ \pm A \end{cases}.$$

Die Sehnen der vier Bogen, welche der Mittelpunkt der Ellipse beschreibt, sind daher gleich $(A-B)\sqrt{2}$.

Ist der beschreibende Punkt ein Brennpunkt der Ellipse, so ist $u' = 0$ und $t' = \sqrt{A^2-B^2}$. Alsdann haben wir, zufolge (6),

$$X - \cos\beta\sqrt{A^2-B^2} = \pm\sqrt{A^2\cos^2\beta+B^2\sin^2\beta},$$
$$Y - \sin\beta\sqrt{A^2-B^2} = \pm\sqrt{A^2\sin^2\beta+B^2\cos^2\beta},$$

woraus

$$\cos\beta = \frac{X^2-B^2}{2X\sqrt{A^2-B^2}} \quad ; \quad \sin\beta = \frac{Y^2-B^2}{2Y\sqrt{A^2-B^2}},$$

und, weil $\cos^2\beta+\sin^2\beta = 1$,

$$Y^2(X^2-B^2)^2+X^2(Y^2-B^2)^2 = 4(A^2-B^2)X^2Y^2.$$

§. 104.

Aufgabe [173]. Auf einer gegebenen Curve C denjenigen Punkt zu bestimmen, der so liegt, daß die Summe der Normalen, welche von ihm aus an zwei andere ebenfalls gegebene Curven A', B' gezogen werden, ein Maximum oder Minimum sey.

Es seyen $F(x, y) = 0$, $\varphi(x', y') = 0$ und $\psi(x'', y'') = 0$ die Gleichungen der drei auf dieselben rechtwinkligen Achsen bezogenen Curven. Die Gleichungen der Normalen an den beiden letzten Curven sind

$$(u-y')\frac{dy'}{dx'}+(t-x') = 0 \quad ; \quad (u-y'')\frac{dy''}{dx''}+(t-x'') = 0,$$

§. 104. wenn t, u die laufenden Coordinaten dieſer Normalen bedeuten. Sollen dieſe Geraden durch einen Punkt xy der erſten Curve gehen, ſo muß

$$(y-y')\frac{dy'}{dx'}+(x-x')=0 \quad ; \quad (y-y'')\frac{dy''}{dx''}+(x-x'')=0 \qquad (1)$$

ſeyn. Die Summe der beiden Normalen iſt

$$\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}+\sqrt{(y-y'')^2+(x-x'')^2}\ ,$$

und da, in Folge der gegebenen drei Gleichungen der Curven und der beiden Gleichungen (1), von den ſechs Größen x, y, x', y', x'', y'' jede fünf Functionen der ſechſten ſind; ſo differentiiren wir dieſen Ausdruck, indem wir nur eine von den ſechs Größen, z. B. x, als unabhängige Veränderliche anſehen und den Differentialcoefficienten gleich Null ſetzen. Dies giebt uns

$$\frac{(y-y')\frac{dy}{dx}+(x-x')}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}}+\frac{(y-y'')\frac{dy}{dx}+(x-x'')}{\sqrt{(y-y'')^2+(x-x'')^2}}$$
$$-\frac{\{(y-y')\frac{dy'}{dx'}+(x-x')\}\frac{dx'}{dx}}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}}-\frac{\{(y-y'')\frac{dy''}{dx''}+(x-x'')\}\frac{dx''}{dx}}{\sqrt{(y-y'')^2+(x-x'')^2}}=0\ .$$

Da aber, in Folge der Gleichungen (1) die $\frac{dx'}{dx}$ und $\frac{dx''}{dx}$ multiplicirenden Factoren verſchwinden, ſo reducirt ſich dieſe Gleichung auf

$$\frac{(y-y')\frac{dy}{dx}+(x-x')}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}}+\frac{(y-y'')\frac{dy}{dx}+(x-x'')}{\sqrt{(y-y'')^2+(x-x'')^2}}=0\ . \qquad (2)$$

Die vorher erwähnten fünf Gleichungen und die Gleichung (2) reichen im Allgemeinen hin, die genannten ſechs Größen zu beſtimmen, wodurch die Aufgabe gelöſt iſt.

Bezeichnen wir die Winkel, welche die beiden Normalen (1) und denjenigen, welchen die Normale der Curve $F(x, y)=0$ im Punkte xy mit der Abſciſſenachſe bilden, der Reihe nach durch α, β, a, ſo haben wir

$$y-y'=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x-x')\ ;\ y-y''=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}(x-x'')\ ;\ \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos a}{\sin a}\ ;$$

und durch Subſtitution dieſer Ausdrücke für $y-y'$, $y-y''$ und $\frac{dy}{dx}$ in die

die Gleichung (2) §. 104.

$$(\sin\alpha\cos a - \cos\alpha\sin a) + (\sin\beta\cos a - \cos\beta\sin a) = 0\ ,$$

oder $\sin(\alpha - a) + \sin(\beta - a) = 0$; alſo $\alpha - a = a - \beta$, d. i. die Winkel, welche die Normalen (1) mit der Normale der Curve $F(x, y) = 0$ in dem geſuchten Punkte xy bilden, ſind einander gleich.

Wenn nicht die Summe der beiden genannten Normalen, ſondern die Summe der Producte, welche entſtehen, wenn jede derſelben mit einem conſtanten Factor n', n'' multiplicirt wird, ein Maximum oder Minimum ſeyn ſoll; ſo iſt es der Ausdruck

$$n'\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2} + n''\sqrt{(y-y'')^2+(x-x'')^2}\ ,$$

welcher differentiirt werden muß. Alsdann erhalten wir ſtatt der Gleichung (2) die folgende

$$\frac{n'\{(y-y')\frac{dy}{dx}+(x-x')\}}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}} + \frac{n''\{(y-y'')\frac{dy}{dx}+(x-x'')\}}{\sqrt{(y-y'')^2+(x+x'')^2}} = 0\ ,$$

woraus ſich, wenn wir die Bedeutung von α, β u. a beibehalten,

$n'\sin(\alpha - a) + n''\sin(\beta - a) = 0$, oder $n'\sin(\alpha - a) = n''\sin(a - \beta)$,

oder auch

$$\sin(\alpha - a) : \sin(a - \beta) = n'' : n'$$

ergiebt; d. i. die Sinuſſe der Winkel, welche die Normalen (1) mit der Normale der Curve $F(x, y) = 0$ in dem geſuchten Punkte xy bilden, verhalten ſich wie die gegebenen Factoren.

Wenn die gegebenen Curven A' und B' die im 49ſten Lehrſatze (§. 102.) genannten Evolventen und die Curve C die daſelbſt genannte brechende oder zurückwerfende Curve iſt, ſo giebt es offenbar kein Maximum oder Minimum.

Aufgabe [174]. Die Lage zweier geraden Linien und eine Curve iſt gegeben. Es ſoll an dieſer Curve eine Tangente gezogen werden, ſo daß ſie mit den beiden Geraden ein Dreieck bildet, deſſen Flächeninhalt ein Maximum oder Minimum ſey.

Wir nehmen die beiden Geraden zu Coordinatenachſen, und auf dieſe bezogen ſey die Gleichung der gegebenen Curve

$$F(x, y) = 0\ .$$

Die Gleichung der Tangente in einem Punkte xy dieſer Curve iſt

§. 104.

$$u-y=\frac{dy}{dx}(t-x)\,,$$

wenn t, u die laufenden Coordinaten dieſer Tangente bezeichnen. Für $t=0$ finden wir aus dieſer Gleichung $u=y-x\frac{dy}{dx}$, und für $u=0$ ebenſo $t=-\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx}}$. Iſt nun α der Winkel, welchen die gegebenen Geraden einſchließen, ſo iſt der Inhalt des, von dieſen Linien und der Tangente gebildeten, Dreiecks

$$-\frac{\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2}{2\frac{dy}{dx}}\sin\alpha\,.$$

Differentiiren wir dieſen Ausdruck nach x, ſo ergiebt ſich

$$\frac{\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}\sin\alpha}{2\frac{dy^2}{dx^2}}$$

Der Nenner dieſes letzten Ausdrucks, gleich Null oder gleich ∞ geſetzt, giebt $\frac{dy}{dx}=0$, oder $\frac{dy}{dx}=\infty$, aber hierdurch iſt kein Maximum oder Minimum der Dreiecke beſtimmt, weil alsdann die Tangente der Abſciſſenachſe oder der Ordinatenachſe, d. i. einer der gegebenen Geraden, parallel iſt. Der erſte Factor des Zählers, gleich Null geſetzt, giebt $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$, wodurch ſich die Gleichung der Tangente in $u-y=\frac{y}{x}(t-x)$ oder $u=\frac{y}{x}t$ verwandelt; dieſe Tangente ginge alſo durch den Anfangspunkt der Coordinaten und würde alſo mit den gegebenen Geraden ebenfalls kein Dreieck bilden. Der zweite Factor des Zählers, gleich Null geſetzt, giebt $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$, wodurch die Gleichung der Tangente in $u-y=-\frac{y}{x}(t-x)$ oder in

$$\frac{u}{2y}+\frac{t}{2x}=1$$

übergeht. Diese Tangente schneidet die Coordinatenachsen demnach in den Entfernungen 2x und 2y vom Anfangspunkte der Coordinaten, und da x, y die Coordinaten des Berührungspunktes sind, so ergiebt sich, daß dieser letztere Punkt der Halbirungspunkt des, zwischen den gegebenen Geraden liegenden Stückes der Tangente ist (§. 5. F. 6.). Um diesen Punkt zu finden, braucht man nur aus der Gleichung $F(x, y) = 0$ und aus ihrer Differentialgleichung, nachdem man darin $-\frac{y}{x}$ für $\frac{dy}{dx}$ gesetzt hat, x und y zu entwickeln. §. 104.

Was den dritten Factor des Zählers betrifft, so deutet die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ im Allgemeinen auf einen ausgezeichneten Punkt der gegebenen Curve, in welchem ein Uebergang der Concavität zur Convexität Statt findet. Ob die Tangente in einem solchen Punkte ein Maximum oder Minimum giebt, muß in jedem einzelnen Falle besonders untersucht werden.

Wenn die gegebene Curve eine Hyperbel und die beiden Geraden ihre Asymptoten sind, so existirt kein Maximum oder Minimum, was sich aus §. 33. (Aufg. 53.) oder §. 95. (Aufg. 156.) ergiebt, oder auch gefunden würde, wenn man in der Differentialgleichung der auf ihre Asymptoten bezogenen Hyperbel (§. 29. G. 26)

$$xy = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

$-\frac{y}{x}$ für $\frac{dy}{dx}$ setzte, wodurch man die identische Gleichung $-x\frac{y}{x} + y = 0$ erhalten würde.

Aufgabe [175]. Auf einer gegebenen Curve denjenigen Punkt zu bestimmen, der so liegt, daß das Stück der Tangente in diesem Punkte, welches von zwei andern ebenfalls gegebenen Curven begrenzt wird, ein Maximum oder Minimum sey.

Es seyen

$F(x, y) = 0$, (3) ; $\varphi(x', y') = 0$, (4) ; $\psi(x'', y'') = 0$, (5)

die auf dieselben rechtwinkligen Achsen bezogenen Gleichungen der drei gegebenen Curven. Die Gleichung der Tangente in einem Punkte xy der ersten Curve ist

$$u - y = \frac{dy}{dx}(t - x) , \qquad (T)$$

§. 104. wenn wir die laufenden Coordinaten derselben durch t u. u bezeichnen; und wenn x', y' und x'', y'' die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Tangente mit den beiden andern Curven bedeuten, so haben wir, weil diese Coordinaten die Gleichung der Tangente befriedigen müssen,

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x)\,,\quad (6)\quad ;\quad y''-y=\frac{dy}{dx}(x''-x)\,.\quad (7)$$

Die Länge des zwischen den Punkten $x'y'$ und $x''y''$ enthaltenen Stückes der Tangente ist aber

$$\sqrt{(y'-y'')^2+(x'-x'')^2}\,;$$

und wenn wir diesen Ausdruck nach x differentiiren, indem wir, in Folge der fünf Gleichungen (3 bis 7), y', x', y'', x'' und y als Functionen dieser Größe betrachten, und das Resultat gleich Null setzen, so ergiebt sich

$$\left\{(y'-y'')\frac{dy'}{dx'}+(x'-x'')\right\}\frac{dx'}{dx}-\left\{(y'-y'')\frac{dy'}{dx''}+(x'-x'')\right\}\frac{dx''}{dx}=0\,.$$

Differentiiren wir auch die Gleichungen (6) und (7) aus demselben Gesichtspunkte, so ergiebt sich

$$\left(\frac{dy'}{dx'}-\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx'}{dx}-(x'-x)\frac{d^2y}{dx^2}=0\;;\quad \left(\frac{dy''}{dx''}-\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx''}{dx}-(x''-x)\frac{d^2y}{dx^2}=0\;;$$

und, wenn wir die Ausdrücke von $\frac{dx'}{dx}$, $\frac{dx''}{dx}$, welche wir aus diesen Gleichungen erhalten, in die vorige Gleichung substituiren,

$$\frac{\left\{(y'-y'')\frac{dy'}{dx'}+(x'-x'')\right\}(x'-x)\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy'}{dx'}-\frac{dy}{dx}}=\frac{\left\{(y'-y'')\frac{dy''}{dx''}+(x'-x'')\right\}(x''-x)\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy''}{dx''}-\frac{dy}{dx}}\,.\quad (8)$$

Die sechs Gleichungen (3 bis 8) reichen im Allgemeinen hin, die sechs Größen y', x', y'', x'', y und x zu bestimmen, wodurch sodann die Aufgabe gelöst ist. Wir bemerken hierbei noch Folgendes. Die Gleichung (8) wird durch $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ befriedigt; es kann daher, wenn die Curve einen ausgezeichneten Punkt hat, für welchen $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ wird, dieser Punkt einer der gesuchten seyn; ob dies wirklich der Fall ist, muß jedesmal besonders untersucht werden. Dividiren wir die Gleichung (8) durch $\frac{d^2y}{dx^2}$ und setzen, zu-

folge der Gleichungen (6 u. 7), $\frac{y-y''}{x-x''}$ in den ersten Theil und $\frac{y-y'}{x-x'}$ §. 104.

in den zweiten Theil an die Stelle von $\frac{dy}{dx}$, so erhalten wir

$$\frac{(y-y'')-\frac{dy'}{dx'}(x-x'')}{(y'-y'')\frac{dy'}{dx'}+(x'-x'')} = \frac{(y-y')-\frac{dy''}{dx''}(x-x')}{(y'-y'')\frac{dy''}{dx''}+(x'-x'')} . \qquad (U)$$

Sehen wir x', y', x'' u. y'' als constante Größen und x u. y als laufende Coordinaten an, so drückt die letzte Gleichung eine gerade Linie aus; der Berührungspunkt xy der in Rede stehenden größten oder kleinsten Tangente ist also der Durchschnittspunkt der beiden Geraden (T u. U), von welchen die erstere jene Tangente selbst ist und die letztere auf folgende Weise bestimmt werden kann. Da die Gleichung (U) befriedigt wird, wenn wir zu gleicher Zeit

$$(y-y'')-\frac{dy'}{dx'}(x-x'') = 0 \quad \text{und} \quad (y-y')-\frac{dy''}{dx''}(x-x') = 0 \qquad (9)$$

setzen, so folgt, daß die Gerade (U) durch den Durchschnitt der beiden Linien geht, welche durch diese letzten Gleichungen ausgedrückt werden. Diese aber sind offenbar zwei Gerade, welche respective durch die Punkte x''y'' und x'y' gehen, und die respective den Tangenten in den Punkten x'y' und x''y'' der Curven (4 u. 5) parallel sind. Bringen wir die Gleichung (U) auf die Form

$$(y'-y'')\left\{y-\frac{\left(y'\frac{dy'}{dx'}-y''\frac{dy''}{dx''}\right)+(x''-x')\frac{dy'}{dx'}\frac{dy''}{dx''}}{\frac{dy'}{dx'}-\frac{dy''}{dx''}}\right\}+(x'-x'')\left\{x-\frac{(y'-y'')+\left(x'\frac{dy'}{dx'}-x''\frac{dy''}{dx''}\right)}{\frac{dy'}{dx'}-\frac{dy''}{dx''}}\right\}=0$$

und vergleichen sie mit

$$(x'-x'')(u-y') = (y'-y'')(t-x') ,$$

durch welche Gleichung wir die Verbindungslinie der Punkte x'y' und x''y'', oder, was dasselbe ist, die Tangente im Punkte xy der Curve (3) ausdrükken können, so ergiebt sich, daß jene Gerade (U) auf dieser Tangente senkrecht steht. Der Berührungspunkt xy fällt demnach mit dem Fußpunkte des Perpendikels zusammen, der von dem Durchschnitte der Geraden (9) auf die Verbindungslinie der Punkte x'y' und x''y'' gefällt wird. Da nun die Geraden (9) mit den Tangenten in den Punkten x'y' und x''y'' ein Paral-

§. 104. lelogramm bilden, von welchem die Verbindungslinie der Punkte x'y' und x"y" eine Diagonale ist, so können wir das eben gefundene Resultat folgendermaßen ausdrücken.

Unter allen Tangenten einer gegebenen Curve C hat diejenige, auf welcher von zwei andern gegebenen Curven C', C" das größte oder kleinste Stück abgeschnitten wird, eine solche Lage, daß der Berührungspunkt der Curve C und der Fußpunkt des Perpendikels, welcher von dem Durchschnitte der Tangenten an den Curven C', C" in den Endpunkten des genannten Stückes auf jene erste Tangente herabgelassen wird, zwei, in Beziehung auf den Halbirungspunkt jenes Stückes, symmetrisch liegende Punkte sind.

Daß in besondern Fällen kein Maximum oder Minimum existire, braucht nicht weiter erwähnt zu werden. Ein Beispiel eines solchen Falles ist in §. 95. (Aufg. 157.) enthalten.

§. 105.

Aufgabe [176]. Es sey

$$\frac{y^n}{\beta^n}+\frac{x^n}{\alpha^n}=1 \qquad (1)$$

die auf rechtwinklige oder schiefwinklige Achsen bezogene Gleichung einer Curve, in welcher α, β zwei willkürliche, durch die Gleichung

$$\frac{\beta^m}{b^m}+\frac{\alpha^m}{a^m}=1 \qquad (2)$$

mit einander verbundene, Constanten sind, wo aber a, b gegebene Constanten bezeichnen. Es soll die einhüllende Curve aller dieser Curven (1) gefunden werden.

Wir eliminiren β zwischen (1) und (2), indem wir diese Gleichungen auf die Form

$$\frac{y^n}{\beta^n}=1-\frac{x^n}{\alpha^n} \quad ; \quad \frac{\beta^m}{b^m}=1-\frac{\alpha^m}{a^m}$$

bringen, sodann die erste zur mten und die zweite zur nten Potenz erheben, und die einzelnen Theile der resultirenden Gleichungen in einander multipliciren; dies giebt

$$\frac{y^{mn}}{b^{mn}}=\left(1-\frac{x^n}{\alpha^n}\right)^m\cdot\left(1-\frac{\alpha^m}{a^m}\right)^n. \qquad (3)$$

Wir differentiiren dieſe Gleichung nach α, und erhalten §. 105.

$$\left(1-\frac{\alpha^m}{a^m}\right)^n.\left(1-\frac{x^n}{\alpha^n}\right)^{m-1}.\frac{x^n}{\alpha^{n+1}}=\left(1-\frac{x^n}{\alpha^n}\right)^m.\left(1-\frac{\alpha^m}{a^m}\right)^{n-1}.\frac{\alpha^{m-1}}{a^m},$$

eine Gleichung, die ſich von ſelbſt auf

$$\frac{x^n}{\alpha^n}=\frac{\alpha^m}{a^m}$$

reducirt, woraus wir

$$\alpha=a^{\frac{m}{m+n}}.x^{\frac{n}{m+n}}$$

finden. Setzen wir dieſen Ausdruck in (3), ſo ergiebt ſich

$$\frac{y^{mn}}{b^{mn}}=\left(1-\frac{x^{\frac{mn}{m+n}}}{a^{\frac{mn}{m+n}}}\right)^{m+n},$$

oder

$$\frac{y^{\frac{mn}{m+n}}}{b^{\frac{mn}{m+n}}}\pm\frac{x^{\frac{mn}{m+n}}}{a^{\frac{mn}{m+n}}}=\pm 1, \qquad (4)$$

wo die doppelten Vorzeichen nur dann zu nehmen ſind, wenn $m+n$ eine gerade Zahl iſt. Setzen wir $\frac{mn}{m+n}=p$, ſo haben wir ſtatt (4)

$$\frac{y^p}{b^p}+\frac{x^p}{a^p}=1 \qquad (5)$$

als Gleichung der geſuchten Curve.

Weil $\frac{mn}{m+n}=p$, ſo iſt $\frac{m+n}{mn}=\frac{1}{p}$ oder $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{p}$, und es geben alſo auch alle andern Curven, deren Gleichungen die Form (1) haben, dieſelbe einhüllende Curve, wenn nur in der Gleichung (2) a und b dieſelben Werthe behalten, und die Summe der reciproken Werthe der Exponenten m und n, das iſt, wenn $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ dieſelbe Größe iſt.

Wenn $m+n=0$ iſt, wenn alſo die Gleichungen (1) und (2)

$$\frac{y^n}{\beta^n}+\frac{x^n}{\alpha^n}=1 \quad \text{und} \quad \frac{b^n}{\beta^n}+\frac{a^n}{\alpha^n}=1 \qquad (6)$$

§. 105. sind, so ist in der Gleichung (5) das $p = \infty$, und dann drückt sie keine Curve aus. An die Stelle der einhüllenden Curve tritt alsdann ein Punkt, dessen Coordinaten a u. b sind. Dies folgt daraus, daß die obige Gleichung $\frac{x^n}{\alpha^n} = \frac{\alpha^m}{a^m}$, aus welcher wir α durch x ausdrückten, in $\frac{x^n}{\alpha^n} = \frac{a^n}{\alpha^n}$ übergeht und $x = a$ giebt; und daß sich die Gleichung (3) dann auf $\frac{y}{b} = 1$ reducirt. Wenn n außerdem eine gerade Zahl ist, so treten vier Punkte an die Stelle der einhüllenden Curve, deren Coordinaten $\pm a$ u. $\pm b$ sind.

Der Raum gestattet uns nicht, die verschiedenen Folgerungen, die sich aus diesen Ergebnissen noch herleiten lassen, hier aufzuführen. Wir wollen nur noch bemerken, daß, wenn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ ist, alle Curven (1) eine gemeinschaftliche Tangente haben. Ist z. B. $m = n = 2$, so ist die einhüllende Curve das System von vier geraden Linien und ihre Gleichung

$$\frac{y}{b} \pm \frac{x}{a} = \pm 1 .$$

Hierauf läßt sich eine Lösung der Aufgabe gründen, in welcher verlangt wird, eine Ellipse in ein gegebenes Parallelogramm einzuschreiben, so daß das Verhältniß oder das Product ihrer Achsen eine gegebene Größe habe. Ferner können wir noch anmerken, daß für $m = 2$ und $n = 1$ oder für $m = 1$ und $n = 2$, $p = \frac{2}{3}$ ist, daß also die einhüllende Curve die Evolute einer Ellipse oder Hyperbel wird, je nachdem a und b von gleichen oder entgegengesetzten Zeichen sind (§. 88. S. 2, 4), und daß endlich, wenn $a = b$, die einhüllende Curve die im §. 95. (S. 19.) aufgesuchte ist.

Dritte Abtheilung.

Die Quadratur der Curven.

§. 106.

Aufgabe [177]. *Die Gleichung einer Curve in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten ist gegeben. Es soll der Inhalt der Fläche gefunden werden, welche von der Abscissenachse, zweien auf derselben Seite dieser Achse errichteten Ordinaten und dem zwischen diesen Ordinaten enthaltenen Bogen der Curve begrenzt wird.*

Es sey MN die gegebene Curve, Bb, Gg die beiden Ordinaten und BG der zwischen ihnen enthaltene Bogen der Curve, die Abscisse $Ab = a_1$ und $Ag = a_2$. Wir errichten in irgend einem Punkte c der Abscissenachse, dessen Abscisse $Ac = x$ sey, eine Ordinate $Cc = y$ und nennen den Inhalt des Flächenstückes BbcC S, so ist offenbar S eine Function von x, die wir durch φx bezeichnen wollen. Nehmen wir einen dem Punkte C nahe liegenden Punkt C′ auf der Curve und ziehen die Ordinate C′c′, so ist, wenn wir cc′ durch h bezeichnen, $Bbc'C' = \varphi(x+h)$; also Fig. 68.

$$Bbc'C' - BbcC = cc'C'C = \varphi(x+h) - \varphi(x) .$$

Für ein gehörig kleines h und für alle kleinern Werthe von h, ist aber der Bogen CC′ durchaus convex oder durchaus concav gegen die Abscissenachse, und die Ordinaten nehmen von Cc bis C′c′ fortwährend zu oder fortwährend ab. Daher ist, für ein solches h, das Flächenstück $cc'C'C > cc'D'C$ und $cc'C'C < cc'C'D$, oder, da Parallelogramm $cc'D'C = \overline{Cc}.\overline{cc'}.\sin\alpha = yh\sin\alpha$ und Parallelogramm $cc'C'D = \overline{C'c'}.\overline{cc'}.\sin\alpha = y'h\sin\alpha$, wenn wir nämlich C′c′ durch y′ und den Coordinatenwinkel durch α bezeichnen,

$$yh\sin\alpha < \varphi(x+h) - \varphi(x) ,$$
$$y'h\sin\alpha > \varphi(x+h) - \varphi(x) .$$

Da nun nach dem Taylor'schen Satze,

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \frac{dS}{dx}h + \tfrac{1}{2}\frac{d^2S}{dh^2}h^2 + \text{etc.} ,$$

§. 106. Wir haben

$$\int y dx = \int (1-x^2) dx = x - \tfrac{1}{3}x^3 ,$$

und da im gegenwärtigen Falle $a_1 = 0$, $a_2 = a$ ist, für den gesuchten Flächeninhalt

$$\int_0^a y dx = (1 - \tfrac{1}{3}a^2)a .$$

Fig. 69. Diese Formel drückt, wenn Aa = a ist, das Flächenstück AabB vollständig aus. Will man das Flächenstück AcB ausdrücken, so muß man die Länge von Ac für a setzen. Nun ist, im Punkte c, $y = 0$, und für $y = 0$, in Folge der gegebenen Gleichung, $x = \pm 1$, also die Länge von $Ac = 1$; somit ist das Flächenstück $AcB = \frac{2}{3}$. Will man aber das Flächenstück $ABc\beta\alpha c$ bestimmen, und ist z. B. $A\alpha = 2$, so darf man in den obigen Ausdruck nicht $a = 2$ setzen, — dies würde für den zu suchenden Flächeninhalt $-\frac{2}{3}$ geben —, sondern man muß den Inhalt von $c\beta\alpha$ berechnen und ihn zu dem gefundenen Inhalt von AcB ohne Rücksicht auf das Vorzeichen hinzufügen. Wir haben aber

$$c\beta\alpha = \int_1^2 (1-x^2) dx = \{2 - \tfrac{8}{3}\} - \{1 - \tfrac{1}{3}\} = -\tfrac{4}{3} ,$$

und daher

$$ABc\beta\alpha c = \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3} = 2 .$$

§. 107.

Fig. 30. **Aufgabe** [178]. **Den Inhalt des Flächenstücks zu finden, welches von der durch die Gleichung**

$$20000y = x^4 - 251x^3 + 20170x^2 - 566400x + 3888000$$

(§. 56. G. 3) ausgedrückten Curve, von dem Punkte S bis zum Punkte S‴ genommen, und von der Abscissenachse begrenzt ist.

Wir haben hier

$$\int y dx = \tfrac{1}{20000}\{\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{251}{4}x^4 + \tfrac{20170}{3}x^3 - 283200x^2 + 3888000x\} .$$

Da x für die Punkte, in welchen die Curve die Abscissenachse schneidet, die Werthe 10 ; 40 ; 81 ; 120 hat, so müssen wir das gefundene Integral von 10 bis 40; von 40 bis 81 und von 81 bis 120 nehmen. Führen wir die Rechnung aus, so ergeben sich diese drei bestimmten Integrale respective gleich −1207,125; +1677,480; −2744,146; und zählen wir diese Werthe ohne Rücksicht auf ihre Vorzeichen zusammen, so haben wir den gesuchten Flächeninhalt gleich

5628,751 .

Aufgabe [179]. Den Flächeninhalt eines Parabelstückes zu finden, welches von einem Bogen dieser Curve und seiner Sehne begrenzt wird. §. 107.

Es sey die Tangente im Scheitel der Parabel die Abscissenachse, und die Achse der Curve die Ordinatenachse, also

$$py = x^2$$

die Gleichung der Parabel. Ferner seyen x_1, y_1 und x_2, y_2 die Coordinaten der Endpunkte des Bogens. Nun ist

$$\int y\,dx = \int \frac{1}{p} x^2\,dx = \frac{x^3}{3p} + C\,, \qquad (1)$$

daher

$$\int_0^{x_2} y\,dx = \frac{x_2^3}{3p}\,, \qquad (2)$$

und weil $x_2^2 = py_2$,

$$\int_0^{x_2} y\,dx = \frac{x_2 y_2}{3}\,. \qquad (3)$$

Der Flächeninhalt von $AP_1P_2N_2$ ist daher gleich $\frac{1}{3}.AM_2P_2N_2$, also Fig. 70.
$AP_1P_2M_2 = \frac{2}{3}.AM_2P_2N_2$. Folglich Segment $AP_1P_2 = \Delta AP_2N_2 - AP_1P_2N_2 = \frac{1}{2}AM_2P_2N_2 - \frac{1}{3}AM_2P_2N_2 = \frac{1}{6}AM_2P_2N_2$.

Wenn also ein Endpunkt des Bogens in dem Durchschnitte der Achse mit der Parabel (dem Scheitel) liegt, so ist das Segment dem sechsten Theile des Rechtecks gleich, welches unter der Abscisse und Ordinate des andern Endpunktes enthalten ist.

Wenn keiner der beiden Endpunkte des Bogens im Scheitel der Parabel liegt, so findet sich, indem man die Tangente in einem dieser Endpunkte zur Abscissenachse und den durch denselben Punkt gehenden Durchmesser zur Ordinatenachse nimmt, ganz auf dieselbe Weise, daß das Segment dem sechsten Theile des Parallelogramms gleich ist, welches unter der Abscisse und Ordinate des andern Endpunktes enthalten.

Es läßt sich aber auch der Inhalt des Segments noch auf andere Weise ausdrücken. Wir finden nämlich aus (1) den Flächeninhalt

$$N_1P_1QP_2N_2 = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \frac{x_2^3 - x_1^3}{3p} = \frac{(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)(x_2 - x_1)}{3p}\,,$$

und wenn wir diesen von dem Trapez $N_1P_1P_2N_2 = \frac{(y_2 + y_1)(x_2 - x_1)}{2}$

§. 107. Fig. 70. $= \frac{(x_2^2+x_1^2)(x_2-x_1)}{2p}$ abziehen,

$$\text{Segment } P_1QP_2 = \frac{1}{6p}(x_2-x_1)^3 . \qquad (4)$$

Dieſer Ausdruck zeigt uns, daß, wenn die Differenz der Abſciſſen, nämlich x_2-x_1, conſtant iſt, auch das Segment eine unveränderliche Größe hat, die Abſciſſen x_1, x_2 ſelbſt ſeyen welche man will.

Wir können dieſe Aufgabe nicht verlaſſen, ohne noch einige Folgerungen zu machen, die ſich aus dem Ausdruck (4) unmittelbar ergeben.

Stellen wir uns ein Polygon von irgend einer Anzahl Seiten vor, welches in einer Parabel eingeſchrieben iſt. Es ſeyen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ die Abſciſſe der Eckpunkte, wie ſie der Größe nach auf einander folgen; es ſeyen $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ dieſe Eckpunkte, und $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$ die Segmente auf den Sehnen $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \ldots P_nP_1$. Alsdann haben wir nach (4)

$$\begin{aligned} x_2-x_1 &= (6p)^{\frac{1}{3}}s_1^{\frac{1}{3}} \\ x_3-x_2 &= (6p)^{\frac{1}{3}}s_2^{\frac{1}{3}} \\ x_4-x_3 &= (6p)^{\frac{1}{3}}s_3^{\frac{1}{3}} \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n-x_{n-1} &= (6p)^{\frac{1}{3}}s_{n-1}^{\frac{1}{3}} , \end{aligned}$$

und durch Addition

$$x_n-x_1 = (6p)^{\frac{1}{3}}\{s_1^{\frac{1}{3}}+s_2^{\frac{1}{3}}+s_3^{\frac{1}{3}}+\ldots+s_{n-1}^{\frac{1}{3}}\} .$$

Ferner aber

$$x_n-x_1 = (6p)^{\frac{1}{3}}s_n^{\frac{1}{3}} ;$$

alſo

$$s_n^{\frac{1}{3}} = s_1^{\frac{1}{3}}+s_2^{\frac{1}{3}}+s_3^{\frac{1}{3}}+\ldots+s_{n-1}^{\frac{1}{3}} , \qquad (5)$$

d. i. die Cubikwurzel des Segments auf der größten Seite eines in einer Parabel eingeſchriebenen Polygons iſt der Summe der Cubikwurzeln der Segmente auf den übrigen Seiten gleich.

Nehmen wir nun an, daß die Differenz je zweier auf einander folgender Abſciſſen conſtant, daß alſo $x_2-x_1 = x_3-x_2 = \ldots = x_n-x_{n-1}$ iſt, ſo haben wir auch $s_1 = s_2 = s_3 = \ldots = s_{n-1}$; alſo nach (5)

$$s_n^{\frac{1}{3}} = (n-1)s_1^{\frac{1}{3}} \quad \text{oder} \quad s_n = (n-1)^3 s_1 .$$

Es

Es besteht aber das Segment s_n offenbar aus dem eingeschriebenen Poly- §. 107.
gone, das wir P nennen wollen, und aus der Summe aller übrigen Segmente, so daß

$$s_n = P + (n-1)s_1$$

ist. Multipliciren wir diese Gleichung mit $(n-1)^2$, und ziehen die vorher gefundene von dem Producte ab, so bleibt

$$\{(n-1)^2 - 1\} s_n = (n-1)^2 P$$

oder

$$s_n = \frac{(n-1)^2}{(n-1)^2-1} . P ,$$

und hierin ist der folgende Satz enthalten:

Wenn man eine Sehne einer Parabel in m gleiche Theile theilt, und durch die Theilungspunkte m Gerade der Achse parallel zieht, so bestimmen die Durchschnitte dieser Geraden mit der Curve und die Endpunkte der Sehne ein Polygon P von $(m+1)$ Seiten, welches mit dem Segment S auf der Sehne in der Relation

$$S = \frac{m^2}{m^2-1} P$$

stehet.

Für $m = 2$ ist P ein Dreieck und $S = \frac{4}{3}P$, welches der bekannte, schon von Archimed gefundene, Satz ist.

§. 108.

Wenn $(m+1)$ Punkte einer paraboliſchen Linie mten Grades gegeben sind, so ist diese Curve völlig bestimmt (§. 56.); es ist daher auch das Flächenstück, welches von der Abscissenachse, den Ordinaten des ersten und letzten jener Punkte und von der Curve begrenzt wird, ebenfalls durch diese Punkte bestimmt. Wir wollen, der Einfachheit wegen, annehmen, die $(m+1)$ Punkte der Curve haben eine solche Lage, daß ihre Ordinaten gleich weit von einander entfernt sind; dann stellt sich uns die

Aufgabe [180]. Den Inhalt des Flächenstücks, welches von einer paraboliſchen Curve mten Grades, zweien Ordinaten und der Abscissenachse eingeschlossen wird, vermittelst dieser beiden Ordinaten und $(m-1)$ dazwischen liegender, gleich weit von einander entfernter Ordinaten der Curve auszudrücken.

§. 108. Wir werden annehmen, daß die Coordinaten rechtwinklig seyen, und die beiden Grenzordinaten durch y_0, y_m, die zugehörigen Abscissen aber durch x_0, x_0+h bezeichnen. Ferner wollen wir, der Kürze wegen, die Werthe, welche $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. für $x = x_0$ bekommen, durch p, q, r, etc. bezeichnen.

I. Es sey $m = 2$, so ist die Curve eine Linie zweiten Grades, und wir haben überhaupt 3 Ordinaten y_0, y_1, y_2, denen die Abscissen x_0, $x_0+\frac{1}{2}h$, x_0+h entsprechen. Es sind ferner, da y eine ganze rationale Function zweiten Grades ist, r und alle folgenden Differentialcoefficienten gleich Null. Daher haben wir

$$y_0 = y_0,$$
$$y_1 = y_0+p\frac{h}{2}+\tfrac{1}{2}q\frac{h^2}{4},$$
$$y_2 = y_0+ph+\tfrac{1}{2}qh^2.$$

Setzen wir nun den gesuchten Flächeninhalt

$$S = Ay_0+By_1+Cy_2,$$

wo A, B u. C noch zu bestimmende Coefficienten bedeuten, so erhalten wir durch Substitution der so eben angegebenen Ausdrücke

$$S = \left.\begin{matrix} A \\ +B \\ +C \end{matrix}\right\} y_0 \left.\begin{matrix} +\frac{1}{2}B \\ +C \end{matrix}\right\} ph \left.\begin{matrix} +\frac{1}{8}B \\ +\frac{1}{2}C \end{matrix}\right\} qh^2.$$

Andererseits ist $S = \int_{x_0}^{x_0+h} y\,dx$ und, nach einem bekannten Satze,

$$\int_{x_0}^{x_0+h} y\,dx = y_0h+\tfrac{1}{2}ph^2+\frac{1}{2.3}qh^3.$$

Setzen wir die Coefficienten von y_0, p und q in beiden Ausdrücken einander gleich, so kommt

$$A+B+C = h,$$
$$B+2C = h,$$
$$B+4C = \tfrac{4}{3}h.$$

Aus diesen Gleichungen finden wir leicht $C = \frac{1}{6}h$, $B = \frac{2}{3}h$, $A = \frac{1}{6}h$, und folglich ist

$$S = \tfrac{1}{6}h\{y_0+4y_1+y_2\}.$$

II. Es sey $m = 3$, also die Curve eine Linie dritten Grades. Wir

haben nun, auf ähnliche Weise wie in I., §. 108.

$$y_0 = y_0 ,$$
$$y_1 = y_0 + p\frac{h}{3} + \tfrac{1}{2}q\frac{h^2}{9} + \frac{1}{2.3}r\frac{h^3}{27} ,$$
$$y_2 = y_0 + p\frac{2h}{3} + \tfrac{1}{2}q\frac{4h^2}{9} + \frac{1}{2.3}r\frac{8h^3}{27} ,$$
$$y_3 = y_0 + p\,h + \tfrac{1}{2}q\,h^2 + \frac{1}{2.3}r\,h^3 ,$$

und wenn wir

$$S = Ay_0 + By_1 + Cy_2 + Dy_3$$

setzen, nach derselben Art wie oben, die Gleichungen

$$A + B + C + D = h ,$$
$$B + 2C + 3D = \tfrac{3}{2}h ,$$
$$B + 4C + 9D = 3h ,$$
$$B + 8C + 27D = \tfrac{27}{4}h ,$$

und aus diesen, durch successive Subtraction, nach einander

$$D = \tfrac{1}{6}h , \quad C = \tfrac{3}{6}h , \quad B = \tfrac{3}{6}h , \quad A = \tfrac{1}{6}h ,$$

und somit

$$S = \frac{h}{8}\{y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\} .$$

III. Auf diese Weise können wir fortfahren, die Ausdrücke von S für größere Werthe von m aufzusuchen. Wir setzen die Resultate der Berechnungen bis zu m = 9 hierher, indem wir durch $S_2, S_3, \ldots S_9$ die Ausdrücke bezeichnen, welche mit h multiplicirt, die Flächenstücke unter den paraboli-schen Linien 2ten, 3ten, ...9ten Grades geben:

$$6S_2 = (y_0+y_2) + 4y_1$$
$$8S_3 = (y_0+y_3) + 3(y_1+y_2)$$
$$90S_4 = 7(y_0+y_4) + 32(y_1+y_3) + 12y_2$$
$$288S_5 = 19(y_0+y_5) + 75(y_1+y_4) + 50(y_2+y_3)$$
$$840S_6 = 41(y_0+y_6) + 216(y_1+y_5) + 27(y_2+y_4) + 272y_3$$
$$17280S_7 = 751(y_0+y_7) + 3577(y_1+y_6) + 1323(y_2+y_5) + 2989(y_3+y_4)$$
$$28350S_8 = 989(y_0+y_8) + 5888(y_1+y_7) - 928(y_2+y_6) + 10496(y_3+y_5) - 4540y_4$$
$$89600S_9 = 2857(y_0+y_9) + 15741(y_1+y_8) + 1080(y_2+y_7) + 19344(y_3+y_6) + 5778(y_4+y_5).$$

Diese Formeln dürfen, wie die allgemeine Formel der Quadratur (§. 106. F. 5.) nur dann angewendet werden, wenn die Curve die Ab-

§. 108. sciſſenachſe nicht innerhalb der Grenzen von $x = x_0$ bis $x = x_0 + h$ ſchneidet.

§. 109.

Das Flächenſtück, welches von dem Bogen einer paraboliſchen Linie ungeraden Grades, den Ordinaten ſeiner Endpunkte und der Abſciſſenachſe begrenzt wird, kann aber auch durch halb ſo viel Ordinaten als wir im vorigen Paragraphen angegeben haben, ausgedrückt werden, wenn dieſe Ordinaten gehörig ausgewählt ſind. Wenn nämlich die paraboliſche Linie vom $(2m+1)$ten Grade iſt, und h den Abſtand der beiden Grenz-Ordinaten bezeichnet, ſo giebt es $(m+1)$ Punkte auf dem genannten Bogen der Curve, die eine ſolche Lage haben, daß, wenn man ihre Ordinaten mit gewiſſen Zahlencoefficienten multiplicirt, das Product der Summe der auf dieſe Weiſe gebildeten Reihe in h dem Inhalte des genannten Flächenſtücks gleich iſt. Ehe wir zur Beſtimmung dieſer Punkte und der genannten Zahlencoefficienten ſchreiten, wollen wir auf eine ſich hieraus ergebende merkwürdige Eigenſchaft paraboliſcher Linien aufmerkſam machen. Da nämlich durch $(m+1)$ Punkte unzählig viele paraboliſche Linien $(2m+1)$ten Grades gelegt werden können, und die Abſciſſen der vorher genannten $(m+1)$ Punkte, ſo wie die Zahlencoefficienten der Ordinaten nur von den beiden Größen h u. m abhängen, wie ſich nachher zeigen wird; ſo folgt, daß, wenn man auf einer geraden Linie $(m+1)$ Punkte in gewiſſen Abſtänden (die von der Zahl m und der Länge h jener Geraden abhängen) beſtimmt, in dieſen Punkten Senkrechte errichtet und auf einer jeden derſelben einen Punkt beliebig annimmt, alle Bogen paraboliſcher Linien vom $(2m+1)$ten oder von einem niedrigern Grade, welche durch die zuletzt genannten Punkte gelegt werden können, mit der gegebenen Geraden und den beiden Ordinaten in ihren Endpunkten Flächenſtücke begrenzen, die immer denſelben Inhalt haben. Die paraboliſche Linie 1ſten Grades, d. i. die gerade Linie, mag als Beiſpiel dienen. Für ſie iſt $2m+1 = 1$, alſo $m = 0$ und $m+1 = 1$; es giebt demnach *einen* Punkt von der angegebenen Beſchaffenheit für gerade Linien; und in der That, errichtet man in dem Halbirungspunkt q einer gegebenen Grundlinie h eine Senkrechte, nimmt auf derſelben einen beliebigen Punkt p an, und legt durch p verſchiedene gerade Linien, ſo ſchließen dieſe Geraden, mit der Grundlinie h und den Senkrechten in den Endpunkten der letztern, Paralleltrapeze ein, deren Flächeninhalt gleich, nämlich $h.\overline{pq}$, iſt.

Wenn $m+1$ eine ungerade Zahl iſt, ſo ſteht eine von den genannten

(m+1) Ordinaten im Halbirungspunkte von h; wenn aber m+1 eine gerade Zahl ist, so findet dies nicht Statt. Die Abscissen von m jener Ordinaten sind, wenn der Halbirungspunkt von h zum Anfangspunkte genommen wird, zu zwei und zwei einander gleich und entgegengesetzt; die Zahlencoefficienten der gleich weit von diesem Halbirungspunkte entfernten Ordinaten aber sind gleich. Bezeichnen wir die Ordinate im Halbirungspunkte von h, den wir zum Anfangspunkte der Abscissen nehmen wollen, durch y_0 und zwei gleich weit vom Anfangspunkte entfernte Ordinaten durch y_k, y'_k, so ist der in Rede stehende Flächeninhalt §. 109.

$$S = h\{2\mu_0 y_0 + \mu_1(y_1 + y'_1) + \mu_2(y_2 + y'_2) + \text{etc.}\} , \qquad (1)$$

wo $2\mu_0$, μ_1, μ_2, etc. die genannten Zahlencoefficienten bedeuten, welche, so wie die Abscissen, die zu y_1, y_2, y_3 etc., y'_1, y'_2, y'_3 etc. gehören, und die wir durch $n_1 h$, $n_2 h$, $n_3 h$ etc., $-n_1 h$, $-n_2 h$, $-n_3 h$ etc. bezeichnen wollen, bestimmt werden müssen.

Aufgabe [181]. Die Zahlencoefficienten μ und n für parabolische Linien 3ten, 5ten und 7ten Grades zu bestimmen.

I. Die Gleichung einer parabolischen Linie dritten Grades ist

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 .$$

Daraus erhalten wir

$$\int y dx = a_0 x + \tfrac{1}{2} a_1 x^2 + \tfrac{1}{3} a_2 x^3 + \tfrac{1}{4} a_3 x^4 ,$$

und, weil der Anfangspunkt der Coordinaten im Halbirungspunkte von h liegt,

$$S = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} y dx = h\{a_0 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} a_2 h^2\} .$$

Im gegenwärtigen Falle haben wir $2m+1 = 3$, also $m = 1$ und $m+1 = 2$, so daß auch, nach (1),

$$S = h\{\mu_1(y_1 + y'_1)\} ,$$

wo μ_1 und die Abscissen $n_1 h$ u. $-n_1 h$ von y_1 und y'_1 zu bestimmen sind. Die Gleichung der Curve giebt uns, für die so eben genannten Abscissen,

$$y_1 = a_0 + a_1 n_1 h + a_2 n_1^2 h^2 + a_3 n_1^3 h^3 ,$$
$$y'_1 = a_0 - a_1 n_1 h + a_2 n_1^2 h^2 - a_3 n_1^3 h^3 ,$$

und die Substitution dieser Werthe in den letzten Ausdruck von S

$$S = 2\mu_1 h\{a_0 + a_2 n_1^2 h^2\} .$$

Soll nun, wie es die Aufgabe erheischt, dieser Ausdruck mit dem, durch

§. 109. Integration gefundenen, für jeden Werth von h, a_0, a_1, a_2 u. a_3 übereinstimmen, so muß

$$2\mu_1 = 1 \quad ; \quad 2\mu_1 n_1^2 = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2} \; ;$$

woraus wir

$$\mu_1 = \tfrac{1}{2} \quad ; \quad n_1 = \sqrt{\tfrac{1}{12}} = 0{,}288675134594$$

erhalten.

II. Die Gleichung einer paraboliſchen Linie fünften Grades iſt

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 \; .$$

Daraus erhalten wir

$$\int y\,dx = a_0 x + \tfrac{1}{2}a_1 x^2 + \tfrac{1}{3}a_2 x^3 + \tfrac{1}{4}a_3 x^4 + \tfrac{1}{5}a_4 x^5 + \tfrac{1}{6}a_5 x^6 \; ,$$

und ſomit

$$S = \int_{-h}^{+h} y\,dx = h\left\{a_0 + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}a_2 h^2 + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^4}a_4 h^4\right\} \; .$$

Im gegenwärtigen Falle iſt $2m+1 = 5$; alſo $m = 2$ und $m+1 = 3$; demnach

$$S = h\left\{2\mu_0 y_0 + \mu_1(y_1 + y'_1)\right\} \; ,$$

wo μ_0, μ_1 und die Abſciſſen $n_1 h$ und $-n_1 h$ von y_1 u. y'_1 zu beſtimmen ſind. Die Gleichung der Curve giebt, für die Abſciſſen $n_1 h$, 0 und $-n_1 h$,

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 n_1 h + a_2 n_1^2 h^2 + a_3 n_1^3 h^3 + a_4 n_1^4 h^4 + a_5 n_1^5 h^5 \; , \\ y_0 &= a_0 \; , \\ y'_1 &= a_0 - a_1 n_1 h + a_2 n_1^2 h^2 - a_3 n_1^3 h^3 + a_4 n_1^4 h^4 - a_5 n_1^5 h^5 \; , \end{aligned}$$

und die Subſtitution dieſer Werthe in den letzten Ausdruck von S

$$S = 2h\left\{(\mu_0 + \mu_1)a_0 + \mu_1 n_1^2 a_2 h^2 + \mu_1 n_1^4 a_4 h^4\right\} \; .$$

Soll dieſer Ausdruck mit dem durch Integration gefundenen identiſch ſeyn, ſo muß

$$2(\mu_0 + \mu_1) = 1 \quad ; \quad 2\mu_1 n_1^2 = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2} \quad ; \quad 2\mu_1 n_1^4 = \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^4} \; .$$

Dividiren wir die letzte Gleichung durch die vorletzte, ſo erhalten wir $n_1^2 = \frac{3}{20} = 0{,}15$; und vermittelſt dieſes Werthes aus der zweiten Gleichung $\mu_1 = \frac{5}{16}$; ſodann aus der erſten $\mu_0 = \frac{3}{8}$. Demnach iſt

$$\mu_0 = \tfrac{3}{8} \quad ; \quad \mu_1 = \tfrac{5}{16} \quad ; \quad n_1 = 0{,}3872983346207 \; .$$

III. Die Gleichung einer paraboliſchen Linie ſiebenten Grades iſt

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 \; .$$

Daraus erhalten wir §. 109.

$$\int y dx = a_0x + \tfrac{1}{2}a_1x^2 + \tfrac{1}{3}a_2x^3 + \tfrac{1}{4}a_3x^4 + \tfrac{1}{5}a_4x^5 + \tfrac{1}{6}a_5x^6 + \tfrac{1}{7}a_6x^7 + \tfrac{1}{8}a_7x^8 ,$$

und somit

$$S = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} y dx = h\left\{a_0 + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}a_2h^2 + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^4}a_4h^4 + \tfrac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^6}a_6h^6\right\} .$$

Im gegenwärtigen Falle ist $2m+1 = 7$; also $m = 3$ und $m+1 = 4$; demnach

$$S = h\{\mu_1(y_1 + y'_1) + \mu_2(y_2 + y'_2)\} ,$$

wo μ_1 u. μ_2 und die Abscissen n_1h, n_2h, $-n_1h$, $-n_2h$ von y_1, y_2, y'_1, y'_2, zu bestimmen sind. Die Gleichung der Curve giebt

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_0 + a_1n_1h + a_2n_1^2h^2 + a_3n_1^3h^3 + \ldots + a_7n_1^7h^7 ,\\
y'_1 &= a_0 - a_1n_1h + a_2n_1^2h^2 - a_3n_1^3h^3 + \ldots - a_7n_1^7h^7 ,\\
y_2 &= a_0 + a_1n_2h + a_2n_2^2h^2 + a_3n_2^3h^3 + \ldots + a_7n_2^7h^7 ,\\
y'_2 &= a_0 - a_1n_2h + a_2n_2^2h^2 - a_3n_2^3h^3 + \ldots - a_7n_2^7h^7 ;
\end{aligned}$$

und die Substitution dieser Ausdrücke in denjenigen von S

$$S = 2h\{(\mu_1+\mu_2)a_0 + (\mu_1n_1^2 + \mu_2n_2^2)a_2h^2 + (\mu_1n_1^4 + \mu_2n_2^4)a_4h^4 + (\mu_1n_1^6 + \mu_2n_2^6)a_6h^6\}.$$

Soll dieser Ausdruck mit dem durch Integration gefundenen identisch seyn, so muß

$$\left.\begin{aligned}
2(\mu_1 + \mu_2) &= 1\\
2(\mu_1n_1^2 + \mu_2n_2^2) &= \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}\\
2(\mu_1n_1^4 + \mu_2n_2^4) &= \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^4}\\
2(\mu_1n_1^6 + \mu_2n_2^6) &= \tfrac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^6}
\end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

seyn. Um nun aus diesen vier Gleichungen die vier Größen μ_1, μ_2, n_1 und n_2 zu entwickeln, verfahren wir folgendermaßen. Wir addiren die erste, zweite und dritte Gleichung, nachdem wir die erste mit A und die zweite mit B multiplicirt haben; addiren ferner die zweite, dritte und vierte Gleichung, nachdem wir die zweite mit A und die dritte mit B multiplicirt. Dies giebt uns

$$2(A + Bn_1^2 + n_1^4)\mu_1 + 2(A + Bn_2^2 + n_2^4)\mu_2 = A + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}B + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^4} ;$$

$$2(A + Bn_1^2 + n_1^4)n_1^2\mu_1 + 2(A + Bn_2^2 + n_2^4)n_2^2\mu_2 = \frac{1}{2^2}\left(\tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^2}B + \tfrac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^4}\right) ;$$

§. 109. und ſetzen wir jetzt

$$A+Bn_1^2+n_1^4=0 \quad ; \quad A+Bn_2^2+n_2^4=0 \; ; \qquad (\beta)$$

ſo reduciren ſich die beiden erhaltenen Gleichungen auf

$$A+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}B+\tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^4}=0 \quad ; \quad \tfrac{1}{3}A+\tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^2}B+\tfrac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^4}=0 \; ; \qquad (\gamma)$$

und μ_1, μ_2 ſind eliminirt. Statt nun A und B aus den Gleichungen (β) zu entwickeln, und ihre Werthe in die Gleichungen (γ) zu ſubſtituiren, können wir auch A und B aus den Gleichungen (γ) entwickeln und ihre Werthe in die Gleichungen (β) ſubſtituiren. Dieſe letzte Entwickelung giebt $A=\frac{3}{560}$ und $B=-\frac{3}{14}$; und durch Subſtitution dieſer Werthe in die Gleichungen (β) erhalten wir zwei übereinſtimmende Gleichungen, ſo daß wir für n_1^2 dieſelben beiden Werthe als für n_2^2 daraus ziehen. Nun kann aber n_2 nicht gleich n_1 ſeyn, weil dies, wie leicht einzuſehen, den Gleichungen (α) widerſpricht; es muß alſo, wenn einer der beiden Werthe für n_1^2 geſetzt wird, der andere für n_2^2 genommen werden. Die Gleichung in n_1 oder n_2 iſt, wenn wir die Zeiger weglaſſen,

$$n^4-\tfrac{3}{14}n^2+\tfrac{3}{560}=0 \; ,$$

und daraus ergiebt ſich

$$n^2=\tfrac{1}{28}(3\pm\sqrt{4{,}8})=\tfrac{1}{28}(3\pm 4\sqrt{0{,}3}) \; .$$

Wir haben demnach

$$n_1=0{,}430\,568\,155\,797$$
$$n_2=0{,}169\,990\,521\,792$$

und daraus finden wir, vermittelſt der beiden erſten Gleichungen (α)

$$\mu_1=0{,}173\,927\,422\,569$$
$$\mu_2=0{,}326\,072\,577\,431 \; .$$

Auf dieſelbe Weiſe, wie in der Löſung der letzten Aufgabe, könnte man für paraboliſche Linien von einem höhern Grade als dem ſiebenten die Abſciſſen n_1h, n_2h, n_3h etc. und die Coefficienten μ_0, μ_1, μ_2, μ_3 etc. beſtimmen. Man würde aber dabei nicht nur, um n zu beſtimmen, eine Gleichung von einem höhern Grade aufzulöſen haben, ſondern es würde auch daraus eine bedeutende Schwierigkeit entſtehen, daß die Näherungswerthe für n, die man durch Auflöſung jener numeriſchen Gleichung gefunden hätte, noch zur Beſtimmung von μ_0, μ_1, μ_2, u. ſ. w. gebraucht werden, und dazu, wenn auch nur eine geringe Genauigkeit gefordert wäre, auf ſehr viele

Decimalſtellen berechnet werden müßten. So z. B. würde man für $m = 6$, d. i. für eine paraboliſche Linie 13ten Grades, zwar nur eine viergliedrige Gleichung von der Form §. 109.

$$A + Bn^2 + Cn^4 + n^6 = 0 ,$$

wo A, B u. C beſtimmte Zahlen ſind, aufzulöſen haben, aber es wären, aus den drei für n^2 aufgefundenen Werthen, auch noch die Werthe von n^4, n^6, bis n^{12} zu bilden, um μ_0, μ_1 u. ſ. w. zu entwickeln. Da nun von den in Rede ſtehenden Formeln für die Quadratur paraboliſcher Linien eine nützliche Anwendung auf die aproximative Quadratur anderer Curven gemacht werden kann, ſo hat Hr. Gauß die in Rede ſtehenden Größen nach einer andern Methode berechnet *). Wir können nur die Reſultate dieſer Berechnung hier wiedergeben.

Wenn S, wie vorher, den Flächeninhalt bezeichnet, y_1, y_2, y_3, u. ſ. w. die den Abſciſſen $x + n_1 h$, $x + n_2 h$, $x + n_3 h$, u. ſ. w. entſprechende Ordinaten bedeuten, wo h der Unterſchied der Abſciſſen der Endpunkte des paraboliſchen Bogens iſt, ſo hat man:

$$S = h\{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \ldots + \alpha_{m+1} y_{m+1}\} ;$$

und es iſt:

I. Für $m = 1$, oder zwei Ordinaten

$n_1 = 0{,}211\,324\,865\,405\,187$
$n_2 = 0{,}788\,675\,134\,594\,813$
$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$.

II. Für $m = 2$, oder drei Ordinaten

$n_1 = 0{,}112\,701\,665\,379\,258$
$n_2 = 0{,}5$
$n_3 = 0{,}887\,298\,334\,620\,742$
$\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{5}{18}$
$\alpha_2 = \frac{4}{9}$.

III. Für $m = 3$, oder vier Ordinaten

$n_1 = 0{,}069\,431\,844\,202\,975$
$n_2 = 0{,}330\,009\,478\,207\,568$
$n_3 = 0{,}669\,990\,521\,792\,432$
$n_4 = 0{,}930\,568\,155\,797\,025$

*) Comment. societ. gotting. Vol. III. ad A. 1814—15 (1816).

§. 109. $\alpha_1 = \alpha_4 = 0{,}173927422568728$; $log\,\alpha_1 = 0{,}2403680612-1$
$\alpha_2 = \alpha_3 = 0{,}326072577431272$; $log\,\alpha_2 = 0{,}5133142764-1$.

IV. Für m = 4, oder fünf Ordinaten

$n_1 = 0{,}046910077030668$
$n_2 = 0{,}230765344947158$
$n_3 = 0{,}5$
$n_4 = 0{,}769234655052842$
$n_5 = 0{,}953089922969332$.
$\alpha_1 = \alpha_5 = 0{,}118463442528095$; $log\,\alpha_1 = 0{,}0735843490-1$
$\alpha_2 = \alpha_4 = 0{,}239314335249683$; $log\,\alpha_2 = 0{,}3789687142-1$
$\alpha_3 = \frac{64}{225} = 0{,}284444444444444$; $log\,\alpha_3 = 0{,}4539974559-1$

V. Für m = 5, oder sechs Ordinaten

$n_1 = 0{,}033765242898424$
$n_2 = 0{,}169395306766868$
$n_3 = 0{,}380690406958402$
$n_4 = 0{,}619309593041598$
$n_5 = 0{,}830604693233132$
$n_6 = 0{,}966234757101576$
$\alpha_1 = \alpha_6 = 0{,}085662246189585$; $log\,\alpha_1 = 0{,}9327894580-2$
$\alpha_2 = \alpha_5 = 0{,}180380786524069$; $log\,\alpha_2 = 0{,}2561902763-1$
$\alpha_3 = a_4 = 0{,}233956967286345$; $log\,\alpha_3 = 0{,}3691359831-1$

VI. Für m = 6, oder sieben Ordinaten

$n_1 = 0{,}025446043828620$
$n_2 = 0{,}129234407200303$
$n_3 = 0{,}297077424311302$
$n_4 = 0{,}5$
$n_5 = 0{,}702922575688698$
$n_6 = 0{,}870765592799697$
$n_7 = 0{,}974553956171380$
$\alpha_1 = \alpha_7 = 0{,}064742483084435$; $log\,\alpha_1 = 0{,}8111893529-2$
$\alpha_2 = \alpha_6 = 0{,}139852695744638$; $log\,\alpha_2 = 0{,}1456708421-1$
$\alpha_3 = \alpha_5 = 0{,}190915025252560$; $log\,\alpha_3 = 0{,}2808401093-1$
$\alpha_4 = \frac{256}{1225} = 0{,}208979591836735$; $log\,\alpha_4 = 0{,}3201038766-1$

Die Werthe von α in I., II. und III. stimmen, wie man sieht, mit den in der vorigen Aufgabe für μ gefundenen überein, und diejenigen von n ergeben

sich, wenn wir die in der Aufgabe gefundenen zu 0,5 addiren und von 0,5 §. 109.
subtrahiren, wie dies auch seyn muß.

§. 110.

Aufgabe [182]. Den Flächeninhalt eines elliptischen und eines hyperbolischen Sectors zu finden, wenn die Spitze im Mittelpunkte der Curve liegt.

I. Es sey

$$a^2y^2+b^2x^2-2ab^2x=0 \quad \text{oder} \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}$$

die Gleichung einer gegebenen Ellipse in rechtwinkligen Coordinaten, deren Anfangspunkt in einem Scheitel der größern Achse liegt.

Nun ist

$$\int y\,dx=\frac{b}{a}\int\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\left\{\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}arc\left(cos=\frac{a-x}{a}\right)\right\},$$

welches Integral für $x=0$ verschwindet und somit den Flächenraum A'PQ Fig. 23.
ausdrückt. Zählen wir den Inhalt des Dreiecks $CPQ=\frac{(a-x)y}{2}=\frac{b}{a}\cdot\frac{(a-x)}{2}\sqrt{2ax-x^2}$ hinzu, so erhalten wir den Inhalt des Sectors

$$A'CP=\frac{ab}{2}arc\left(cos=\frac{a-x}{a}\right),$$

oder auch, da $arc\left(cos=\frac{a-x}{a}\right)=arc\left(sin=\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a}\right)=arc\left(sin=\frac{y}{b}\right)$,

$$A'CP=\frac{ab}{2}arc\left(sin=\frac{y}{b}\right).$$

Setzen wir $x=a$ und $y=b$, so ergiebt sich der vierte Theil der Ellipse

$$A'CB=\frac{ab\pi}{4},$$

und also für den Inhalt der ganzen Ellipse der Ausdruck $ab\pi$.

II. Es sey

$$a^2y^2-b^2x^2-2ab^2x=0 \quad \text{oder} \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{2ax+x^2}$$

die Gleichung einer gegebenen Hyperbel in rechtwinkligen Coordinaten, deren Anfangspunkt in einem Scheitel der Hauptachse liegt.

§. 110. Nun ist

$$\int y dx = \frac{b}{a}\int \sqrt{2ax+x^2}.dx = \frac{b}{a}\left\{\frac{x+a}{2}\sqrt{2ax+x^2} - \frac{a^2}{2} log \frac{\sqrt{2ax+x^2}+x}{\sqrt{2ax+x^2}-x}\right\},$$

Fig. 24. welches Integral für $x = 0$ verschwindet, und das somit den Flächenraum APQ ausdrückt. Ziehen wir diesen Ausdruck von demjenigen für das Dreieck $CPQ = \frac{a+x}{2}.y = \frac{x+a}{2}\sqrt{2ax+x^2}$ ab, so erhalten wir den Inhalt des Sectors

$$ACP = \frac{ab}{2} log \frac{\sqrt{2ax+x^2}+x}{\sqrt{2ax+x^2}-x}.$$

Diesem Ausdruck kann man noch verschiedene andere Formen geben. Setzen wir z. B. $\frac{a}{b}y$ für $\sqrt{2ax+x^2}$, so verwandelt er sich in $\frac{ab}{2} log \frac{ay+bx}{ay-bx}$, oder, wenn wir Zähler und Nenner mit $ay+bx$ multipliciren, in

$$\frac{ab}{2} log \frac{(ay+bx)^2}{a^2y^2-b^2x^2} = \frac{ab}{2} log \frac{(ay+bx)^2}{2ab^2x}.$$

Rechnen wir aber die Abscissen vom Mittelpunkte an, und setzen daher $x-a$ für x in den gefundenen Ausdruck, so verwandelt er sich in

$$\frac{ab}{2} log \frac{\sqrt{x^2-a^2}+(x-a)}{\sqrt{x^2-a^2}-(x-a)} = \frac{ab}{2} log \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}},$$

oder, wenn wir Zähler und Nenner mit $\sqrt{x^2-a^2}+(x-a)$ multipliciren, in $\frac{ab}{2} log \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, oder auch, wenn wir $\frac{a}{b}y$ für $\sqrt{x^2-a^2}$ setzen, in $\frac{ab}{2} log \frac{ay+bx}{ab}$.

III. Es sey

$$xy = \tfrac{1}{4}(a^2+b^2)$$

die Gleichung einer gegebenen, auf ihre Asymptoten bezogenen, Hyperbel (§. 29. S. 26). Nun ist, wenn wir $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ durch q^2 bezeichnen,

$$sin\alpha \int y dx = sin\alpha . q^2 \int \frac{1}{x} dx = sin\alpha . q^2 log x.$$

Fig. 71. Der Inhalt des Flächenstückes $N_1P_1P_2N_2$ ist daher, wenn $CN_1 = x_1$ und $CN_2 = x_2$,

$$\sin\alpha \cdot q^2(\log x_2 - \log x_1) \quad \text{oder} \quad \sin\alpha \cdot q^2 \log\frac{x_2}{x_1}\,, \qquad \text{§. 110.}$$

wo α den Asymptotenwinkel bezeichnet.

Nehmen wir statt der natürlichen Logarithmen diejenigen, deren Modul gleich $\sin\alpha$ ist, und bezeichnen diese durch *l'og.*, so haben wir

$$N_1P_1P_2N_2 = q^2 l'og\frac{x_2}{x_1}\,.$$

Für den Sector P_1CP_2 gilt aber derselbe Ausdruck; denn es ist offenbar $P_1CP_2 = P_1CN_1 + P_1N_1N_2P_2 - P_2CN_2$, $P_1CN_1 = \frac{1}{2}x_1y_1\sin\alpha$ und $P_2CN_2 = \frac{1}{2}x_2y_2\sin\alpha$; aber auch $x_1y_1 = x_2y_2 = \frac{a^2+b^2}{4}$ (in Folge der Gleichung der Curve); also

$$P_1CP_2 = P_1N_1N_2P_2 = q^2 l'og\frac{x_2}{x_1}\,.$$

Um den Sector ACP_2 zu finden, haben wir $x_1 = AB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} = q$ (§. 29. Aufg. 44.) zu setzen, und wir erhalten dann

$$ACP_2 = q^2 l'og\frac{x_2}{q}\,.$$

Aufgabe [183]. *Es sollen nachbenannte Curven quadrirt werden.*

I. Die Cissoide.

Aus der Gleichung dieser Curve (§. 59. S. 8) erhalten wir

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{c-x}} = \frac{x^2}{\sqrt{cx-x^2}}\,;$$

also

$$\int y\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{cx-x^2}}\,dx = -\tfrac{1}{4}(2x+3c)\sqrt{cx-x^2} + \frac{3c^2}{4}\,arc\left(cos = \frac{c-x}{c}\right).$$

Dieses Integral verschwindet für $x = 0$. Wir finden daraus

$$\int_0^c y\,dx = \tfrac{3}{8}\pi c^2\,.$$

Der Flächenraum zwischen der Curve, ihrer Asymptote auf einer jeden Seite der Abscissenachse ist daher $\frac{3}{8}\pi c^2$; der gesammte Flächenraum zwischen der Curve und Asymptote also $\frac{3}{4}\pi c^2$, oder, wenn wir, wie in der 96sten Aufgabe, $c = 2a$ setzen, $3\pi a^2$, folglich dem dreifachen Kreise gleich, dessen Radius a ist. Fig. 36.

II. Die Conchoide.

§. 110. Fig. 37. Nehmen wir die Gerade GG' zur Ordinatenachse und die durch den Punkt A gezogene Senkrechte zur Abscissenachse, so verwandelt sich die Gleichung (6) des §. 60., indem wir nämlich x für y—b und y für x setzen, in

$$\{(x+b)^2+y^2\}x^2 = a^2(x+b)^2 ,$$

woraus

$$y = \pm\frac{b+x}{x}\sqrt{a^2-x^2}$$

folgt. Daher ist

$$\int y\,dx = \frac{2b+x}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2} - ab\,log\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + \tfrac{1}{2}a^2\,arc\left(sin = \frac{x}{a}\right)^*),$$

also

$$\int_{x_1}^{a} y\,dx = \frac{a^2}{4}\pi - \frac{2b+x_1}{2}\cdot\sqrt{a^2-x_1^2} + ab\,log\frac{a+\sqrt{a^2-x_1^2}}{x_1} - \frac{a^2}{2}arc\left(sin = \frac{x_1}{a}\right),$$

oder auch, da $\frac{1}{2}\pi - arc\left(sin = \frac{x_1}{a}\right) = arc\left(cos = \frac{x_1}{a}\right)$ ist,

$$\int_{x_1}^{a} y\,dx = \frac{a^2}{2}arc\left(cos = \frac{x_1}{a}\right) + ab\,log\frac{a+\sqrt{a^2-x_1^2}}{x_1} - \frac{2b+x_1}{2}\sqrt{a^2-x_1^2},$$

ein Ausdruck, welcher aber nur so lange einen conchoidalischen Raum darstellt, als x_1 zwischen Null und $+a$ liegt, weil, für $x = 0$, $y = \infty$ und, für $x > +a$, y imaginär wird. Wenn $ON = x_1$, so drückt das so eben angegebene bestimmte Integral den Flächenraum CPN aus, welcher von dem Bogen CP der obern Conchoide begrenzt wird. Will man den Ausdruck für den Flächenraum C'P'N' haben, welcher von dem Bogen C'P' der untern Conchoide begrenzt wird, so muß man, wenn $ON' = -x_1$ ist, das Integral $\int y\,dx$ von $-a$ bis $-x_1$ nehmen.

III. Die logarithmische Linie.

Aus der Gleichung (§. 64. G. 4), $y = me^{\frac{x}{m}}$, erhalten wir

$$\int y\,dx = m\int e^{\frac{x}{m}}dx = m^2e^{\frac{x}{m}} + C .$$

*) Wenn man nach einer Weise integrirt, die von derjenigen, welche zur Auffindung dieses Integrals angewendet worden, verschieden ist, so erhält das Integral eine andere Form. Um zu prüfen, ob zwei nach verschiedenen Integrationsmethoden erhaltene Integrale übereinstimmen, braucht man nur das eine von dem andern abzuziehen; die Differenz muß eine constante Größe seyn.

Soll dieſes Integral für $x = 0$ verſchwinden, ſo muß $C = -m^2$ geſetzt §. 110.
werden. Allgemein iſt

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = m^2\left\{e^{\frac{x_2}{m}} - e^{\frac{x_1}{m}}\right\} = m[y_2 - y_1] .$$

Da aus der Gleichung der Curve für $x = 0$, $y = m$ iſt, ſo können wir Fig. 72.
AB für m ſetzen. Dann iſt

$$p_1q_1q_2p_2 = \overline{AB}(y_2 - y_1) = \overline{AB} \times \overline{q_2r_2} .$$

Nehmen wir alſo auf der Ordinatenachſe AY eine Anzahl gleicher Abſchnitte $s_1s_2 = s_2s_3 = s_3s_4 =$ etc. und ziehen s_1q_1, s_2q_2, s_3q_3, etc. der Abſciſſenachſe parallel, ſo ſind die von den Bogen q_1q_2, q_2q_3, q_3q_4, etc. der Curve und den Ordinaten ihrer Endpunkte begrenzten Flächenſtücke über der Abſciſſenachſe einander gleich.

Der Flächenraum zwiſchen der Curve, der Abſciſſenachſe, die eine Aſymptote der Curve iſt, und einer Ordinate $p_nq_n = y_n$ iſt gleich my_n, alſo iſt dieſer Flächenraum, weil die Subtangente $= m$ (§. 72.), dem doppelten Dreieck p_nq_nt gleich.

IV. Die Kettenlinie.

Aus der Gleichung (§. 64. S. 5), $y = \frac{1}{2}m\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$, erhalten wir

$$\int y\,dx = \tfrac{1}{2}m\int\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)dx = \tfrac{1}{2}m^2\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) ,$$

welches Integral für $x = 0$ verſchwindet. Iſt nun $AM = x_1$, ſo iſt der Fig. 73.
Inhalt des Flächenſtückes

$$ABPM = \tfrac{1}{2}m^2\left(e^{\frac{x_1}{m}} - e^{-\frac{x_1}{m}}\right) .$$

Da aber $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x_1}{m}} - e^{-\frac{x_1}{m}}\right)$, ſo iſt auch

$$ABPM = m.m\frac{dy_1}{dx_1} .$$

Fällen wir BD ſenkrecht auf die Tangente in P, ſo iſt $tang\,ABD = \frac{dy_1}{dx_1}$,

und da $AB = m$, $AD = m\frac{dy_1}{dx_1}$, folglich $\Delta ABD = \frac{1}{2}m.m\frac{dy_1}{dx_1}$, ſomit

§. 110.

$$ABPM = 2\Delta ABD .$$

Für einen andern Punkt P' haben wir ebenso $ABP'M' = 2\Delta ABD'$. Daher ist das Flächenstück

$$PMM'P' = 2\{\Delta ABD' - \Delta ABD\} = 2\Delta DBD' .$$

V. Die Cycloide.

Fig. 74. Wir wollen den Inhalt des Flächenstückes BNP aufsuchen. Nehmen wir zu dem Ende BN als Abscissenachse und B zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten, so können wir, um die Gleichungen (3) des §. 66. zu transformiren, darin $x + a\pi$ für x und $2a - y$ für y setzen, wodurch sie sich in

$$x = a(t - \pi - \sin t) \quad ; \quad y = a(1 + \cos t)$$

verwandeln. Nun ist

$$\frac{dS}{dx} = y, \text{ und da } \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dx}\frac{dx}{dt}, \; \frac{dS}{dt} = y\frac{dx}{dt},$$

also, weil $y = a(1 + \cos t)$ und $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$,

$$\frac{dS}{dt} = a^2(1 - \cos^2 t) = a^2 \sin^2 t ,$$

somit

$$S = a^2 \int \sin^2 t \, dt = \tfrac{1}{2}a^2(t - \tfrac{1}{2}\sin 2t) .$$

Um hieraus den Inhalt von BNP zu finden, haben wir, wenn $BN = x_1$ ist, das Integral zwischen den beiden Grenzen zu nehmen, welche den Werthen $x = 0$ und $x = x_1$ entsprechen. Für $x = 0$ ist aber, zufolge der Gleichung $x = a(t - \pi - \sin t)$, $t = \pi$, und für $x = x_1$ sey $t = t_1$. Demnach finden wir

$$BNP = a^2 \int_{\pi}^{t_1} \sin^2 t \, dt = \tfrac{1}{2}a^2\{(t_1 - \pi) - \tfrac{1}{2}\sin 2t_1\} ,$$

oder auch, weil $\sin 2t_1 = \sin 2(t_1 - \pi)$,

$$BNP = \tfrac{1}{2}a^2\{(t_1 - \pi) - \tfrac{1}{2}\sin 2(t_1 - \pi)\} .$$

Wenn wir uns den erzeugenden Kreis in derjenigen Lage vorstellen, in welcher der beschreibende Punkt in P fällt, so ist $arc\,RSQP = t_1$, also $QP = t_1 - \pi$, und weil das Kreisstück $PTQ = Sector\,POQ - \Delta POT$, $PTQ = \tfrac{1}{2}a^2\{(t_1 - \pi) - \tfrac{1}{2}\sin 2(t_1 - \pi)\}$; folglich ist

$$BNP = PTQ .$$

Eben so ist $Bnp = mtq$ und $Bn'p' = m't'q$, also $pnn'p' = mtt'm'$.

Da-

Daher ist denn auch A'a'B = AaB = dem Halbkreise, und folglich §. 110.
APBpA'a'BaA = dem erzeugenden Kreise. Da ferner A'A = 2πa und Aa = 2a, so ist Rechteck Aaa'A' = 4πa² = dem Vierfachen des erzeugenden Kreises, und folglich der cycloidalische Flächenraum APBpA' dem Dreifachen des erzeugenden Kreises gleich.

§. 111.

Aufgabe [184]. Die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten ist gegeben. Es soll der Inhalt der Fläche gefunden werden, welche von einem Bogen der Curve und den beiden, nach seinen Endpunkten gezogenen, Leitstrahlen begrenzt wird.

Wir könnten die Formel, welche den gesuchten Flächeninhalt ausdrückt, aus der Formel (5) des §. 106. herleiten. Wir wollen sie aber direct aufsuchen, wie folgt.

Es sey BAC der Sector, dessen Inhalt S gesucht wird. Wir beschrei- Fig. 75.
ben um A mit AC einen Kreisbogen CD; nehmen einen, dem Punkte C nahe liegenden, Punkt der Curve C' an, und beschreiben mit AC' um A den Kreisbogen C'D'. Bezeichnen wir die Winkel CAX und C'AX respective durch t und t+h, so ist der Sector BAC = φ(t) und BAC' = φ(t+h); daher

$$CAC' = BAC' - BAC = \varphi(t+h) - \varphi(t) .$$

Für ein gehörig kleines h und für alle kleinern Werthe von h, nehmen die Leitstrahlen von AC bis AC' beständig zu oder beständig ab; daher schneidet der Bogen CC' der Curve die Kreisbogen nicht, und es ist also

$$CAC' > \text{Kreissector } CAD, \text{ und } CAC' < \text{Kreissector } C'AD' ,$$

oder, da Kreissector CAD = ½u²h und Kreissector C'AD' = ½u'²h, wenn wir AC durch u und AC' durch u' bezeichnen,

$$\tfrac{1}{2}u^2h < \varphi(t+h) - \varphi(t) ,$$
$$\tfrac{1}{2}u'^2h > \varphi(t+h) - \varphi(t) .$$

Da nun $u' = u + \frac{du}{dt}h + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dt^2}h^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3u}{dt^3}h^3 + \text{etc.}$, und

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = \frac{dS}{dt}h + \frac{1}{2}\frac{d^2S}{dt^2}h^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3S}{dt^3}h^3 + \text{etc.} ,$$

so ergiebt sich, durch Substitution dieser Reihen und nach der Division durch h,

§. 111.
$$\tfrac{1}{2}u^2 < \frac{dS}{dt}+\tfrac{1}{2}\frac{d^2S}{dt^2}h+\frac{1}{2.3}\frac{d^3S}{dt^3}h^2+\text{ etc.},$$

$$\tfrac{1}{2}u^2+u\frac{du}{dt}h+\tfrac{1}{2}\left\{\frac{du^2}{dt^2}+u\frac{d^2u}{dt^2}\right\}h^2+\text{ etc.} > \frac{dS}{dt}+\tfrac{1}{2}\frac{d^2S}{dt^2}h+\frac{1}{2.3}\frac{d^3S}{dt^3}h^2+\text{ etc.}$$

für einen gehörig kleinen Werth von h und für alle kleinern Werthe, was bekanntermaßen nur möglich ist, wenn

$$\tfrac{1}{2}u^2 = \frac{dS}{dt}$$

ist. Wir haben demnach

$$S = \int\tfrac{1}{2}u^2dt+C = \tfrac{1}{2}\int u^2dt+C\,, \qquad (1)$$

und wenn die Winkel BAX, CAX die bestimmten Werthe t_1, t_2 haben,

$$S = \tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}u^2dt\,. \qquad (2)$$

Diese Formel ist nur so lange anwendbar als u für keinen zwischen t_1 und t_2 liegenden Werth durch 0 oder ∞ geht.

Aufgabe [185]. Den Flächeninhalt der Sectoren nachbenannter Curven zu finden.

I. Der Parabel zweiten Grades, wenn der Brennpunkt als Pol angenommen wird.

Wir erhalten aus der Gleichung (§. 33. S. 10), indem wir nur die untern Vorzeichen nehmen,

$$u = -\frac{p}{2(1+\cos t)} = -\frac{p}{4\cos^2\frac{1}{2}t}\,;$$

also

$$\tfrac{1}{2}\int u^2dt = \frac{p^2}{32}\int\frac{1}{\cos^4\frac{1}{2}t}dt\,.$$

Um die Integration zu bewirken, setzen wir $t = 2\vartheta$, und erhalten

$$\tfrac{1}{2}\int u^2dt = \frac{p^2}{16}\int\frac{1}{\cos^4\vartheta}d\vartheta = \frac{p^2}{16}\{\tang\vartheta+\tfrac{1}{3}\tang^3\vartheta\}\,,$$

folglich

$$S = \tfrac{1}{2}\int u^2dt = \frac{p^2}{16}\{\tang\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}t\}\,,$$

ein Integral, welches für $t = 0$ verschwindet und demnach einen Sector ausdrückt, der von dem durch den Scheitel gehenden Leitstrahl anfängt.

II. Der Ellipse, wenn ein Brennpunkt als Pol angenommen wird.

Die Gleichung (11) des §. 33. giebt, wenn nur die obern Zeichen genommen werden, §. 111.

$$u = \frac{b^2}{a - e\cos t} ;$$

alſo

$$\tfrac{1}{2}\int u^2 dt = \tfrac{1}{2}b^4 \int \frac{1}{(a - e\cos t)^2} dt .$$

Folglich iſt

$$S = \frac{b^4}{2(a^2 - e^2)} \left\{ \frac{e \sin t}{a - e\cos t} + \frac{a}{\sqrt{a^2 - e^2}} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{a^2 - e^2}\cdot \sin t}{a - e\cos t}\right) \right\} ,$$

oder, da $a^2 - b^2 = e^2$,

$$S = \tfrac{1}{2}b^2 . \frac{e \sin t}{a - e\cos t} + \tfrac{1}{2}ab \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{b \sin t}{a - e\cos t}\right) .$$

Der hierdurch ausgedrückte Sector fängt bei dem durch den Mittelpunkt gehenden Leitſtrahle an.

III. Der Hyperbel, wenn ein Brennpunkt zum Pol genommen wird.

Da die Herleitung des verlangten Ausdruckes dieſelbe wie die in II. iſt, ſo begnügen wir uns, das Reſultat hierher zu ſetzen, welches iſt

$$S = \tfrac{1}{2}b^2 . \frac{e \sin t}{a - e\cos t} + \tfrac{1}{2}ab \log \frac{a\cos t + b \sin t - e}{a - e\cos t} .$$

IV. Der Conchoide.

Die Gleichungen dieſer Curve (§. 60. S. 8) geben

$$u = \frac{b}{\sin t} + a \quad \text{und} \quad u = \frac{b}{\sin t} - a .$$

Nehmen wir den erſten Ausdruck von u, ſo iſt

$$\tfrac{1}{2}\int u^2 dt = \tfrac{1}{2}\int \left\{ \frac{b^2}{\sin^2 t} + \frac{2ab}{\sin t} + a^2 \right\} dt$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2 t - \tfrac{1}{2}b^2 \frac{\cos t}{\sin t} + ab \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}t .$$

Dieſes Integral, von t_1 bis t_2 genommen, drückt einen von der obern Conchoide BCD begrenzten Sector aus, wenn t_1 und t_2 zwiſchen 0 und π, und einen von der untern Conchoide B'C'D' begrenzten, wenn t_1 und t_2 zwiſchen π und 2π liegen. Umgekehrt verhält es ſich mit dem aus dem zweiten Ausdrucke von u hergeleiteten Integrale Fig. 37.

§. 111. $$\tfrac{1}{2}\int u^2 dt = \tfrac{1}{2}a^2 t - \tfrac{1}{2}b^2 \frac{\cos t}{\sin t} - ab \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}t \ ,$$

wenn es zwischen solchen Grenzen genommen wird. Ist $a > b$ und bildet die Curve daher bei A eine Schleife, so ist, aus dem zweiten Ausdrucke von u, für $\sin t = \frac{b}{a}$, $u = 0$, und, für $\sin t = 1$, $u = b - a$. Nehmen wir nun das letzte Integral zwischen diesen Grenzen, so ergiebt sich, da, für $\sin t = 1$, $t = \frac{1}{2}\pi$,

$$\tfrac{1}{4}\pi a^2 + \tfrac{1}{2}b\sqrt{a^2 - b^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \arc\left(\sin = \frac{b}{a}\right) + ab \cdot \log \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}$$

Fig. 76. als Ausdruck für den Inhalt der Hälfte des Blattes AECF .

V. Der Lemniscate.

Die Gleichung dieser Curve (§. 62. S. 3) giebt

$$u^2 = a^2 \cos 2t \ .$$

Daher ist

$$\tfrac{1}{2}\int u^2 dt = \tfrac{1}{2}a^2 \int \cos 2t \, dt = \tfrac{1}{4}a^2 \sin 2t \ .$$

Dieses Integral darf hier nur zwischen Grenzen genommen werden, welche zwischen $t = -\frac{1}{4}\pi$ und $t = +\frac{1}{4}\pi$, oder zwischen $t = \frac{3}{4}\pi$ und $t = \frac{5}{4}\pi$ liegen, weil u, für Werthe von t, die zwischen $\frac{1}{4}\pi$ u. $\frac{3}{4}\pi$ und zwischen $\frac{5}{4}\pi$ u. $\frac{7}{4}\pi$ liegen, imaginär ist. Es ergiebt sich nun

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} u^2 dt = \tfrac{1}{4}a^2 \ ,$$

und dieses ist der Ausdruck für den vierten Theil des von der Curve eingeschlossenen Flächenraums. Der ganze Flächeninhalt der Curve ist daher $= a^2$. Allgemein aber ist

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{t_1} u^2 dt = \tfrac{1}{4}a^2 \sin 2t_1 \ ,$$

ein Ausdruck der auf verschiedene Weise construirt werden kann.

Erstens nämlich ist, zufolge der Gleichung $u^2 = a^2 \cos 2t$, $\frac{1}{4}u_1 \frac{du_1}{dt_1} = -\frac{1}{4}a \sin 2t_1$. Nun ist u_1 der unsern Sector begrenzende Leitstrahl und $\frac{du_1}{dt_1}$ die Polarsubnormale seines Endpunktes (§. 71. F. 16.); also ist $\frac{1}{2}u_1 \frac{du_1}{dt_1}$ der Ausdruck für den Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks, welches von jenem Radius vector, der Subnormale und Normale begrenzt wird, und folglich ist der Sector der Hälfte dieses Dreiecks gleich. Errichtet man also in

C auf CP eine Senkrechte und legt (zufolge §. 73.) an CP in P den Winkel CPQ = 2ACP an, halbirt sodann PQ in R und zieht CR, so ist $\Delta PCR = \Delta RCQ =$ Sector ACP. Hieraus folgt zugleich, daß $\Delta CSR =$ ASP ist. §. 111. Fig. 43.

Zweitens ist, zufolge der Gleichung der Curve $u^2 = a^2 \sin(\frac{1}{2}\pi - 2t) = a^2 \sin 2(\frac{1}{4}\pi - t)$. Nimmt man also einen Winkel $t' = \frac{1}{4}\pi - t_1$, und bezeichnet den zugehörigen Radius vector durch u', so ist $u'^2 = a^2 \sin 2(\frac{1}{4}\pi - t') = a^2 \sin 2t_1$, und folglich ist das Quadrat dieses Leitstrahls u' das Vierfache unseres Sectors. Nehmen wir daher, wenn CD die Tangente im Mittelpunkte C der Curve, und also ACD $= \frac{1}{4}\pi$ ist, Winkel DCP' = ACP $= t_1$, so ist ACP' = ACD − DCP' $= \frac{1}{4}\pi - t_1 = t'$, und folglich CP' = u'. Also ist Sector ACP $= \frac{1}{4}\overline{CP'}^2$.

VI. Der Kreisevolvente.

Bezeichnen wir den Inhalt des Sectors einer Curve durch S, so ist $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}u^2$, also $\frac{dS}{du}\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}u^2$ und $\frac{dS}{du} = \frac{1}{2}u^2\frac{dt}{du}$, folglich

$$S = \tfrac{1}{2}\int u^2 \frac{dt}{du} du + C .$$

Wir wenden diese Formel statt der Formel (1) hier an, weil sich u aus der Gleichung der Curve (§. 66. S. 2) nicht entwickelt darstellen läßt. Diese Gleichung giebt aber

$$\frac{dt}{du} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{au} ,$$

also ist

$$S = \tfrac{1}{2}\int u^2 \frac{dt}{du} du = \frac{1}{2a}\int u\sqrt{u^2 - a^2}\, .\, du = \frac{(u^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{6a} .$$

Dieses Integral verschwindet für u = a, und da für diesen Werth t = 0 ist, so haben wir keine Constante hinzu zu fügen, wenn der Sector, wie wir es annehmen, von dem festen Radius OA anfängt. Wenn also OB' = u_1, so ist Fig. 49.

$$\text{Sector AOB'} = \frac{(u_1^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{6a} .$$

Dieser Ausdruck kann leicht construirt werden. Man ziehe nämlich von B' die Tangente B'B an den Grundkreis, verbinde die Punkte O, B und errichte auf OB' in B' eine Senkrechte, welche die verlängerte Gerade OB in

§. 111. einem Punkte Q schneiden wird, so ist

$$\text{Sector } AOB' = \tfrac{1}{3}\Delta BB'Q .$$

Denn es ist $BQ = \frac{\overline{BB'}^2}{OB}$, also $\frac{1}{3}\Delta BB'Q = \frac{1}{6}\overline{BB'}.\overline{BQ} = \frac{\overline{BB'}^3}{6.\overline{OB}}$. Es ist aber auch $OB = a$ und $BB' = \sqrt{u_1^2 - a^2}$, also $\frac{1}{3}\Delta BB'Q = \frac{(u_1^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{6a}$.

VII. Der Epicycloide.

Bezeichnet S den Inhalt des Sectors einer Curve, deren Polarcoordinaten ϑ, u sind, so ist $\frac{dS}{d\vartheta} = \frac{1}{2}u^2$, und wenn ϑ, also auch u, als Function einer dritten unabhängigen Veränderlichen t angesehen wird, $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}u^2\frac{d\vartheta}{dt}$, folglich

$$S = \tfrac{1}{2}\int u^2 \frac{d\vartheta}{dt}\,dt .$$

Nun ist aber (§. 3. F. 11.) $tang\,\vartheta = \frac{y}{x}$ oder $\vartheta = arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)$;

also $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{y^2 + x^2} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{u^2}$, folglich

$$S = \tfrac{1}{2}\int\left(x\frac{dy}{dx} - y\frac{dx}{dt}\right)dt + C .$$

Die Gleichungen der Epicycloide (§. 67. G. 1)

$$y = (r+a)\sin t - a\sin\frac{r+a}{a}t ,$$

$$x = (r+a)\cos t - a\cos\frac{r+a}{a}t$$

geben

$$\frac{dy}{dt} = (r+a)\left\{\cos t - \cos\frac{r+a}{a}t\right\} \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = -(r+a)\left\{\sin t - \sin\frac{r+a}{a}t\right\} ,$$

und setzen wir diese Werthe in den Ausdruck unter dem Integralzeichen, so erhalten wir, nach einigen Reductionen,

$$S = \tfrac{1}{2}(r+a)(r+2a)\int\left(1 - \cos\frac{r}{a}t\right)dt ,$$

und ſomit §. 111.

$$S = \tfrac{1}{2}(r+a)(r+2a)\left\{t - \frac{a}{r}\sin\frac{r}{a}t\right\} .$$

Dieſes Integral verſchwindet für $t = 0$, welcher Werth $y = 0$, $x = r$ und $\vartheta = 0$ giebt; es iſt ſomit keine Conſtante hinzu zu fügen, wenn der Sector von dem Radius CA anfängt. Fig. 52.

Dem gefundenen Ausdrucke können wir auch die Form

$$S = \frac{(r+a)(r+2a)}{ar}\left\{\frac{art}{2} - \frac{a^2}{2}\sin\frac{r}{a}t\right\}$$

geben. Es iſt aber (§. 67. Aufg. 108.) rt = Kreisbogen PM, alſo $\frac{art}{2}$ = Kreisſector POM; ferner $\frac{r}{a}t$ = Winkel POM, alſo $\frac{1}{2}a^2\sin\frac{r}{a}t$ = ΔPOM; folglich iſt

$$\text{Sect. ACP} = S = \frac{(r+a)(r+2a)}{ar} \times \text{Kreisſegment PM} .$$

Hieraus ergiebt ſich, daß der Sector, welcher von den beiden, nach zwei auf einander folgenden Rückkehrpunkten der Curve gezogenen, Radien und dem dazwiſchen liegenden Bogen der Epicycloide begrenzt wird, dem rollenden Kreiſe mit $\frac{(r+a)(r+2a)}{ar}$ multiplicirt, gleich iſt. Wenn r ein Multiplum von a, alſo $\frac{r}{a} = n$ eine ganze Zahl iſt, ſo beſteht der ganze von der Curve eingeſchloſſene Flächenraum aus n ſolcher Sectoren. Setzen wir in $n.\frac{(r+a)(r+2a)}{ar}$, na für r, ſo kommt $(n+1)(n+2)$, und der Inhalt der Curve iſt daher

$$(n+1)(n+2) \times \textit{Circul. gener.}$$

So iſt z. B. der Inhalt der Cardioide (§. 67. S. 6), für welche $n = 1$ iſt, dem ſechsfachen Inhalte des rollenden Kreiſes oder auch dem ſechsfachen Grundkreiſe gleich.

VIII. Der Hypocycloide.

Wir können den Inhalt des Sectors aus dem in VII. gefundenen Ausdrucke erhalten, indem wir $-a$ für a ſetzen. Dies giebt uns

$$S = \frac{(r-a)(r-2a)}{ar} \times \text{Kreisſegment PM} ,$$

§. 111. einem Punkte Q schneiden wird, so ist

$$\text{Sector } AOB' = \tfrac{1}{2}\Delta BB'Q .$$

Denn es ist $BQ = \frac{\overline{BB'}^2}{OB}$, also $\frac{1}{2}\Delta BB'Q = \frac{1}{6}\overline{BB'}.\overline{BQ} = \frac{\overline{BB'}^3}{6.\overline{OB}}$. Es ist aber auch $OB = a$ und $BB' = \sqrt{u_1^2 - a^2}$, also $\frac{1}{2}\Delta BB'Q = \frac{(u_1^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{6a}$.

VII. Der Epicycloide.

Bezeichnet S den Inhalt des Sectors einer Curve, deren Polarcoordinaten ϑ, u sind, so ist $\frac{dS}{d\vartheta} = \frac{1}{2}u^2$, und wenn ϑ, also auch u, als Function einer dritten unabhängigen Veränderlichen t angesehen wird, $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}u^2\frac{d\vartheta}{dt}$, folglich

$$S = \tfrac{1}{2}\int u^2 \frac{d\vartheta}{dt}\,dt .$$

Nun ist aber (§. 3. F. 11.) $tang\,\vartheta = \frac{y}{x}$ oder $\vartheta = arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)$;

also $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{y^2 + x^2} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{u^2}$, folglich

$$S = \tfrac{1}{2}\int\left(x\frac{dy}{dx} - y\frac{dx}{dt}\right)dt + C .$$

Die Gleichungen der Epicycloide (§. 67. G. 1)

$$y = (r+a)\sin t - a\sin\frac{r+a}{a}t ,$$

$$x = (r+a)\cos t - a\cos\frac{r+a}{a}t$$

geben

$$\frac{dy}{dt} = (r+a)\left\{\cos t - \cos\frac{r+a}{a}t\right\} \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = -(r+a)\left\{\sin t - \sin\frac{r+a}{a}t\right\} ,$$

und setzen wir diese Werthe in den Ausdruck unter dem Integralzeichen, so erhalten wir, nach einigen Reductionen,

$$S = \tfrac{1}{2}(r+a)(r+2a)\int\left(1 - \cos\frac{r}{a}t\right)dt ,$$

und somit §. 111.

$$S = \tfrac{1}{2}(r+a)(r+2a)\left\{t - \frac{a}{r}\sin\frac{r}{a}t\right\} .$$

Dieses Integral verschwindet für $t = 0$, welcher Werth $y = 0$, $x = r$ und $\vartheta = 0$ giebt; es ist somit keine Constante hinzu zu fügen, wenn der Sector von dem Radius CA anfängt. Fig. 52.

Dem gefundenen Ausdrucke können wir auch die Form

$$S = \frac{(r+a)(r+2a)}{ar}\left\{\frac{art}{2} - \frac{a^2}{2}\sin\frac{r}{a}t\right\}$$

geben. Es ist aber (§. 67. Aufg. 108.) rt = Kreisbogen PM, also $\frac{art}{2}$ = Kreissector POM; ferner $\frac{r}{a}t$ = Winkel POM, also $\frac{1}{2}a^2\sin\frac{r}{a}t$ = ΔPOM; folglich ist

$$\text{Sect. ACP} = S = \frac{(r+a)(r+2a)}{ar} \times \text{Kreissegment PM} .$$

Hieraus ergiebt sich, daß der Sector, welcher von den beiden, nach zwei auf einander folgenden Rückkehrpunkten der Curve gezogenen, Radien und dem dazwischen liegenden Bogen der Epicycloide begrenzt wird, dem rollenden Kreise mit $\frac{(r+a)(r+2a)}{ar}$ multiplicirt, gleich ist. Wenn r ein Multiplum von a, also $\frac{r}{a} = n$ eine ganze Zahl ist, so besteht der ganze von der Curve eingeschlossene Flächenraum aus n solcher Sectoren. Setzen wir in $n.\frac{(r+a)(r+2a)}{ar}$, na für r, so kommt $(n+1)(n+2)$, und der Inhalt der Curve ist daher

$$(n+1)(n+2) \times \textit{Circul. gener.}$$

So ist z. B. der Inhalt der Cardioide (§. 67. S. 6), für welche $n = 1$ ist, dem sechsfachen Inhalte des rollenden Kreises oder auch dem sechsfachen Grundkreise gleich.

VIII. Der Hypocycloide.

Wir können den Inhalt des Sectors aus dem in VII. gefundenen Ausdrucke erhalten, indem wir $-a$ für a setzen. Dies giebt uns

$$S = \frac{(r-a)(r-2a)}{ar} \times \text{Kreissegment PM} ,$$

§. 111. und unter der Annahme, daß $\frac{r}{a} = n$ eine ganze Zahl sey, den Inhalt der ganzen Curve

$$(n-1)(n-2) \times \textit{Circul. gener.}$$

So ist z. B. der Inhalt der, in der Aufgabe [157] betrachteten Curve (§. 95.), welche eine Hypocycloide und an welcher $n = 4$ ist, dem sechsfachen erzeugenden Kreise gleich, oder da dieser Kreis der sechzehnte Theil des Grundkreises ist, gleich $\frac{3}{8}$ des Grundkreises, also $= \frac{3}{8}\pi k^2$.

IX. Der archimedischen Spirale.

Wir erhalten aus ihrer Gleichung $u = rt$ (§. 68. G. 1),

$$\tfrac{1}{2}\int u^2\,dt = \tfrac{1}{2}r^2\int t^2\,dt = \tfrac{1}{6}r^2t^3\ ,$$

und hieraus

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} u^2\,dt = \tfrac{4}{3}\pi^3r^2 \quad ; \quad \tfrac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} u^2\,dt = \tfrac{28}{3}\pi^3r^2 \quad ; \text{ etc.}$$

oder allgemeiner

$$\tfrac{1}{2}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} u^2\,dt = 4[(n+1)n+\tfrac{1}{3}]\pi^3r^2\ .$$

Fig. 77. Es ist also der Flächenraum $OPQRA'O = \frac{4}{3}\pi^3r^2$; der Flächenraum $A'P'Q'R'A''A' = \frac{28}{3}\pi^3r^3$, u. s. f. Will man aber den Flächenraum finden, welcher zwischen der ersten und zweiten Windung enthalten ist, so muß man den zuerst genannten Ausdruck von dem darauf folgenden abziehen. Dies giebt $A'OPQRP'Q'R'A''A' = 8\pi^3r^2$. Es ergiebt sich allgemeiner für den Flächenraum zwischen der nten und $(n+1)$ten Windung der Curve $4\{(n+1)n+\frac{1}{3}\}\pi^3r^2 - 4\{n(n-1)+\frac{1}{3}\}\pi^3r^3 = 8n\pi^3r^2$; und dieser Flächenraum ist also dem $2n$fachen Kreise gleich, dessen Radius $= 2\pi r = OA = A'A'' =$ etc. ist.

X. Der hyperbolischen Spirale.

Wir erhalten aus ihrer Gleichung, $ut = r\alpha$ (§. 68. G. 3),

$$\tfrac{1}{2}\int u^2\,dt = \frac{r^2\alpha^2}{2}\int\frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{r^2\alpha^2}{2t}\ ,$$

und hieraus

$$\tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{\infty} u^2\,dt = \frac{\alpha^2r^2}{2t_1} = \tfrac{1}{2}\alpha r u_1\ .$$

Fig. 54. Da nun die Polarsubtangente $= -r\alpha$ (§. 72.), so ist, wenn u_1 der Radius vector des Punktes P ist, die Summe der sich zum Theil deckenden

Flächenräume, welche sich respective bei den Radien AP, Ap', Ap'', etc. §. 111.
anfangen und bis zum Pol A reichen, dem Dreiecke APT gleich, das von Fig. 54.
dem Radius vector, der Tangente und Polarsubtangente des Punktes P gebildet wird. Der Flächenraum der Spirale vom Punkte P bis zum Anfangspunkte A wird daher, wenn u' der Radius vector des Punktes p' ist, durch $\frac{1}{2}\alpha r(u_1 - u')$ ausgedrückt, und ist, wie man leicht einsehen wird, dem $\Delta Pp'T$ gleich.

XI. Des Lituus.

Wir erhalten aus seiner Gleichung, $u^2 t = r^2\alpha$ (§. 68. S. 4)

$$\tfrac{1}{2}\int u^2\,dt = \tfrac{1}{2}r^2\alpha\int\frac{1}{t}\,dt = \tfrac{1}{2}r^2\alpha.\log t\,,$$

und hieraus

$$\tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} u^2\,dt = \tfrac{1}{2}r^2\alpha.\log\frac{t_2}{t_1} = r^2\alpha.\log\frac{t_2^{\frac{1}{2}}}{t_1^{\frac{1}{2}}} = r^2\alpha\log\frac{u_1}{u_2}\,.$$

Wenn also mehrere Leitstrahlen, die in geometrischer Progression wachsen, an eine und dieselbe Windung der Curve gezogen werden, so stehen die zwischen ihnen liegenden Sectoren in arithmetischer Progression.

XII. Der logarithmischen Spirale.

Wir erhalten aus ihrer Gleichung, $u = re^{\frac{t}{m}}$ (§. 68. S. 5),

$$\tfrac{1}{2}\int u^2\,dt = \tfrac{1}{2}r^2\int e^{\frac{2t}{m}}\,dt = \tfrac{1}{4}mr^2e^{\frac{2t}{m}} = \tfrac{1}{4}mu^2\,,$$

und hieraus

$$\tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{-\infty} u^2\,dt = \tfrac{1}{4}m^2r^2e^{\frac{2t_1}{m}} = \tfrac{1}{4}mu_1^2\,.$$

Da die Polarsubtangente eines Punktes P, dessen Radius vector gleich Fig. 56.
u_1, mu_1 ist (§. 72.), so ist die Summe der sich zum Theil deckenden, bei AP, Ap', Ap'' u. s. w. anfangenden und bis zum Pol A reichenden Flächenräume dem halben ΔAPT gleich. Der Flächenraum vom Radius AP bis zum Pol A, ist daher gleich dem halben Trapez PptT.

§. 112.

Aufgabe [186]. Den Inhalt des Flächenraums zu finden, welcher von dem Bogen einer gegebenen Curve, den Krümmungsradien ihrer Endpunkte und dem, zwischen diesen Krümmungsradien liegenden, Bogen der Evolvente jener Curve begrenzt wird.

§. 112. Wenn x, y die rechtwinkligen Coordinaten der gegebenen Curve bedeuten, und, der Kürze wegen, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ durch p, q bezeichnet werden, so ist der Krümmungsradius eines Punktes xy (§. 83. F. 9.)

$$\varrho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}.$$

Es läßt sich nun gerade eben so, wie bei der Herleitung des Differentialcoefficienten $\frac{dS}{dt}$ (§. 111. Aufg. 184.) zeigen, daß der Differentialcoefficient des gesuchten Flächenraums, den wir wieder durch S bezeichnen, durch $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\varrho^2$ ausgedrückt wird, wo aber t den Winkel bedeutet, welchen die Normale im Punkte xy mit der Abscissenachse bildet. Da nun $\frac{dS}{dx} = \frac{dS}{dt}\frac{dt}{dx}$, so ist $\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2}\varrho^2\frac{dt}{dx}$; da aber auch $tang\, t = -\frac{1}{p}$, oder

$$t = arc\left(tang = -\frac{1}{p}\right),$$

so ist $\frac{dt}{dx} = \frac{q}{1+p^2}$. Es ist folglich

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2}\varrho^2 \cdot \frac{q}{(1+p^2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+p^2)^2}{q} \quad *), \qquad (1)$$

und somit

$$S = \frac{1}{2}\int \frac{(1+p^2)^2}{q}dx + C. \qquad (2)$$

Dieses Integral darf aber nur zwischen solchen Grenzen genommen werden, innerhalb welcher q nicht das Zeichen wechselt.

Aufgabe [187]. Den Inhalt der Fläche zu finden, welche von einer gegebenen Ellipse und ihrer Evolute begrenzt wird.

Es sey $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ die Gleichung der Ellipse. Dann ist

$$p = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} \quad ; \quad q = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

*) Man kann zu demselben Ausdruck auch noch auf eine andere Art gelangen, bei welcher aber der Differentialcoefficient des Bogens der Curve angewendet werden muß, den wir noch nicht aufgesucht haben.

Daraus finden wir §. 112.

$$S = \tfrac{1}{2}\int \frac{(1+p^2)^2}{q}dx = -\tfrac{1}{2}\int \frac{(a^4y^2+b^4x^2)^2}{b^4a^6y}dx ,$$

und, wenn wir für y den Werth aus der gegebenen Gleichung substituiren,

$$S = -\tfrac{1}{2}\int \frac{(a^4-e^2x^2)^2}{ba^5\sqrt{a^2-x^2}}.dx .$$

Die Integration giebt nun

$$S = -\frac{1}{2ba^5}\left\{e^2x(a^4-\tfrac{1}{4}e^2x^2-\tfrac{3}{8}e^2a^2)\sqrt{a^2-x^2}+a^4(a^2b^2+\tfrac{3}{8}e^4)\,arc\left(sin=\frac{x}{a}\right)\right\} .$$

Nehmen wir dieses Integral von $x = -a$ bis $x = 0$, so haben wir

$$S = \left(ab+\tfrac{3}{8}\frac{e^4}{ab}\right).\frac{\pi}{4} ,$$

wodurch der Flächenraum BbaA zwischen den Krümmungsradien Bb, Aa der Scheitel B, A ausgedrückt ist. Nun sind überhaupt zwei Fälle möglich, nämlich die Ellipse wird entweder von ihrer Evolute geschnitten, wie in Fig. 61., oder sie wird nicht geschnitten wie in Fig. 78. Das Erstere findet Statt, wenn $a > b\sqrt{2}$, das Letztere, wenn $a < b\sqrt{2}$. Wir werden hier nur den letzten Fall betrachten. Ziehen wir den gefundenen Ausdruck des Flächenraums BbaA von dem Inhalte der halben Ellipse $BAB' = \frac{1}{2}ab\pi$ ab, so bleibt Fig. 61. u. 78.

$$AabB' = \left(ab-\tfrac{3}{8}.\frac{e^4}{ab}\right).\frac{\pi}{4} ;$$

und wenn wir diesen Ausdruck vervierfachen, so erhalten wir für den Inhalt der Fläche, welche von den beiden Curven ABA'B' und aba'b' begrenzt ist,

$$\left(ab-\tfrac{3}{8}.\frac{e^4}{ab}\right)\pi .$$

Hieraus ergiebt sich zugleich, daß der Flächenraum von $aba'b' = \frac{3}{8}.\frac{e^4}{ab}\pi$ ist.

Wir bemerken noch, daß der Inhalt der gesuchten Fläche auch auf folgende einfache Weise gefunden, und die Richtigkeit der vorigen Rechnung dadurch geprüft werden kann.

Es ist nämlich der Inhalt der Curve, deren Gleichung (§. 95. S. 19)

$$\frac{y^{\frac{2}{3}}}{k^{\frac{2}{3}}}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{k^{\frac{2}{3}}} = 1 ,$$

§. 112. zufolge §. 111. (Aufg. 185. VIII.), $= \frac{3}{8}k^2\pi$. Die Gleichung der Evolute der Ellipse aber ist (§. 88. S. 2)

$$\frac{\beta^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{e^2}{b}\right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{\alpha^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{e^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}} = 1 ,$$

und diese Gleichung entsteht aus der vorher genannten, wenn wir $k = \frac{e^2}{a}$, $y = \frac{b}{a}\beta$ u. $x = \alpha$ setzen. Dann aber ist $\frac{d\alpha}{dx} = 1$, $\beta = \frac{a}{b}y$, daher $\int \beta d\alpha = \frac{a}{b}\int y dx$; folglich der von der Evolute der Ellipse eingeschlossene Flächenraum $= \frac{a}{b} \cdot \frac{3}{8}k^2\pi = \frac{3}{8} \cdot \frac{e^4}{ab}\pi$, wie oben, woraus sich denn der gefundene Ausdruck für die von den Curven ABA'B' und aba'b' eingeschlossene Fläche ebenfalls ergiebt.

§. 113.

Aufgabe [188]. Unter allen Sectoren einer gegebenen Curve, welche dieselbe Spitze und einen gegebenen Winkel an der Spitze haben, den größten oder kleinsten zu finden.

Es sey $u = \varphi(t)$ die gegebene Gleichung der Curve in Polarcoordinaten, deren Pol die gemeinschaftliche Spitze der Sectoren ist, und ϑ der constante Winkel, welchen die Schenkel der Sectoren einschließen. Ist nun S der Flächeninhalt eines solchen Sectors, so haben wir

$$S = \tfrac{1}{2}\int_0^{t+\vartheta} \varphi(t)^2 dt - \tfrac{1}{2}\int_0^t \varphi(t)^2 dt .$$

Da S ein Maximum oder Minimum seyn soll, so muß entweder $\frac{dS}{dt} = 0$ oder $\frac{dS}{dt} = \infty$ seyn. Es ist aber einleuchtend, daß das erste der beiden Integrale, in welchem nach vollzogener Integration $t+\vartheta$ für t gesetzt ist, wenn es nach t differentiirt wird, $\frac{1}{2}\varphi(t+\vartheta)^2$ giebt, und daß demnach

$$\frac{dS}{dt} = \tfrac{1}{2}\{\varphi(t+\vartheta)^2 - \varphi(t)^2\} ,$$

oder wenn wir die Leitstrahlen, welche zu den Winkeln t und $t+\vartheta$ gehören, respective durch u und u' bezeichnen,

$$\frac{dS}{dt} = \tfrac{1}{2}\{u'^2 - u^2\}$$ §. 113.

ist. Dieser Ausdruck kann nur unendlich werden, wenn einer der beiden Leitstrahlen $= \infty$ wird. Sehen wir von diesem Falle ab, so haben wir als Bedingung für das Maximum oder Minimum

$$u'^2 - u^2 = 0 .$$

Es müssen also für ein Maximum oder Minimum die beiden begrenzenden Leitstrahlen, absolut genommen, einander gleich seyn.

Die drei Gleichungen: $u = \varphi(t)$, $u' = \varphi(t+\vartheta)$ und $u'^2 - u^2 = 0$, reichen im Allgemeinen hin, die drei Größen t, u u. u' zu bestimmen. Nach geschehener Bestimmung muß, vermittelst der folgenden Differentialcoefficienten $\frac{d^2S}{dt^2}$, $\frac{d^3S}{dt^3}$, etc., untersucht werden, ob ein Maximum oder Minimum oder keins von beiden Statt findet.

Wenn $\vartheta = \pi$, so geht der Sector in ein Segment der Curve über. Daher: Wenn unter den Segmenten einer Curve, deren Sehnen durch einen gegebenen Punkt gehen, sich ein größtes oder kleinstes befindet, so hat dessen Sehne eine solche Lage, daß sie von dem gegebenen Punkte halbirt wird.

Aufgabe [189]. Unter allen Sectoren einer gegebenen Curve, welche dieselbe Spitze haben, und in welchen die Summe der Schenkel eine gegebene Größe hat, den größten oder kleinsten zu finden.

Es sey wieder $u = \varphi(t)$ die gegebene Gleichung der Curve in Polarcoordinaten, deren Pol die gemeinschaftliche Spitze der Sectoren ist; es seyen u und u' die begrenzenden Leitstrahlen eines Sectors und deren gegebene Summe gleich a. Dann ist

$$u' + u = a ,$$

und der Inhalt des Sectors

$$S = \tfrac{1}{2}\int_0^{u'} u^2 \frac{dt}{du}.du - \tfrac{1}{2}\int_0^{u} u^2 \frac{dt}{du}.du .$$

Da S ein Maximum oder Minimum seyn soll, so haben wir, wenn von dem Falle, in welchem $\frac{dS}{du} = \infty$ ist, abstrahirt wird, $\frac{dS}{du} = 0$ zu setzen. Bezeichnen wir $\frac{dt}{du}$ durch $\psi(u)$, so ist $\int_0^{u'} u^2 \frac{dt}{du} du = \int_0^{u'} u^2 \psi(u) du$, und

§. 113. wenn dieſes Integral nach u' differentiirt wird, ſo kommt offenbar $u'^2\psi(u')$, alſo $u'^2\frac{dt'}{du'}$. Wir haben demnach

$$\frac{dS}{du} = \tfrac{1}{2}\left\{u'^2\frac{dt'}{du'}\frac{du'}{du} - u^2\frac{dt}{du}\right\}.$$

In Folge der obigen Gleichung, $u'+u = a$, iſt aber $\frac{du'}{du}+1 = 0$, und daher haben wir $\frac{du'}{du} = -1$, alſo

$$\frac{dS}{du} = -\tfrac{1}{2}\left\{u'^2\frac{dt'}{du'}+u^2\frac{dt}{du}\right\};$$

folglich, für $\frac{dS}{du} = 0$, die Gleichung

$$u'^2\frac{dt'}{du'}+u^2\frac{dt}{du} = 0.$$

Da nun $u^2\frac{dt}{du}$ und $u'^2\frac{dt'}{du'}$ die Polarſubtangenten in den Endpunkten der Leitſtrahlen u und u' ſind, ſo folgt, daß die Polarſubtangenten in den Endpunkten des Bogens, welcher den Sector begrenzt, abſolut genommen, einander gleich ſeyn müſſen.

§. 114.

Wenn ſich das Integral $\int y dx$ für eine gegebene Curve nicht durch einen geſchloſſenen Ausdruck angeben läßt, ſo bleibt, um den Inhalt eines von der Curve und zweien Ordinaten begrenzten Flächenſtückes zu finden, nichts übrig, als das Integral durch eine Reihe darzuſtellen, und auf dieſe Weiſe einen genäherten Ausdruck für den Flächeninhalt aufzuſuchen, oder auch an die Stelle der gegebenen Curve ein Polygon oder eine Curve zu ſetzen, die ſich der gegebenen möglichſt nahe anſchließt und deren Flächeninhalt ſich auffinden läßt, welcher ſodann als ein Näherungswerth des geſuchten genommen werden mag.

Fig. 79. I. Es ſey PP' irgend eine Curve und der Inhalt des Flächenraumes QPP'Q' zu finden. Wir theilen QQ' in eine Anzahl gleicher Theile, errichten in den Theilungspunkten die Ordinaten q_1p_1, q_2p_2, q_3p_3, etc. und ziehen die Geraden Pp_1, p_1p_2, p_2p_3, etc. Bezeichnen wir nun PQ durch y', P'Q' durch y'', QQ' durch h, ferner q_1p_1, q_2p_2, q_3p_3, etc. durch y_1, y_2, y_3, etc. und die Anzahl

gleicher Theile von QQ' durch n, so ist der Inhalt der einzelnen Trapeze re- §. 114.
spective $\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{n}(y'+y_1)$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{n}(y_1+y_2)$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{n}(y_2+y_3)$, etc., und, wenn wir alle Trapeze zusammen nehmen, der Inhalt des gebildeten Polygons

$$S = \frac{h}{n}\left\{\tfrac{1}{2}(y'+y'')+y_1+y_2+y_3+\ldots.\right\}.$$

Der Werth dieses Ausdrucks kommt im Allgemeinen dem Inhalte des gesuchten Flächenstückes desto näher, je größer n, oder in je mehr Theile QQ' getheilt ist.

Es sey z. B. die Gleichung der Curve $xy = 1$, also $y = \frac{1}{x}$, und das Flächenstück von $x' = 1$ bis $x'' = 2$ zu berechnen, dessen Inhalt wir durch die Formel $\int_1^2 y\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = log\,2$, und folglich gleich 0,69314718... finden. Hier ist nun $h = x''-x' = 1$, und wenn wir h in 10 gleiche Theile theilen, so ist $\frac{h}{n} = 0{,}1$; ferner $y' = 1$; $y_1 = \frac{1}{1{,}1}$; $y_2 = \frac{1}{1{,}2}$; $y_3 = \frac{1}{1{,}3}$; ....$y'' = \frac{1}{2}$; und nach der obigen Formel

$$S = \tfrac{1}{10}\left\{\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{2})+\tfrac{10}{11}+\tfrac{10}{12}+\tfrac{10}{13}+\ldots.+\tfrac{10}{19}\right\} = 0{,}69377....$$

Wir sehen also, daß der auf diese Weise gefundene Werth nur bis auf die dritte Decimalstelle richtig ist.

II. Setzen wir aber an die Stelle der zu quadrirenden Curve eine parabolische Linie, so können wir uns der Formeln des §. 108. bedienen. Nehmen wir das vorige Beispiel wieder auf, und setzen eine Parabel zweiten Grades, welche mit der gegebenen Curve $xy = 1$ die Punkte, deren Abscissen $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$ und $x = 2$ sind, gemein hat, an die Stelle derselben; so haben wir, nach der Bezeichnung des §. 108., $y_0 = 1$, $y_1 = \frac{2}{3}$ und $y_2 = \frac{1}{2}$, daher nach der ersten dort angegebenen Formel, $6S_2 = 1+\frac{1}{2}+\frac{8}{3}$, also $S_2 = \frac{25}{36} = 0{,}69444444...$, einen Werth, der allerdings nur bis auf zwei Decimalstellen mit dem genauen Werth des gesuchten Flächeninhalts übereinstimmt. Nehmen wir aber Parabeln höherer Ordnungen oder, was dasselbe ist, mehr als drei Ordinaten, so erhalten wir, vermittelst der Formeln des §. 108. III., nach der Reihe,

§. 114.

$$S_2 = 0{,}69444444 \;;\; S_6 = 0{,}69314806$$
$$S_3 = 0{,}69375000 \;;\; S_7 = 0{,}69314773$$
$$S_4 = 0{,}69317460 \;;\; S_8 = 0{,}69314721 .$$
$$S_5 = 0{,}69316385 \;;$$

Diese Werthe nähern sich, wie wir sehen, dem Werthe 0,69314718 immer mehr und mehr, und der letzte derselben ist um weniger als 0,00000004 von dem richtigen Werthe verschieden.

III. Wir können aber auch, wenn wir an die Stelle der zu quadrirenden Curve eine paraboliſche Linie setzen wollen, mit noch größerm Vortheile die Formel $S = h\{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \ldots + \alpha_{m+1} y_{m+1}\}$ des §. 109. anwenden, weil wir hierdurch mit weniger Ordinaten dieselbe Genauigkeit erreichen. Dies zeigt sich durch die Anwendung auf das vorige Beispiel. Es ergiebt sich nämlich, wenn wir die, in der Zusammenstellung (S. 505. u. 506.) aufgeführten Werthe von n und α benutzen, für den Flächenraum der Curve $xy = 1$, von $x = 1$ bis $x = 2$, und zwar

I. für $m = 1$ oder zwei Ordinaten, $S = 0{,}69230769$,
II. » $m = 2$ oder drei Ordinaten, $S = 0{,}69312167$,
III. » $m = 3$ oder vier Ordinaten, $S = 0{,}69314641$,
IV. » $m = 4$ oder fünf Ordinaten, $S = 0{,}69314716$.

Der letzte dieser Werthe differirt von dem wahren Werthe des in Rede stehenden Flächeninhalts, wie wir sehen, um weniger als 0,00000003, obgleich nur fünf Ordinaten angewendet worden sind.

Das Vorstehende wird einigermaßen den Grad der Genauigkeit kennen lehren, den man durch die drei angegebenen Näherungsmethoden erreicht. Vor der Anwendung derselben ist es aber immer unerläßlich, sich zu überzeugen, daß die zu quadrirende Curve in dem Umfange des gesuchten Integrals keinen Rückkehrpunkt und keine andere ausgezeichneten Punkte enthält.

Von der Rectification der Curven.

§. 115.

Aufgabe [190]. Die Gleichung einer Curve in rechtwinkligen oder Polar-Coordinaten ist gegeben. Es soll die Länge eines Bogens derselben gefunden werden.

I. Es

I. Es sey MN die gegebene Curve; B und G seyen die Endpunkte des zu rectificirenden Bogens, und $Ab = a_1$, $Ag = a_2$ die gegebenen Abscissen derselben. Nehmen wir auf der Curve MN einen beliebigen Punkt C an, dessen Abscisse $= x$ sey, so ist die Länge des Bogens BC, die wir durch s bezeichnen wollen, offenbar eine Function $\varphi(x)$ von x. Für einen dem Punkte C gehörig nahe liegenden Punkt C' der Curve ist der Bogen CC' durchaus convex oder durchaus concav gegen die Abscissenachse, oder, was dasselbe ist, die Ordinaten der Curve von C bis zu C' werden fortwährend wachsen oder fortwährend abnehmen; und wenn in C u. C' Tangenten an die Curve gezogen werden, so wird dann nothwendigerweise einer der beiden Winkel CTC', CT'C' ein stumpfer oder ein rechter, der andere aber ein spitzer Winkel seyn. Das Stück CT derjenigen Tangente, welche einen Schenkel des stumpfen oder rechten Winkels bildet, ist folglich kleiner als die diesem Winkel gegenüber liegende Sehne CC', und um so mehr kleiner als der Bogen CC' der Curve. Dagegen ist das Stück C'T' der andern Tangente größer als derselbe Bogen CC'; denn es ist $C'T' = C't + tT'$, $T't > Ct$, weil T't einem stumpfen oder rechten Winkel gegenüber liegt, demnach $C't + tT' > C't + Ct$, also auch $C'T' > C't + Ct$; und da, nach dem archimedischen Grundsatze, die gebrochene Linie $C'tC >$ Bogen CC', so ist um so mehr $C'T' >$ Bogen CC'. §. 115. Fig. 80.

Bezeichnen wir nun cc' durch h, so ist, weil $BC = s = \varphi(x)$, $BC' = \varphi(x+h)$, und somit

$$\text{Bogen } CC' = \varphi(x+h) - \varphi(x) .$$

Auch ist, da $Cc = y$, $CT = h\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$, oder, wenn wir $\frac{dy}{dx}$ durch $f(x)$ bezeichnen, $CT = h\sqrt{1+f(x)^2}$. Ferner aber $tang\, C'T'c'' = f(x+h)$, und folglich $C'T' = h\sqrt{1+f(x+h)^2}$. Wir haben also nach dem vorher Erwiesenen

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) > h\sqrt{1+f(x)^2} ,$$
$$\varphi(x+h) - \varphi(x) < h\sqrt{1+f(x+h)^2} ,$$

oder, wenn wir $\sqrt{1+f(x)^2}$ durch $F(x)$, und folglich $\sqrt{1+f(x+h)^2}$ durch $F(x+h)$ bezeichnen,

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) > hF(x) ,$$
$$\varphi(x+h) - \varphi(x) < hF(x+h) .$$

Wir haben aber auch nach dem Taylor'schen Satze, und da $\varphi(x) = s$,

§. 115.

$$\varphi(x+h) = \varphi(x)+\frac{ds}{dx}h+\tfrac{1}{2}\frac{d^2s}{dx^2}h^2+\frac{1}{2.3}\frac{d^3s}{dx^3}h^3+\text{ etc.},$$

$$F(x+h) = F(x)+\frac{dF}{dx}h+\tfrac{1}{2}\frac{d^2F}{dx^2}h^2+\frac{1}{2.3}\frac{d^3F}{dx^3}h^3+\text{ etc.},$$

folglich, durch Subſtitution,

$$\frac{ds}{dx}+\tfrac{1}{2}\frac{d^2s}{dx^2}h+\frac{1}{2.3}\frac{d^3s}{dx^3}h^2+\text{ etc.} > F(x),$$

$$\frac{ds}{dx}+\tfrac{1}{2}\frac{d^2s}{dx^2}h+\frac{1}{2.3}\frac{d^3s}{dx^3}h^2+\text{ etc.} < F(x)+\frac{dF}{dx}h+\tfrac{1}{2}\frac{d^2F}{dx^2}h^2+\text{ etc.},$$

zwei Relationen, welche für einen gehörig kleinen Werth von h und für alle kleinern Werthe von h Statt finden müſſen, was bekanntermaßen nur der Fall ſeyn kann, wenn

$$\frac{ds}{dx} = F(x)$$

iſt. Nun war aber $F(x) = \sqrt{1+f(x)^2} = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$; wir haben daher

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}, \qquad (1)$$

und erhalten daraus

$$s = \int\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}dx + C, \qquad (2)$$

oder, da $Ab = a_1$ und $Ag = a_2$, nach Beſtimmung der Conſtanten,

$$s = \int_{a_1}^{a_2}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}dx. \qquad (3)$$

II. Um den Ausdruck für den Bogen in Polarcoordinaten zu finden, iſt nur eine Transformation des Ausdrucks (1) erforderlich. Wir haben (§. 3. F. 10.)

$$y = u\sin t \quad ; \quad x = u\cos t;$$

daraus

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt}\sin t+u\cos t \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\cos t-u\sin t,$$

und alſo, weil $\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt} = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\cdot\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}}$,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{u^2 + \frac{du^2}{dt^2}}, \qquad (4) \cdot \text{§. 115.}$$

daher auch

$$s = \int \sqrt{u^2 + \frac{du^2}{dt^2}}\, dt + C. \qquad (5)$$

§. 116.

Aufgabe [191]. Die Parabeln, deren Gleichung $y = px^n$ ist, zu rectificiren.

Aus der Gleichung $y = px^n$ erhalten wir $\frac{dy}{dx} = npx^{n-1}$, daher nach §. 115. (F. 2.)

$$s = \int \sqrt{1 + n^2p^2x^{2n-2}}.dx + C.$$

I. Wenn $\frac{1}{2n-2}$ eine ganze Zahl ist, so läßt sich dieses Integral algebraisch darstellen; und das ist der Fall, wenn $n = \frac{3}{2}$, oder $\frac{5}{4}$, oder $\frac{7}{6}$, oder ... ist. Namentlich ist für $n = \frac{3}{2}$, oder wenn $y^2 = p^2x^3$, also für die Neilische Parabel (§. 58. G. 6),

$$s = \int \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}p^2x}.dx + C = \frac{8}{27p^2}(1 + \tfrac{9}{4}p^2x)^{\frac{3}{2}} + C,$$

oder, wenn sich die Bogen im Rückkehrpunkte der Curve anfangen, also das Integral für $x = 0$ verschwinden soll,

$$s = \frac{8}{27p^2}\{(1 + \tfrac{9}{4}p^2x)^{\frac{3}{2}} - 1\}.$$

II. Wenn $\frac{1}{2n-2}$ keine ganze Zahl ist, so läßt sich das Integral nicht algebraisch darstellen.

Für die Parabel zweiten Grades, $y = \frac{1}{p}x^2$, ist $n = 2$ und daher

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{4x^2}{p^2}}\, dx = \frac{x}{2p}\sqrt{p^2 + 4x^2} + \frac{p}{4} log\left(\frac{2x + \sqrt{p^2 + 4x^2}}{p}\right) + C,$$

wo die Constante gleich Null zu setzen ist, wenn sich die Bogen im Scheitel der Curve anfangen sollen. Für einen Bogen, dessen Endpunkte den Abscissen x_1, x_2 entsprechen, hat man

§. 116. $$s = \frac{1}{2p}\{x_2\sqrt{p^2+4x_2^2} - x_1\sqrt{p^2+4x_1^2}\} + \frac{p}{4} log \frac{2x_2+\sqrt{p^2+4x_2^2}}{2x_1+\sqrt{p^2+4x_1^2}}.$$

Unter den Linien zweiten Grades ist die Parabel die einzige Curve, welche sich durch einen geschlossenen Ausdruck rectificiren läßt. Für die Ellipse, deren Gleichung $a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2$, erhält man, wenn $a^2-b^2 = e^2$ gesetzt wird, $s = \int \frac{\sqrt{a^4-e^2x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}dx$, oder, wenn man $a = 1$ setzt,

$$s = \int \frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Für die Hyperbel, deren Gleichung $a^2y^2-b^2x^2 = -a^2b^2$, eben so, wenn $a^2+b^2 = e^2$, $s = \int \frac{\sqrt{e^2x^2-a^4}}{a\sqrt{x^2-a^2}}dx$, oder, wenn man $a = 1$ setzt,

$$s = \int \frac{\sqrt{e^2x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}dx.$$

Die beiden angegebenen Integrale lassen sich durch keinen geschlossenen Ausdruck darstellen; sie gehören zu derjenigen Gattung transscendenter Functionen, welche elliptische Functionen genannt werden.

Aufgabe [192]. *Es sollen nachbenannte Curven rectificirt werden.*

I. Die Cissoide.

Aus der Gleichung der Curve (§. 59. S. 8) erhalten wir $y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{c-x}}$, und

$$s = \int \frac{c\sqrt{4c-3x}}{2(c-x)^{\frac{3}{2}}}dx = \tfrac{1}{2}c\int \frac{1}{c-x}\sqrt{\frac{4c-3x}{c-x}}dx.$$

Um zu integriren, setzen wir $\frac{4c-3x}{c-x} = z^2$, woraus $x = \frac{c(z^2-4)}{z^2-3}$ und $\frac{dx}{dz} = \frac{2cz}{(z^2-3)^2}$ folgt, und daher ist

$$s = c\int \frac{z^2}{z^2-3}dz = c\left\{z+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,log\frac{\sqrt{3}-z}{\sqrt{3}+z}\right\}+C,$$

woraus sich, wenn wir wieder für z den dadurch vertretenen Ausdruck substituiren,

$$s = c\left\{\frac{\sqrt{4c-3x}}{\sqrt{c-x}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log\frac{\sqrt{3(c-x)}-\sqrt{4c-3x}}{\sqrt{3(c-x)}+\sqrt{4c-3x}}\right\}+C\,.$$ §. 116.

ergiebt. Soll dieſes Integral für $x = 0$ verſchwinden, ſo iſt

$$C = -c\left\{2+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}\right\}$$

zu ſetzen.

II. Die logarithmiſche Linie.

Aus ihrer Gleichung $y = me^{\frac{x}{m}}$ erhalten wir $x = m\log\frac{y}{m}$ und $\frac{dx}{dy} = \frac{m}{y}$, alſo

$$s = \int\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}dy = \int\frac{\sqrt{y^2+m^2}}{y}dy+C\,,$$

und wenn wir die Integration ausführen,

$$s = \sqrt{y^2+m^2}+m\log\frac{\sqrt{m^2+y^2}-m}{y}+C\,.$$

III. Die Kettenlinie.

Aus ihrer Gleichung $y = \frac{1}{2}m\left\{e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}\right\}$ erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}\right),$$

und daher

$$s = \tfrac{1}{2}\int\left(e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}\right)dx = \tfrac{1}{2}m\left(e^{\frac{x}{m}}-e^{-\frac{x}{m}}\right),$$

wo keine Conſtante hinzu zu fügen iſt, wenn die Bogen ſich im Scheitel der Curve anfangen ſollen. Dann iſt auch $s = m\frac{dy}{dx}$, und hieraus ergiebt ſich eine einfache Conſtruction für die Länge eines Bogens BP der Curve. Man ziehe nämlich die Tangente im Endpunkte P dieſes Bogens und fälle Fig. 73.
von B aus BD ſenkrecht auf dieſe Tangente, ſo iſt AD = Bogen BP; denn es iſt AB = m, $tang\,ABD = \frac{dy}{dx}$, folglich $AD = m\frac{dy}{dx} = BP$.

Für einen andern im Scheitel B anfangenden Bogen BP′ iſt auf gleiche Weiſe AD′ = BP′; daher iſt denn

§. 116. Bogen $PP' = DD'$.

IV. Die Kreisevolvente.

Wir erhalten aus der Gleichung dieser Curve (§. 66. S. 2)

$$\frac{dt}{du} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{au}.$$

Nun ist Bogen $s = \int \sqrt{u^2 + \frac{du^2}{dt^2}}\, dt = \int \sqrt{u^2 + \frac{du^2}{dt^2}} \cdot \frac{dt}{du} \cdot du$,

folglich

$$s = \int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - a^2}} \cdot \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{au}\, du = \int \frac{u}{a}\, du$$

oder

$$s = \frac{u^2}{2a} + C.$$

Fig. 49. Soll der Bogen im Punkte A anfangen, also das Integral für $t = 0$ oder für $u = a$ verschwinden, so muß $C = -\frac{1}{2}a$ gesetzt werden. Wir haben demnach

$$s = \frac{u^2 - a^2}{2a}.$$

Dieser Ausdruck giebt folgende Construction. Man ziehe von dem Endpunkte B' des Bogens AB' die Tangente B'B an den Grundkreis, ferner OB, und errichte auf OB' in B' die Senkrechte B'Q, welche die verlängerte OB in Q schneidet, halbire BQ in S, so ist BS = SQ = Bogen AB'. Denn es ist $BB' = \sqrt{u^2 - a^2}$ und $OB = a$, also $QB = \frac{\overline{BB'}^2}{OB} = \frac{u^2 - a^2}{a}$; folglich $BS = SQ = \frac{1}{2}BQ = \frac{u^2 - a^2}{2a} = s$.

V. Die Cycloide.

Wir haben $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}}$ und $s = \int \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}} \cdot dt$. Nun ist (§. 66. S. 3)

$$x = a(t - \sin t) \quad ; \quad y = a(1 - \cos t),$$

also

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t,$$

und somit §. 116.

$$s = \int a\sqrt{2(1-\cos t)}.dt = 2a\int \sin\tfrac{1}{2}t.dt = -4a\cos\tfrac{1}{2}t + C .$$

Sollen die Bogen sich im Punkte A' anfangen, so muß das Integral für Fig. 74.
$t = 0$ verschwinden, und es ist daher $C = 4a$ zu setzen, so daß wir haben

$$s = 4a(1-\cos\tfrac{1}{2}t) .$$

Für den Punkt A ist $t = 2\pi$, also $\cos\frac{1}{2}t = \cos\pi = -1$, folglich Bogen A'BA $= 8a$ oder gleich dem vierfachen Durchmesser des rollenden Kreises.

Da Winkel $mqr = \frac{1}{2}mor = \frac{1}{2}t$, so ist die Sehne $mq = 2a\cos\frac{1}{2}t$, und da der cycloidalische Bogen $pB = A'B - A'p = 4a - \{4a - 4a\cos\frac{1}{2}t\}$ $= 4a\cos\frac{1}{2}t$, so folgt, daß cycl. Bogen $pB = 2\,Chord.\,mq$.

VI. Die Epicycloide.

Setzen wir in $s = \int \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}}\,dt$ die in §. 72. (Aufg. 116. IX.) angegebenen Ausdrücke für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$, so kommt

$$s = 2(r+a)\int \sin\frac{r}{2a}t.dt = -\frac{4a(r+a)}{r}\cos\frac{r}{2a}t + C .$$

Soll dieses Integral für $t = 0$ verschwinden, so muß $C = \frac{4a(r+a)}{r}$ gesetzt werden, und alsdann ist

$$s = \frac{4a(r+a)}{r}\left(1 - \cos\frac{r}{2a}t\right) .$$

Hierbei ist zu bemerken, daß, weil die, unter dem Integralzeichen befindliche, Größe $\sin\frac{r}{2a}t$ das Zeichen ändert wenn $\frac{r}{2a}t$ durch den Werth π geht, der für s gefundene Ausdruck die wirkliche Länge des Bogens nur so lange ausdrückt, als $\frac{r}{2a}t$ zwischen 0 und π, also als t zwischen 0 und $\frac{2a}{r}\pi$ liegt. Für diesen letzten Grenzwerth von t, welchem der auf den Anfangspunkt nächstfolgende Rückkehrpunkt der Curve entspricht, ist $s' = \frac{4a(r+a)}{r}(1-\cos\pi) = \frac{8a(r+a)}{r}$, also $s' : 8a = r+a : r$, oder die Länge dieses Bogens verhält sich zu dem vierfachen Durchmesser des rollen-

§. 116. den Kreises wie die Summe der Radien beider Kreise zu dem Radius des Grundkreises. Setzen wir $\frac{r}{a} = n$, so ist $s' = 8\frac{n+1}{n}a = 8\frac{n+1}{n^2}r$.

Ist n eine ganze Zahl, so besteht die Curve aus n solcher Bogen, und der Perimeter der Curve ist daher

$$8(n+1)a = \frac{8(n+1)}{n}r .$$

So ist z. B. der Perimeter der Cardioide, für welche $n = 1$, gleich 16a oder gleich dem achtfachen Durchmesser des Kreises.

VII. Die Hypocycloide.

Wir können die Länge des Bogens aus dem in VI. gefundenen Ausdrucke herleiten, indem wir $-a$ für a setzen. Dies giebt uns

$$s = \frac{4a(r-a)}{r}\left(\cos\frac{r}{2a}t - 1\right) ,$$

einen Ausdruck, der von $t = 0$ bis $t = \frac{2a}{r}\pi$ genommen, $s' = \frac{8a(r-a)}{r}$ giebt. Ist $\frac{r}{a} = n$ eine ganze Zahl, so ist der Perimeter der Curve

$$8(n-1)a = \frac{8(n-1)}{n}r .$$

So ist z. B. der Perimeter der in der Aufgabe [157] betrachteten Curve (§. 95.), welche eine Hypocycloide für die $n = 4$, dem zwölffachen Durchmesser des rollenden Kreises oder dem dreifachen Durchmesser des Grundkreises 6k gleich.

VIII. Die logarithmische Spirale.

Aus der Gleichung $u = re^{\frac{t}{m}}$ erhalten wir $\frac{du}{dt} = \frac{r}{m}e^{\frac{t}{m}}$, also

$$s = \int\sqrt{u^2 + \frac{du^2}{dt^2}}\,dt = r\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\int e^{\frac{t}{m}}dt + C ,$$

folglich

$$s = r\sqrt{1+m^2}.e^{\frac{t}{m}} + C = \sqrt{1+m^2}.u + C .$$

Soll das Integral für $u = 0$ verschwinden, so ist

$$s = \sqrt{1+m^2}.u .$$

Obgleich also die Curve um den Punkt A unendlich viele Windungen macht, §. 116. so ist die Länge eines Bogens von irgend einem Punkte P, dessen Radius Fig. 56. vector u ist, bis zu jenem Punkte A eine endliche Größe $\sqrt{1+m^2}.u$, und zwar, da mu die Polarsubtangente (§. 72.), der von der Polarsubtangente begrenzten Tangente PT des Punktes P gleich.

§. 117.

Aufgabe [193]. Den Bogen der Evolute einer Curve durch die beiden Krümmungsradien dieser Curve, welche ihn begrenzen, auszudrücken.

Es seyen x, y die rechtwinkligen Coordinaten der Curve, und α, β diejenigen der Evolute. Alsdann haben wir, zufolge §. 83., die Gleichungen

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \varrho^2 , \qquad (1.)$$

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx}+(x-\alpha) = 0 , \qquad (2)$$

$$(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+1+\frac{dy^2}{dx^2} = 0 . \qquad (3)$$

Differentiiren wir die beiden ersten Gleichungen, indem wir y als Function von x, und x sowohl als β u. ϱ als Functionen von α ansehen, so kommt

$$\left\{(y-\beta)\frac{dy}{dx}+(x-\alpha)\right\}\frac{dx}{d\alpha}-\left\{(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}+(x-\alpha)+\varrho\frac{d\varrho}{d\alpha}\right\} = 0 ,$$

$$\left\{(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+1+\frac{dy^2}{dx^2}\right\}\frac{dx}{d\alpha}-\left\{\frac{dy}{dx}\frac{d\beta}{d\alpha}+1\right\} = 0 ;$$

und diese Gleichungen reduciren sich, in Folge der Gleichungen (2) und (3), auf

$$(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}+(x-\alpha)+\varrho\frac{d\varrho}{d\alpha} = 0 , \qquad (4)$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{d\beta}{d\alpha}+1 = 0 . \qquad (5)$$

Elimiriren wir zwischen den Gleichungen (1, 2, 4 und 5) die Größen $(y-\beta)$, $(x-\alpha)$ und $\frac{dy}{dx}$, so kommt

$$\frac{d\varrho^2}{d\alpha^2} = 1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2} , \text{ also } \frac{d\varrho}{d\alpha} = \sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}} . \qquad (6)$$

Folglich ist

§. 117. Nehmen wir die Integrale von beiden Theilen dieser Gleichung, so kommt

$$s' = s \mp a\, arc(tang = p) + C ,$$

oder, wenn wir $p = tang\, v$ setzen,

$$s' = s \mp av + C .$$

Da $\frac{dy}{dx} = p$ die trigonometrische Tangente des Winkels ist, welchen die Tangente mit der Abscissenachse bildet, so ist $v = arc(tang = p)$ dieser Winkel selbst. Wenn daher v_1 die Größe dieses Winkels für den Anfangspunkt der Bogen s bezeichnet, so ist, da s und s' zugleich verschwinden sollen, $0 = \mp v_1 + C$ oder $C = \pm v_1$; folglich ist

$$s' = s \mp a(v - v_1) \quad \text{oder} \quad s' - s = \mp a(v - v_1) . \qquad (8)$$

Nun ist aber $v - v_1$ der Unterschied der beiden Winkel, welchen die Tangenten oder auch die Normalen in den Endpunkten des Bogens s mit der Abscissenachse bilden, und daher ist $v - v_1$ dem Winkel gleich, welchen die Normalen dieser Endpunkte einschließen. Hieraus ergiebt sich:

Die Differenz der Bogen zweier parallelen Curven, welche von denselben Normalen begrenzt werden, ist einem Kreisbogen gleich, dessen Radius der Entfernung a der beiden Curven, und dessen Mittelpunktswinkel dem von jenen Normalen eingeschlossenen Winkel gleich ist.

Wenn also die Länge von einem der beiden Bogen s, s' und der Winkel, welchen die Normalen in den Endpunkten einschließen, gegeben ist, so kann die Länge des andern leicht gefunden werden.

Vermittelst der eben aufgestellten Relation zwischen den Bogen paralleler Curven können wir auch einen Ausdruck für den Flächenraum finden, welcher zwischen zwei Bogen paralleler Curven und den gemeinschaftlichen Normalen ihrer Endpunkte enthalten ist. Bezeichnen wir dieses Flächenstück durch Σ, die Flächenräume aber, welche zwischen jeder der beiden Curven und ihrer Evolute enthalten sind, und von denselben beiden Normalen begrenzt werden, durch S und S', so ist im Allgemeinen offenbar

$$\Sigma = S' - S , \quad \text{also} \quad \frac{d\Sigma}{dx} = \frac{dS'}{dx'}\frac{dx'}{dx} - \frac{dS}{dx} ,$$

wo, nach §. 112. (G. 1),

$$\frac{dS'}{dx'} = \tfrac{1}{2}.\frac{(1+p'^2)^2}{q'} \quad ; \quad \frac{dS}{dx} = \tfrac{1}{2}.\frac{(1+p^2)^2}{q} .$$

Nun ist aber (§. 92. S. 5) $p' = p$, daher $\frac{dp'}{dx'} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dx'}$, d. i. $q' =$ §. 117.
$q\frac{dx}{dx'}$, und wenn wir diese Werthe in den so eben genannten Ausdruck von $\frac{dS'}{dx'}$ setzen, $\frac{dS'}{dx'} = \frac{1}{2}.\frac{(1+p^2)^2}{q}.\frac{dx'}{dx}$. Hieraus ergiebt sich nun

$$\frac{d\Sigma}{dx} = \frac{1}{2}.\frac{(1+p^2)^2}{q}.\left\{\frac{dx'^2}{dx^2} - 1\right\}.$$

Es ist aber, wie schon oben angegeben,

$$\frac{dx'}{dx} = 1 \mp \frac{aq}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ also ist } \frac{dx'^2}{dx^2} - 1 = \frac{a^2q^2}{(1+p^2)^3} \mp \frac{2aq}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}},$$

folglich

$$\frac{d\Sigma}{dx} = \frac{1}{2}.\frac{a^2q}{(1+p^2)} \mp a\sqrt{1+p^2},$$

und hieraus erhalten wir durch Integration

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}a^2\int\frac{q}{(1+p^2)}.dx \mp a\int\sqrt{1+p^2}.dx,$$

das ist

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}a^2 arc(tang = p) \mp as + C,$$

wo $s = \int\sqrt{1+p^2}dx$ den Bogen der einen parallelen Curve bezeichnet. Bezeichnen wir nun, wie oben, p durch *tang* v, und den Werth, welchen v im Anfangspunkte des Bogens hat, durch v_1, so ist, da Σ und s zugleich verschwinden sollen, wenn C hiernach bestimmt worden,

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}a^2(v - v_1) \mp as. \qquad (9)$$

Es ist aber $\frac{1}{2}a^2(v - v_1)$ der Inhalt eines Kreissectors, dessen Radius der Entfernung a der beiden Curven, und dessen Mittelpunktswinkel dem von den Grenznormalen eingeschlossenen Winkel $v - v_1$ gleich ist; ferner ist as der Inhalt eines Rechtecks, dessen Seiten dem Bogen s der einen von beiden Curven, und derselben Entfernung a gleich sind. Daher enthält die zuletzt gefundene Gleichung folgenden Satz:

Der Flächenraum zwischen den Bogen zweier parallelen Curven und den gemeinschaftlichen Normalen ihrer Endpunkte ist gleich der Summe oder dem Unterschiede des Rechtecks, dessen Seiten dem Bogen der einen von beiden Curven und der Entfernung derselben gleich sind, und eines Kreissectors, des-

§. 117. ſen Radius dieſelbe Entfernung, deſſen Winkel am Mittelpunkte aber der von den begrenzenden Normalen eingeſchloſſene Winkel iſt.

Wir können den in Rede ſtehenden Flächenraum auch noch auf eine andere Weiſe ausdrücken. Da nämlich, zufolge der Gleichung (8),

$$s = s' \pm a(v - v_1) ,$$

ſo iſt, durch Subſtitution in (9),

$$\Sigma = -\tfrac{1}{2}a^2(v - v_1) \mp as' , \qquad (10)$$

und, wenn wir die halbe Summe der Ausdrücke (9) u. (10) bilden,

$$\Sigma = \pm\tfrac{1}{2}a(s \mp s') . \qquad (11)$$

Daher der folgende Satz:

Der Flächenraum zwiſchen den correſpondirenden Bogen zweier parallelen Curven und den gemeinſchaftlichen Normalen ihrer Endpunkte iſt dem Flächenraume eines Paralleltrapezes gleich, deſſen parallele Seiten jenen Bogen, und deſſen Höhe ihrer Entfernung gleich ſind.

Beide Sätze *) ſind, ſo wie ſie hier ausgeſprochen werden, aber dahin einzuſchränken, daß die parallelen Bogen keine Inflexionspunkte oder Rückkehrpunkte enthalten dürfen.

Aufgabe [195]. Den Bogen s' einer Brennlinie B durch den correſpondirenden Bogen s der zugehörigen Brennlinie A auszudrücken.

Stellen wir uns eine Evolvente A' der Curve A und die einhüllende Curve B' aller im Lehrſatz [49] (§. 102.) erwähnten Kreiſe vor, ſo iſt die Curve B' eine Evolvente der Curve B. Ein einfallender Strahl δ_1, von ſeinem Berührungspunkte auf der Curve A bis zur brechenden Curve C gerechnet, beſteht aus zwei Stücken ϱ_1 und σ_1, von welchen ϱ_1 der Krümmungsradius der Curve A' iſt. Der gebrochene (oder zurückgeworfene) Strahl δ'_1, von der brechenden Curve C bis zu ſeinem Berührungspunkte auf der Curve B gerechnet, beſteht aus zwei Stücken ϱ'_1 und σ'_1, von welchen ϱ'_1 der Krümmungsradius der Curve B' iſt. Es iſt alſo

$$\delta_1 \mp \varrho_1 = \sigma_1 \quad \text{und} \quad \delta'_1 \mp \varrho'_1 = \sigma'_1 .$$

Zufolge des erwähnten Lehrſatzes [49] in §. 102. iſt aber auch

---

*) Wir haben ſie und den oben von der Relation der Bogen gegebenen, zuerſt in dem Mémoire sur le parallélisme des lignes et surfaces courbes par Crelle (Ann. d. math. p. et a. T. XII.) gefunden.

$$\frac{\sigma_1}{n} = \frac{\sigma'_1}{n'} ;$$ §. 117.

also ist

$$\frac{1}{n}\{\delta_1 \mp \varrho_1\} = \frac{1}{n'}\{\delta'_1 \mp \varrho'_1\} .$$

Für einen andern einfallenden Strahl δ_2 und seinen gebrochenen (oder zurückgeworfenen) δ'_2 haben wir eben so

$$\frac{1}{n}\{\delta_2 \mp \varrho_2\} = \frac{1}{n'}\{\delta'_2 \mp \varrho'_2\} ;$$

und durch Subtraction erhalten wir

$$\frac{1}{n}\{(\delta_2 - \delta_1) \mp (\varrho_2 - \varrho_1)\} = \frac{1}{n'}\{(\delta'_2 - \delta'_1) \mp (\varrho'_2 - \varrho_1)\} .$$

Da nun aber $(\varrho_2 - \varrho_1)$ dem Bogen s der Evolute oder Brennlinie A (Aufg. 193.), und $(\varrho'_2 - \varrho'_1)$ dem correspondirenden Bogen s' der Brennlinie B gleich ist, so haben wir

$$\frac{1}{n}\{\delta_2 - \delta_1 \mp s\} = \frac{1}{n'}\{\delta'_2 - \delta'_1 \mp s'\} ,$$

eine Gleichung, aus welcher s' vermittelst s bestimmt werden kann.

Hierbei ist aber zu bemerken, daß diese Relation nur unter der Beschränkung Statt findet, daß sich innerhalb der Bogen s und s' keine ausgezeichneten Punkte befinden.

§. 118.

Aufgabe [196]. Unter allen Sectoren einer gegebenen Curve, welche dieselbe Spitze und einen gegebenen Winkel an der Spitze haben, denjenigen zu finden, in welchem der Bogen der Curve ein Maximum oder Minimum ist.

Es sey $u = \varphi(t)$ die gegebene Gleichung der Curve in Polarcoordinaten, deren Pol die gemeinschaftliche Spitze der Sectoren ist, und $\frac{du}{dt} = \varphi'(t)$. Ferner sey ϑ der gegebene constante Winkel, welchen die Schenkel eines Sectors einschließen, und s der Bogen des Sectors. Alsdann ist

$$s = \int_0^{t+\vartheta} \sqrt{\varphi(t)^2 + \varphi'(t)^2} - \int_0^t \sqrt{\varphi(t)^2 + \varphi'(t)^2} ,$$

und, da s ein Maximum oder Minimum seyn soll, $\frac{ds}{dt} = 0$ oder $\frac{ds}{dt} = \infty$

§. 118. zu ſetzen. Nun iſt aber einleuchtend, daß das erſte der beiden Integrale, in welchem nach vollzogener Integration $t+\vartheta$ für t zu ſetzen iſt, wenn es nach t differentiirt wird, $\sqrt{\varphi(t+\vartheta)^2+\varphi'(t+\vartheta)^2}$ geben muß, und demnach haben wir

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi(t+\vartheta)^2+\varphi'(t+\vartheta)^2} - \sqrt{\varphi(t)^2+\varphi'(t)^2} .$$

Es drückt aber, da $\frac{du}{dt} = \varphi'(t)$ der Polarſubnormale gleich iſt (§. 71. F. 16.), $\sqrt{\varphi(t)^2+\varphi'(t)^2} = \sqrt{u^2+\frac{du^2}{dt^2}}$ die Entfernung des einen Endpunktes des Bogens von dem Endpunkte ſeiner Polarſubnormale, und eben ſo $\sqrt{\varphi(t+\vartheta)^2+\varphi'(t+\vartheta)^2}$ die Entfernung des andern Endpunktes von dem Endpunkte ſeiner Polarſubnormale aus. Soll alſo $\frac{ds}{dt} = 0$ ſeyn, ſo müſſen beide Entfernungen einander gleich ſeyn, und wenn wir demnach von dem Falle, in welchem $\frac{ds}{dt} = \infty$ ſeyn kann, abſtrahiren, ſo ergiebt ſich, daß

für ein Maximum oder Minimum die Entfernungen der Endpunkte des Bogens von den Endpunkten ihrer Polarſubnormalen einander gleich ſeyn müſſen.

Die Gleichung

$$\sqrt{\varphi(t+\vartheta)^2+\varphi'(t+\vartheta)^2} = \sqrt{\varphi(t)^2+\varphi'(t)^2}$$

reicht im Allgemeinen hin, t zu beſtimmen. Nach geſchehener Beſtimmung muß, vermittelſt der folgenden Differentialcoefficienten $\frac{d^2s}{dt^2}$, $\frac{d^3s}{dt^3}$, etc., unterſucht werden, ob für den gefundenen Werth von t ein Maximum oder ein Minimum oder keins von beiden Statt findet.

Aufgabe [197]. Unter allen Sectoren einer gegebenen Curve, welche dieſelbe Spitze haben und die von Bogen begrenzt werden, deren Länge gleich und gegeben iſt, denjenigen zu finden, deſſen Flächenhalt ein Maximum oder Minimum iſt.

Es ſey $u = \varphi(t)$ die gegebene Gleichung der Curve in Polarcoordinaten, deren Pol die gemeinſchaftliche Spitze der Sectoren iſt, und a die gegebene Länge der, die Sectoren begrenzenden, Bogen, ſo iſt, wenn t, u und t', u' die Coordinaten der Endpunkte der Bogen bezeichnen,

$$\int_0^{t'} \sqrt{u^2+\frac{du^2}{dt^2}}.dt - \int_0^{t} \sqrt{u^2+\frac{du^2}{dt^2}}.dt = a\ ; \qquad (1)$$ §. 118.

und differentiiren wir dieſe Gleichung nach t, ſo haben wir

$$\sqrt{u'^2+\frac{du'^2}{dt'^2}\frac{dt'}{dt}} - \sqrt{u^2+\frac{du^2}{dt^2}} = 0\ . \qquad (2)$$

Der Flächeninhalt S eines ſolchen Sectors aber iſt

$$S = \int_0^{t'} u^2 dt - \int_0^{t} u^2 dt\ ,$$

woraus durch Differentiation nach t

$$\frac{dS}{dt} = u'^2\frac{dt'}{dt} - u^2$$

folgt. Setzen wir, indem wir von dem Falle, in welchem $\frac{dS}{dt} = \infty$ ſeyn kann, abſtrahiren, $\frac{dS}{dt} = 0$, ſo haben wir

$$u'^2\frac{dt'}{dt} - u^2 = 0\ , \qquad (3)$$

und wenn wir $\frac{dt'}{dt}$ zwiſchen den Gleichungen (2) und (3) eliminiren,

$$\frac{u'}{\sqrt{1+\frac{1}{u'^2}\frac{du'^2}{dt'^2}}} = \frac{u}{\sqrt{1+\frac{1}{u^2}\frac{du^2}{dt^2}}}\ . \qquad (4)$$

Da nun $\frac{1}{u}\frac{du}{dt}$ die trigonometriſche Tangente des Winkels iſt, welchen die Normale mit dem Radius vector bildet (§. 71. Aufgabe 115.), ſo iſt $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u^2}\frac{du^2}{dt^2}}}$ der Coſinus dieſes Winkels, und daher bedeutet $\frac{u}{\sqrt{1+\frac{1}{u^2}\frac{du^2}{dt^2}}}$ das Stück der Normale, welches die vom Pole aus gefällte Senkrechte auf derſelben begrenzt. Es ergiebt ſich demnach, daß für ein Maximum oder Minimum die Stücke der Normalen der Endpunkte des Bogens, welche von dieſen Endpunkten und den, von der gegebenen Spitze der Sectoren auf die Nor-

§. 118. malen gefällten Senkrechten begrenzt werden, einander gleich sind.

Die Gleichungen (1) und (4) in Verbindung mit den Gleichungen $u = \varphi(t)$ und $u' = \varphi(t')$ reichen im Allgemeinen hin, die vier Größen t, u, t' u. u' zu bestimmen. Nachdem diese Bestimmung geschehen ist, muß, wie gewöhnlich, untersucht werden ob ein Maximum oder Minimum oder keins von beiden Statt findet.

Aufgaben, welche auf Differentialgleichungen erster Ordnung führen.

§. 119.

Aufgabe [198]. Es soll die Curve gefunden werden, für welche die Subtangente eine gegebene Function der Ordinate ist.

Es sey $\varphi(y)$ die gegebene Function, so haben wir (§. 71. F. 9.)

$$y\frac{dx}{dy} = \varphi(y), \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\varphi(y)}{y},$$

also durch Integration

$$x = \int \frac{\varphi(y)}{y} dy + C$$

als Gleichung der gesuchten Curve, in welcher C willkürlich ist, und so bestimmt werden kann, daß die Curve noch eine Bedingung, z. B. die durch einen gegebenen Punkt zu gehen, erfüllt.

Es sey z. B.

I. Die Subtangente constant und gleich m, so haben wie

$$x = \int \frac{m}{y} dy + C, \quad \text{oder} \quad x = m\,log\,y + C,$$

oder auch, wenn wir $-m\,log\,a$ für C setzen,

$$x = m\,log\frac{y}{a}, \quad \text{oder} \quad \frac{y}{a} = e^{\frac{x}{m}}.$$

Die gesuchte Curve ist also eine logarithmische Linie, und an keiner andern Curve ist die Subtangente constant.

II. Es sey $\varphi(y) = ny$, so ist §. 119.

$$x = \int n\,dy + C \,, \quad \text{oder} \quad x = ny + C \,.$$

Die gesuchte Linie ist also eine Gerade, und keine andere Linie hat die Eigenschaft, daß die Subtangente und Ordinate in einem constanten Verhältnisse stehen.

III. Es sey $\varphi(y) = ay^n$, so ist

$$x = a\int y^{n-1}dy + C \,, \quad \text{oder} \quad x - C = \frac{a}{n}y^n \,.$$

Die gesuchte Curve ist also, wenn n eine positive Zahl, eine Parabel nten Grades.

Aufgabe [199]. Es soll die Curve gefunden werden, an welcher die Subtangente eine gegebene Function der Abscisse ist.

Es sey $\varphi(x)$ die gegebene Function, so haben wir (§. 71. F. 9.)

$$y\frac{dx}{dy} = \varphi(x) \,, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi(x)} \,,$$

also durch Integration

$$log\frac{y}{C} = \int \frac{1}{\varphi(x)}dx \,,$$

oder auch

$$y = Ce^{\int \frac{1}{\varphi(x)}dx}$$

als Gleichung der gesuchten Curve, in welcher C eine willkürliche Constante ist, die nach einer noch hinzuzufügenden Bedingung bestimmt werden kann.

Es sey z. B. $\varphi(x) = nx$, so haben wir

$$log\frac{y}{C} = \frac{1}{n}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{n}log\,x = log\,x^{\frac{1}{n}}$$

oder

$$y = Cx^{\frac{1}{n}} \,.$$

Die Curve ist also, wenn n eine positive Zahl bedeutet, eine Parabel nten Grades.

Aufgabe [200]. Es soll die Curve gefunden werden, an welcher die Subnormale eine gegebene Function der Ordinate ist.

Es sey $\varphi(y)$ die gegebene Function, so haben wir (§. 71. F. 10)

§. 119.

$$y\frac{dy}{dx} = \varphi(y)\,, \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{\varphi(y)}\,;$$

also durch Integration

$$x = \int \frac{y}{\varphi(y)}dy + C$$

als Gleichung der Curve. Mit der Conſtanten C verhält es ſich hier und im Folgenden eben ſo wie in den beiden vorigen Aufgaben.

I. Es ſey z. B. die Subnormale conſtant, ſo iſt $\varphi(y) = a$, daher

$$x = \int \frac{y}{a}dy + C$$

oder

$$x = \frac{y^2}{2a} + C\,.$$

Die geſuchte Curve iſt demnach eine Parabel zweiten Grades, deren Parameter gleich 2a iſt; und an keiner andern Curve iſt die Subnormale conſtant.

II. Es ſey $a\varphi(y) = y^n$, ſo iſt

$$x = a\int y^{1-n}dy + C$$

oder

$$x = \frac{a}{2-n}y^{2-n} + C$$

die Gleichung der geſuchten Curve, welche alſo eine Parabel höherer Ordnung iſt, wenn $2-n$ eine poſitive Zahl.

Aufgabe [201]. Es ſoll die Curve gefunden werden, an welcher die Subnormale eine gegebene Function der Abſciſſe iſt.

Es ſey $\varphi(x)$ die gegebene Function, ſo haben wir (§. 71. F. 10.)

$$y\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\,,$$

und durch Integration

$$\tfrac{1}{2}y^2 = \int \varphi(x)dx + C$$

als Gleichung der geſuchten Curve.

Es ſey z. B. $\varphi(x) = ax^n$, ſo iſt $\int \varphi(x)dx = a\int x^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1}$, alſo

$$y^2 = \frac{2a}{n+1}x^{n+1} + C$$

die Gleichung der Curve.

Aufgabe [202]. Es soll die Curve gefunden werden, an welcher die Polarsubtangente eine gegebene Function des Leitstrahls ist. §. 119.

Es sey $\varphi(u)$ die gegebene Function, so ist (§. 71. F. 15.)

$$u^2\frac{dt}{du} = \varphi(u)\,, \quad \text{oder} \quad \frac{dt}{du} = \frac{\varphi(u)}{u^2}\,,$$

und, durch Integration,

$$t = \int \frac{\varphi(u)}{u^2}du + C$$

die Gleichung der gesuchten Curve.

Es sey z. B. $\varphi(u) = au^n$, so ist

$$t = a\int u^{n-2}du + C\,,$$

d. i.

$$t - C = \frac{a}{n-1}u^{n-1}\,,$$

die Curve also eine Spirale. Ist $n = 0$, also $\varphi(u) = a$, so folgt aus der gefundenen Gleichung

$$u(t-C) + a = 0\,;$$

die Spirale ist demnach alsdann eine hyperbolische (vergl. §. 72. Aufg. 117. III.).

Aufgabe [203]. Es soll die Curve gefunden werden, an welcher die Polarsubnormale eine gegebene Function des Leitstrahls ist.

Es sey $\varphi(u)$ die gegebene Function, so ist (§. 71. F. 16.)

$$\frac{du}{dt} = \varphi(u)\,, \quad \text{oder} \quad \frac{dt}{du} = \frac{1}{\varphi(u)}\,,$$

und, durch Integration,

$$t = \int \frac{1}{\varphi(u)}du + C$$

die Gleichung der gesuchten Curve.

Es sey z. B. $\varphi(u) = au^n$, so ist

$$t = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^n}du + C\,,$$

d. i.

$$t - C = \frac{u^{1-n}}{(1-n)a}\,,$$

die Curve also eine Spirale. Ist $n = 0$, also $\varphi(u) = a$, so folgt aus

§. 119. der gefundenen Gleichung

$$a(t-C) = u\ ;$$

die Spirale ist sodann die archimedische (vergl. §. 72. Aufg. 117. II.).

Aufgabe [204]. Es soll die Curve gefunden werden, an welcher die Tangente mit dem Leitstrahl einen Winkel bildet, der eine gegebene Function des Winkels ist, welchen der Leitstrahl mit der Abscissenachse macht.

Es sey $\varphi(t)$ die gegebene Function, so ist (§. 71. Aufg. 115.)

$$u\frac{dt}{du} = tang\,\varphi(t)\ , \quad \text{oder} \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dt} = \frac{1}{tang\,\varphi(t)}\ ,$$

und, durch Integration,

$$log\,u = \int \frac{1}{tang\,\varphi(t)}dt + C\ ,$$

oder auch

$$u = C.e^{\int \frac{1}{tang\,\varphi(t)}dt}$$

die Gleichung der gesuchten Curve.

I. Es sey der genannte Winkel constant, also $\varphi(t) = a$ und $tang\,\varphi(t) = tang\,a$, so ist $\int \frac{1}{tang\,\varphi(t)}dt = \int \frac{1}{tang\,a}dt = \frac{t}{tang\,a}$, folglich

$$u = Ce^{\frac{t}{tang\,a}}\ ,$$

die Curve also eine logarithmische Spirale. In dem besondern Falle, daß $a = \frac{1}{2}\pi$, ist $tang\,a = \infty$, daher $e^{\frac{t}{tang\,a}} = 1$ und $u = C$, die Curve also ein Kreis.

II. Es sey $\varphi(t) = nt$, so ist $\int \frac{1}{tang\,\varphi(t)}dt = \int \frac{1}{tang\,nt}dt = \frac{1}{n}log\,sin\,nt$, daher

$$u = C\,sin^{\frac{1}{n}}nt \quad \text{oder} \quad u^n = C^n\,sin\,nt\ .$$

Ist $n = 1$, so ist $u = C\,sin\,t$, also $u^2 = Cu\,sin\,t$, oder in rechtwinkligen Coordinaten $y^2+x^2 = Cy$, die Curve also ein Kreis, welcher die Abscissenachse im Anfangspunkte der Coordinaten berührt.

Ist $n = 2$, so ist $u^2 = C^2 \sin 2t$, oder, wenn wir die Abscissenachse um einen halben rechten Winkel drehen, und somit $t + \frac{1}{4}\pi$ für t setzen, $u^2 = C^2 \cos 2t$, die Curve also eine Lemniscate (§. 62. S. 3). §. 119.

§. 120.

Aufgabe [205]. Es soll die Curve gefunden werden, an welcher die Tangente eine gegebene Function der Ordinate ist.

Es sey $\varphi(y)$ die gegebene Function, so ist (§. 71. F. 11.)

$$y\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}} = \varphi(y), \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(\varphi y)^2 - y^2}}{y},$$

und, durch Integration,

$$x = \int \frac{\sqrt{(\varphi y)^2 - y^2}}{y} . dy + C$$

die Gleichung der Curve.

I. Es sey die Länge der Tangente constant, und also $\varphi(y) = a$, so haben wir

$$x = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy + C,$$

d. i.

$$x = \pm\sqrt{a^2 - y^2} \mp \tfrac{1}{2} a \log \frac{(a + \sqrt{a^2 - y^2})^2}{y^2} + C \qquad (1)$$

als Gleichung der gesuchten Curve.

Diese Curve gehört zu denjenigen, welche **Tractorien** genannt werden. (Eine **Tractorie** (**Zuglinie**) ist eine Curve, welche von dem einen Endpunkte eines nicht dehnbaren Fadens in einer horizontalen Ebene beschrieben wird, wenn der andere Endpunkt desselben auf einer in derselben Ebene befindlichen gegebenen Curve — in dem obigen Falle auf der Abscissenachse — sich fortbewegt, bei welcher Bewegung aber nur so viel Kraft angewandt werden darf, als zur Ueberwindung der Reibung erforderlich ist.)

Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten, indem wir in (1) x für $x - C$ setzen, so kommt

$$x = \pm\sqrt{a^2 - y^2} \mp \tfrac{1}{2} a \log \frac{(a + \sqrt{a^2 - y^2})^2}{y^2} . \qquad (2)$$

Die Curve besteht also aus vier congruenten Theilen; denn zu einem und dem-

§. 120. Fig. 81. selben Werthe von y gehören zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von x, und einem und demselben Werthe von x entsprechen zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y. Die beiden Coordinatenachsen sind demnach Achsen der Curve, und der Anfangspunkt C ist der Mittelpunkt derselben. Je kleiner y genommen wird, desto größer ist x, und für $y = 0$ ist $x = \infty$; die Abscissenachse ist also eine Asymptote der Curve. Für $x = 0$ ist $y = \pm a$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \infty$; und da für Werthe von y, welche kleiner als $-a$ und größer als $+a$ sind, x imaginär ist, so ist $y = \pm a$ die kleinste oder größte Ordinate; die Curve bildet demnach bei A und A' zwei Spitzen.

Wir bemerken von dieser Curve noch Folgendes.

Erstens, was die Rectification betrifft, so ist

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}\, dy = \pm \int \frac{a}{y}\, dy = \pm a \log y + C',$$

und wenn die Bogen in einem Rückkehrpunkte A anfangen sollen, ist $\pm a \log y + C' = 0$ für $y = \pm a$, also $\pm a \log(\pm a) + C' = 0$, demnach $s = \pm a \log \frac{y}{a}$, wo der Werth von y absolut zu nehmen ist. Es sey nun P irgend ein Punkt der Curve und die Länge des Bogens AP zu construiren. Wir beschreiben um C mit CA einen Kreis, welcher die Abscissenachse in D schneidet; nehmen, auf CA, $CQ = y_1 = PN$, ziehen QD, welche verlängert den beschriebenen Kreis in E schneidet; durch E ziehen wir ER der Abscissenachse parallel, welche die Curve in R schneidet; so ist die Gerade ER = Bogen AP. Die Richtigkeit dieser Construction ergiebt sich folgendermaßen. Die Gleichung des erwähnten Kreises ist

$$y^2 + x^2 = a^2$$

und die der Geraden QD, weil $CQ = y_1$ und $CD = CA = a$ (§. 4. S. 14),

$$\frac{y}{y_1} + \frac{x}{a} = 1.$$

Entwickelt man x u. y aus beiden Gleichungen, so ergeben sich die Coordinaten x', y' des Durchschnittes E, nämlich

$$x' = -\frac{a(a^2 - y_1^2)}{a^2 + y_1^2} \quad ; \quad y' = \frac{2a^2 y_1}{a^2 + y_1^2}.$$

Die Gleichung der Geraden ER ist daher $y = \frac{2a^2 y_1}{a^2 + y_1^2}$, und eliminiren

wir y zwiſchen ihr und der Gleichung (2), in welcher wir nur die untern Vorzeichen nehmen, ſo erhalten wir für die Abſciſſe des Durchſchnittspunktes R §. 120

$$x'' = -\frac{a(a^2-y_1^2)}{a^2+y_1^2} + \tfrac{1}{2}a\,log\frac{a^2}{y_1^2},$$

und demnach iſt

$$ER = x''-x' = \tfrac{1}{2}a\,log\frac{a^2}{y_1^2} = a\,log\frac{a}{y_1} = -a\,log\frac{y_1}{a}.$$

Da nun, dem Obigen zufolge, auch $s_1 = AP = \pm a\,log\frac{y_1}{a}$, ſo iſt ER = Bogen AP.

Zweitens, was die Quadratur der Curve betrifft, ſo iſt, weil $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$, $S = \int y dx = \int y\frac{dx}{dy}dy = \int\sqrt{a^2-y^2}.dy$, alſo

$$S = \tfrac{1}{2}y\sqrt{a^2-y^2} + \tfrac{1}{2}a^2.arc\left(sin = \frac{y}{a}\right) + C''.$$

Soll nun der Flächenraum von der Ordinate CA anfangen, ſo muß das Integral für $x = 0$, alſo auch für $y = a$ verſchwinden; wir haben alſo

$$0 = \tfrac{1}{2}a^2.\tfrac{1}{2}\pi + C'',$$

woraus ſich

$$S = \tfrac{1}{2}y\sqrt{a^2-y^2} + \tfrac{1}{2}a^2\left\{arc\left(sin = \frac{y}{a}\right) - \tfrac{1}{2}\pi\right\}$$

oder

$$S = \tfrac{1}{2}y\sqrt{a^2-y^2} - \tfrac{1}{2}a^2.arc\left(cos = \frac{y}{a}\right)$$

ergiebt. Setzen wir hierin $y = 0$, ſo erhalten wir für den Flächenraum, welcher zwiſchen einem Zweige der Curve und der Abſciſſenachſe, d. i. ſeiner Aſymptote, liegt, den Ausdruck $\frac{1}{4}a^2\pi$. Der ganze von der Curve eingenommene Raum iſt demnach $= a^2\pi$, alſo dem Inhalte des vorher beſchriebenen Kreiſes gleich.

Drittens, was den Krümmungsradius der Curve betrifft, ſo iſt, da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}\quad;\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2}{(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{dy}{dx} = \frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2};$$

folglich (nach §. 83. F. 9)

$$\varrho = \frac{a\sqrt{a^2-y^2}}{y}.$$

§. 120. Um den Krümmungsmittelpunkt eines Punktes P geometriſch zu beſtimmen, iſt nichts weiter erforderlich als die Tangente und Normale des Punktes P zu ziehen, und in dem Endpunkte der Subtangente eine Senkrechte auf der Abſciſſenachſe zu errichten; dieſe ſchneidet die Normale in dem Krümmungsmittelpunkte O. Denn es iſt (§. 71. F. 9.) die Subtangente $= y\frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{\sqrt{a^2-y^2}}$, und da der Coſinus des Winkels w, welchen die Normale mit der Abſciſſenachſe macht, $= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}} = \frac{y}{a}$, ſo iſt $\varrho \cos w = \frac{y^2}{\sqrt{a^2-y^2}}$, alſo $\varrho \cos w =$ Subtangente, woraus die Richtigkeit der Conſtruction erhellet.

Viertens, was die Evolute der Curve betrifft, ſo iſt (§. 83. F. 8.)

$$\beta = y + \frac{a^2-y^2}{y} = \frac{a^2}{y} \quad ; \quad \alpha = x \mp \sqrt{a^2-y^2}\,.$$

Hieraus ergiebt ſich $y = \frac{a^2}{\beta}$ und $x = \alpha \pm \frac{a\sqrt{\beta^2-a^2}}{\beta}$. Setzen wir dieſe Ausdrücke in die Gleichung (2), ſo kommt

$$\alpha \pm \frac{a\sqrt{\beta^2-a^2}}{\beta} = \pm \frac{a\sqrt{\beta^2-a^2}}{\beta} \mp \tfrac{1}{2}a \log \frac{(\beta+\sqrt{\beta^2-a^2})^2}{a^2}\,,$$

oder

$$\alpha = \mp \tfrac{1}{2}a \log \frac{(\beta+\sqrt{\beta^2-a^2})^2}{a^2}\,,$$

woraus ſich denn

$$\beta = \pm \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\alpha}{a}} + e^{-\frac{\alpha}{a}}\right)$$

ergiebt. Die Evolute beſteht demnach aus zwei Kettenlinien, von welchen die eine über, und die andere unter der Abſciſſenachſe liegt.

II. Es ſey das Verhältniß der Ordinate zur Tangente conſtant und $= 1:n$, ſo iſt $\varphi(y) = ny$, und

$$x = \int \sqrt{n^2-1}.dy + C \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{n^2-1}.y + C\,.$$

Die geſuchte Linie iſt alſo eine Gerade, wenn $n \geqq 1$.

Aufgabe [206]. Es ſoll die Curve gefunden werden, an welcher die Normale eine gegebene Function der Ordinate iſt.

Es sey $\varphi(y)$ die gegebene Function, so ist (§. 71. F. 12.) §. 120.

$$y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = \varphi(y) .$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{(\varphi y)^2 - y^2}} ,$$

und durch Integration

$$x = \int \frac{y}{\sqrt{(\varphi y)^2 - y^2}} . dy + C$$

als Gleichung der gesuchten Curve.

I. Es sey z. B. die Länge der Normale constant, so ist $\varphi(y) = a$, also

$$x = \int \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} . dy + C ,$$

d. i.

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} + C ,$$

oder

$$y^2 + (x - C)^2 = a^2 .$$

Die Curve ist also ein Kreis, dessen Radius gleich a ist, und dessen Mittelpunkt auf der Abscissenachse liegt.

II. Es sey $\varphi(y) = ny$, so ist

$$x = \int \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} . dy + C ,$$

d. i.

$$x = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} y + C ,$$

die gesuchte Linie also eine Gerade, wenn $n \geqq 1$ ist.

Aufgabe [207]. Es soll die Curve gefunden werden, an welcher die Entfernung eines jeden Punktes von dem Endpunkte seiner Polarsubtangente eine gegebene Function des Leitstrahls ist.

Es sey $\varphi(u)$ die gegebene Function, so ist

$$\pm u\sqrt{1+u^2\frac{dt^2}{du^2}} = \varphi u ; \text{ woraus } \frac{dt}{du} = \frac{\pm\sqrt{(\varphi u)^2 - u^2}}{u^2} ,$$

und durch Integration

§. 120. $$t = \pm\int \frac{\sqrt{(\varphi u)^2 - u^2}}{u^2}.du + C$$

als Gleichung der gesuchten Curve folgt.

I. Es sey jene Entfernung eine constante Größe, und also $\varphi(u) = a$, so ist

$$t = \pm\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}.du + C\,,$$

d. i.

$$t = \mp\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} \mp arc\left(sin = \frac{u}{a}\right) + C\,,$$

die Gleichung der Curve. Für $u = a$ ergiebt sich daraus $t = C \mp \frac{1}{2}\pi$; legen wir also die Achse, von welcher die t angerechnet werden, durch den Punkt, für welchen $u = a$, so ist $t + C \mp \frac{1}{2}\pi$ für t zu setzen, und die Gleichung ist alsdann

$$t = \mp\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} \pm arc\left(cos = \frac{u}{a}\right).$$

Die Curve bestehet, wie leicht einzusehen ist, aus zwei gleichen Theilen. Es kann nun u nicht größer als a genommen werden; und da, für $u = a$, $t = 0$, ferner $\frac{dt}{du} = \pm\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}$, also die Polarsubnormale $u^2\frac{dt}{du} = \pm\sqrt{a^2 - u^2}$, und, für diesen Werth von u, gleich Null ist, so berührt der
Fig. 82. Radius vector in diesem Punkte A die Curve, und dieser Punkt A ist daher ein Rückkehrpunkt. Wenn u abnimmt, so wächst t immer mehr und mehr, und umgekehrt, wenn t wächst, so nimmt u immer mehr und mehr ab; für $u = 0$ ist $t = \infty$. Die Curve macht also unendlich viele Windungen um den Punkt C und nähert sich ihm immer mehr und mehr, ohne ihn je zu erreichen.

Wir können auf folgende Weise beliebig viele Punkte der Curve geometrisch bestimmen. Wir beschreiben um den Anfangspunkt der Coordinaten C einen Kreis mit dem Radius a. Soll nun A der Rückkehrpunkt der Curve seyn, so nehmen wir, auf irgend einer Tangente BM des beschriebenen Kreises, den Punkt M so, daß BM = Bogen AB, ziehen CM und lassen von B eine Senkrechte auf CM herab; der Fußpunkt P dieser Senkrechten ist alsdann ein Punkt der Curve. Denn es sey Winkel $ACB = \vartheta$, so ist BM = Bogen $AB = a\vartheta$, daher $CM = \sqrt{a^2 + a^2\vartheta^2}$, und da

$CP = \frac{\overline{CB}^2}{CM}$, so ist $u = CP = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+a^2\vartheta^2}} = \frac{a}{\sqrt{1+\vartheta^2}}$, also $\vartheta =$ §. 120.
$\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}$. Ferner ist $t =$ Winkel $ACP = ACB - BCM$, und $cos\,BCM = \frac{CP}{CB} = \frac{u}{a}$, also ist

$$t = \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - arc\left(cos = \frac{u}{a}\right),$$

welches die Gleichung der Curve ist.

Vollenden wir das Rechteck unter CP und BP, und ziehen die Diagonale PT, so ist $PT = CB = a$, und CT auf CP senkrecht; folglich ist PT die Tangente, und die Senkrechte PN die Normale im Punkte P.

Der Ort des Durchschnittspunktes O der beiden Diagonalen, oder des Halbirungspunktes der constanten Tangente ist ein Kreis, dessen Radius gleich $\frac{1}{2}a$. Unsere Curve ist daher auch die Tractorie dieses letztern, um den Punkt C beschriebenen, Kreises.

Was die Rectification der Curve betrifft, so ist, da $\frac{dt}{du} = \frac{\pm\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}$,

$$s = \int \sqrt{u^2+\frac{du^2}{dt^2}}\cdot\frac{dt}{du}.du = \pm\int\frac{a}{u}du = \pm a\,log\,u + C',$$

und, wenn die Bogen im Rückkehrpunkte A anfangen sollen,

$$s = \pm a\,log\frac{u}{a}.$$

In Betreff der Quadratur haben wir

$$S = \tfrac{1}{2}\int u^2\frac{dt}{du}du = \pm\tfrac{1}{2}\int\sqrt{a^2-u^2}.du,$$

also

$$S = \pm\tfrac{1}{4}u\sqrt{a^2-u^2} \pm \tfrac{1}{4}a^2\,arc\left(sin = \frac{u}{a}\right) + C'',$$

und wenn die Sectoren von dem Radius vector CA anfangen sollen,

$$S = \pm\tfrac{1}{4}\left\{a^2\,arc\left(cos = \frac{u}{a}\right) - u\sqrt{a^2-u^2}\right\}.$$

Für den Punkt P ist $CP = u$, daher $BP = \sqrt{a^2-u^2}$ und $\Delta CPB = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2}$; ferner Kreissector $BCQ = \frac{1}{2}a^2\,arc\left(cos = \frac{u}{a}\right)$; folglich ist

§. 120. das Kreisstück BPQ $= \frac{1}{2}\{a^2 arc\left(cos = \frac{u}{a}\right) - u\sqrt{a^2-u^2}\}$; und daher

der Sector ACP der Curve = ½ Kreisstück BPQ.

Den Krümmungsradius betreffend, haben wir, da $\frac{du}{dt} = \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}$,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d.\frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}}{du}.\frac{du}{dt} = \frac{(2a^2-u^2)u^2}{(a^2-u^2)^2};$$ demnach

$$\frac{du^2}{dt^2}+u^2 = \frac{a^2u^2}{a^2-u^2} \quad ; \quad \frac{du^2}{dt^2} - u\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{a^2u^4}{(a^2-u^2)^2};$$

$$u^2+2\frac{du^2}{dt^2} - u\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{a^2u^2(a^2-2u^2)}{(a^2-u^2)^2}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in denjenigen von ϱ (§. 83. F. 15.), so kommt

$$\varrho = \frac{au\sqrt{a^2-u^2}}{a^2-2u^2}.$$

Um den Krümmungsmittelpunkt von P geometrisch zu bestimmen, brauchen wir nur BC zu verlängern; der Durchschnitt N dieser Verlängerung mit der Normale ist der Krümmungsmittelpunkt und NP der Krümmungsradius. Denn wir haben im rechtwinkligen Dreiecke NOP, $\overline{NP} = \overline{PO}.tang\,NOP$, und $\overline{PO} = \frac{1}{2}\overline{PT} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}a$, ferner $tang\,NOP = -tang\,BOP = -tang\,2BCM$. Nun ist aber $cos\,BCM = \frac{u}{a}$, also $tang\,BCM = \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}$, folglich $tang\,2BCM = \frac{2u\sqrt{a^2-u^2}}{2u^2-a^2}$, und demnach $\overline{NP} = -\frac{1}{2}a.\frac{2u\sqrt{a^2-u^2}}{2u^2-a^2} = \frac{au\sqrt{a^2-u^2}}{a^2-2u^2}$, also $\overline{NP} = \varrho$.

Für $u^2 = \frac{1}{2}a^2$ ist $u^2+2\frac{du^2}{dt^2} - u\frac{d^2u}{dt^2} = 0$ und $\varrho = \infty$. Die Curve hat also zwei Inflexionspunkte, deren Leitstrahlen gleich $\frac{a}{\sqrt{2}}$ sind.

Was endlich die Evolute unserer Curve betrifft, so erhalten wir, durch Substitution der vorher angegebenen Ausdrücke in F. 11. u. 13. des §. 83.,

$$\delta = \pm\frac{au^2}{a^2-2u^2} \quad ; \quad tang\,\vartheta = \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}.$$

Aus der Gleichung $\gamma = t+\vartheta$ (§. 83. G. 14) ergiebt sich nun

$$\gamma = t + arc\left(tang = \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right),$$ §. 120.

welche Gleichung ſich vermittelſt der Gleichung der Curve auf

$$\gamma = \frac{\pm\sqrt{a^2 - u^2}}{u}$$

reducirt. Elimininen wir zwiſchen dieſem Ausdruck von γ und denjenigen von δ die Größe u, ſo kommt

$$\delta = \pm\frac{a}{\gamma^2 - 1}$$

als Polargleichung der Evolute.

II. Es ſtehe, als anderes Beiſpiel, die in der Aufgabe genannte Entfernung mit dem Radius vector in einem gegebenen conſtanten Verhältniſſe, ſo iſt $\varphi(u) = nu$, und daher

$$t = \pm\int \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{u} du + C,$$

alſo

$$t = \pm\sqrt{n^2 - 1}\, log\, u + C.$$

Die Curve iſt daher, wenn $n > 1$ eine logarithmiſche Spirale.

Aufgabe [208]. Es ſoll die Curve gefunden werden, an welcher die Entfernung eines jeden Punktes von dem Endpunkte ſeiner Polarſubnormale eine gegebene Function des Leitſtrahls iſt.

Es ſey $\varphi(u)$ die gegebene Function, ſo iſt

$$\sqrt{u^2 + \frac{du^2}{dt^2}} = \varphi(u), \quad \text{woraus} \quad \frac{dt}{du} = \frac{1}{\sqrt{(\varphi u)^2 - u^2}},$$

und durch Integration

$$t = \int \frac{1}{\sqrt{(\varphi u)^2 - u^2}} du + C$$

als Gleichung der geſuchten Curve folgt.

I. Es ſey die genannte Entfernung conſtant, ſo iſt $\varphi(u) = a$, daher

$$t = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du + C = arc\left(sin = \frac{u}{a}\right) + C$$

oder

$$u = a\, sin(t - C).$$

§. 120. Legen wir die Abscissenachse, von welcher die t angerechnet werden, durch denjenigen Punkt der Curve, für welchen $t = C$ ist, so verwandelt sich die gefundene Gleichung in

$$u = a \sin t ,$$

oder, wenn wir zu rechtwinkligen Coordinaten übergehen, in

$$y^2 + x^2 = ay .$$

Die Curve ist also ein Kreis, dessen Radius $= \frac{1}{2}a$ und der durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht.

II. Es stehe jene Entfernung mit dem Leitstrahle in einem constanten Verhältnisse, so ist $\varphi(u) = nu$, demnach

$$t = \int \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}.u} du + C ,$$

d. i.

$$t = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} . \log u + C ,$$

und die Curve also eine logarithmische Spirale, wenn $n > 1$ ist.

§. 121.

Aufgabe [209]. Der Ort des Endpunktes der Polarsubnormale einer Curve und der Pol der Polarcoordinaten ist gegeben; es soll diese Curve gefunden werden.

Es sey $u' = \varphi(t')$ die gegebene Polargleichung des genannten Ortes, so haben wir, zufolge §. 71., wenn t, u die Polarcoordinaten der gesuchten Curve bezeichnen,

$$u' = \frac{du}{dt} \quad ; \quad t' = t + \tfrac{1}{2}\pi .$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die gegebene Gleichung $u' = \varphi(t')$, so kommt

$$\frac{du}{dt} = \varphi(t + \tfrac{1}{2}\pi) ,$$

und durch Integration

$$u = \int \varphi(t + \tfrac{1}{2}\pi) dt + C$$

als Gleichung der gesuchten Curve.

Wenn es bloß darauf ankommt, die Gestalt der Curve, nicht aber zugleich ihre relative Lage gegen den gegebenen Ort aufzufinden, so kann man t statt $t + \frac{1}{2}\pi$ setzen, und dann ist die Gleichung derselben $u = \int \varphi(t) dt + C$.

I. Es

I. Es sey der gegebene Ort eine gerade Linie, deren Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten gleich a ist. Nehmen wir die Abscissenachse, von welcher die t angerechnet werden, dieser Geraden parallel, so ist deren Gleichung §. 121.

$$u' = \frac{a}{\sin t'} .$$

Es ist alsdann $\varphi(t') = \frac{a}{\sin t'}$, daher $\varphi(t+\frac{1}{2}\pi) = \frac{a}{\sin(t+\frac{1}{2}\pi)} = \frac{a}{\cos t}$, und demnach

$$u = \int \frac{a}{\cos t} dt + C ,$$

d. i.

$$u = a \log tang (\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\pi) + C$$

die gesuchte Gleichung der Curve.

II. Es sey der gegebene Ort eine Parabel zweiten Grades und ihr Brennpunkt der Pol. Die Gleichung dieser Curve ist (§. 33. S. 11), wenn wir den Parameter durch 2g bezeichnen,

$$u' = \frac{g}{1 - \cos t'} ,$$

und es ist also hier $\varphi(t') = \frac{g}{1-\cos t'}$, daher $\varphi(t+\frac{1}{2}\pi) = \frac{g}{1+\sin t}$. Demnach ist

$$u = \int \frac{g}{1+\sin t} dt + C ,$$

d. i.

$$u = -g . \frac{\cos t}{1+\sin t} + C \quad \text{oder} \quad (1+\sin t)(u-C) + g . \cos t = 0$$

die Gleichung der gesuchten Curve. Wenn wir zu rechtwinkligen Coordinaten übergehen, finden wir hieraus

$$\{y^2 + x^2 + gx - Cy\}^2 = (y-C)^2 (y^2 + x^2) ;$$

die Curve ist also im Allgemeinen vom vierten Grade.

Aufgabe [210]. Der Ort des Endpunktes der Polarsubtangente einer Curve und der Pol der Polarcoordinaten ist gegeben; es soll diese Curve gefunden werden.

Es sey $u' = \varphi(t')$ die gegebene Polargleichung des genannten Ortes, so haben wir, wenn t, u die Polarcoordinaten der gesuchten Curve bezeich-

§. 121. nen, zufolge §. 71.,

$$u' = u^2 \frac{dt}{du} \quad ; \quad t' = t - \tfrac{1}{2}\pi \ .$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die gegebene Gleichung $u' = \varphi(t')$, so kommt

$$u^2 \frac{dt}{du} = \varphi(t - \tfrac{1}{2}\pi) \ , \quad \text{oder} \quad \frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = \frac{1}{\varphi(t - \frac{1}{2}\pi)} \ ,$$

und, wenn wir integriren,

$$-\frac{1}{u} = \int \frac{1}{\varphi(t - \frac{1}{2}\pi)} . dt + C$$

als Gleichung der gesuchten Curve.

I. Es sey der gegebene Ort eine gerade Linie. Nehmen wir die Ordinatenachse dieser Geraden parallel, so ist ihre Polargleichung

$$u' \cos t' = a \ .$$

Daher ist $\varphi(t') = \frac{a}{\cos t'}$; $\varphi(t - \frac{1}{2}\pi) = \frac{a}{\cos(t - \frac{1}{2}\pi)} = \frac{a}{\sin t}$. Wir haben also

$$-\frac{1}{u} = \int \frac{\sin t}{a} dt + C$$

oder

$$-\frac{1}{u} = -\frac{\cos t}{a} + C \ .$$

Setzen wir $\frac{1}{ma}$ für C und schaffen die Nenner fort, so ergiebt sich als Gleichung der gesuchten Curve

$$u = -\frac{am}{1 - m \cos t} \ .$$

wodurch eine Linie des zweiten Grades, deren Brennpunkt im Pole liegt, ausgedrückt wird (§. 33. G. 16.).

II. Es sey der gegebene Ort eine Linie zweiten Grades und ein Brennpunkt derselben der Anfangspunkt der Polarcoordinaten. Aus der Gleichung (§. 33. G. 16.)

$$u' = \frac{r}{1 - m \cos t'}$$

erhalten wir $\varphi(t - \frac{1}{2}\pi) = \frac{r}{1 - m \sin t}$; und daraus ergiebt sich

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{r}\int(1 - m\sin t)\,dt + C\,, \qquad \text{§. 121.}$$

also

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{r}(t + m\cos t) + C$$

oder

$$u = -\frac{r}{t + m\cos t + Cr}$$

als die Gleichung der gesuchten Curve.

§. 122.

Aufgabe [211]. Es sind zwei sich schneidende gerade Linien AB, BC der Lage nach, und ein Punkt A auf einer derselben gegeben. Man soll die Curve finden, welche so beschaffen ist, daß, wenn man irgend einen Punkt P derselben mit dem Punkte A verbindet, die Verbindungslinie so weit verlängert bis sie die BC in D schneidet, und in P eine Tangente an der Curve zieht, diese Tangente, die BC in E so schneidet, daß BE und DE in einem gegebenen Verhältnisse stehen. Fig. 83.

Wir nehmen die Gerade AB zur Abscissenachse und die durch den Halbirungspunkt O von AB der BC parallel geführte Gerade zur Ordinatenachse, bezeichnen die laufenden Coordinaten der geraden Linien durch α, β, die Coordinaten des Punktes P der Curve durch x, y und das Stück AB der gegebenen Geraden durch 2a. Nun ist

die Gleichung von BC: $\alpha = a$,

die Gleichung von AP: $\beta = \frac{y}{x+a}(\alpha + a)$,

und hieraus erhalten wir die Coordinaten des Durchschnittes D, nämlich

$$\alpha = a \quad \text{und} \quad \beta = \frac{2ay}{x+a}\,.$$

Ist nun n : m das gegebene Verhältniß, so haben wir für die Coordinaten des Punktes E

$$\alpha = a \quad \text{und} \quad \beta = \frac{2nay}{(m+n)(x+a)}\,.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte P der gesuchten Curve ist

$$\beta - y = \frac{dy}{dx}(\alpha - x)\,,$$

§ 122. und da sie den Punkt P enthalten soll, muß sie von den so eben angegebenen Coordinaten befriedigt werden, woraus wir

$$\frac{2nay}{(m+n)(x+a)} - y = \frac{dy}{dx}(a-x)$$

erhalten, welches die Differentialgleichung der gesuchten Curve ist. Um diese zu integriren bringen wir sie auf die Form

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{(n-m)a-(m+n)x}{(m+n)(a^2-x^2)} = \frac{n}{m+n}\cdot\frac{1}{a+x} - \frac{m}{m+n}\cdot\frac{1}{a-x},$$

wodurch sich sodann

$$log\frac{y}{C} = \frac{n}{m+n}log(a+x) + \frac{m}{m+n}log(a-x)$$

oder

$$y = C(a+x)^{\frac{n}{m+n}}(a-x)^{\frac{m}{m+n}}$$

als die Gleichung der gesuchten Curve ergiebt.

Ist $n=m$, oder mit andern Worten, ist E der Halbirungspunkt von BD, so ist $\frac{n}{m+n} = \frac{m}{m+n} = \frac{1}{2}$, und die Gleichung der Curve ist dann $y = C(a+x)^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}$ oder, rational gemacht,

$$y^2 = C^2(a^2-x^2),$$

die Curve also vom zweiten Grade und eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem C reell oder imaginär genommen wird. Die zu Coordinatenachsen genommenen Geraden sind ein Paar conjugirte Durchmesser der Curve.

Fig. 84. Aufgabe [212]. Eine Curve ABC ist gegeben und es soll eine andere Curve abc von der Beschaffenheit gefunden werden, daß, wenn man in irgend einem Punkte B der gegebenen Curve eine Senkrechte auf der Ordinate BN errichtet, darauf ein Stück BD von gegebener Länge a abschneidet, und den Endpunkt D desselben mit dem Durchschnitte b der gesuchten Curve und der Ordinate BN verbindet, die Verbindungslinie Db die gesuchte Curve in b berühre.

Es seyen die gemeinschaftlichen Abscissen beider Curven durch x, die senkrechten Ordinaten der gegebenen durch y' und diejenigen der gesuchten durch y bezeichnet; es sey ferner $y' = \varphi(x)$ die gegebene Gleichung der Curve ABC.

Da BD der Abscissenachse parallel ist, so haben wir Winkel BDT =

DTN, alſo *tang* BDT = *tang* DTN, und da *tang* BDT = $\frac{Bb}{BD}$ = §. 122.
$\frac{y'-y}{a}$ und *tang* DTN = $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'-y}{a} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{a} = \frac{y'}{a};$$

folglich

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{a}y = \frac{\varphi(x)}{a},$$

welches die Differentialgleichung der geſuchten Curve iſt.

Um dieſe zu integriren, ſetzen wir $y = uz$, wo u und z zwei noch zu beſtimmende Functionen von x bedeuten. Alsdann iſt $\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}$, wodurch ſich unſere Gleichung in

$$z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx} + \frac{1}{a}uz = \frac{\varphi(x)}{a}$$

verwandelt. Setzen wir nun $z\frac{du}{dx} = \frac{\varphi(x)}{a}$ und $u\frac{dz}{dx} + \frac{1}{a}uz = 0$, wodurch die letzte Gleichung befriedigt wird, ſo erhalten wir, durch Diviſion mit uz,

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{a},$$

und durch Integration

$$log\frac{z}{C'} = -\frac{1}{a}x \quad \text{oder} \quad z = C'e^{-\frac{x}{a}},$$

wo C' die Conſtante der Integration bedeutet. Subſtituiren wir dieſen Ausdruck von z in die andere Gleichung $z\frac{du}{dx} = \frac{\varphi(x)}{a}$, ſo ergiebt ſich

$$\frac{du}{dx} = \frac{e^{\frac{x}{a}}\varphi(x)}{C'a},$$

und durch Integration

$$u = \frac{1}{C'a}\int e^{\frac{x}{a}}\varphi(x)dx + C.$$

Da nun $y = uz$ iſt, ſo haben wir

§. 122.

$$y = \frac{e^{-\frac{x}{a}}}{a} \cdot \{\int e^{\frac{x}{a}} \varphi(x) dx + C\}$$

als Gleichung der gesuchten Curve.

I. Es sey z. B. die gegebene Linie ABC eine der Abscissenachse parallele Gerade, deren Gleichung $y' = \varphi(x) = b$; so ist

$$y = \frac{e^{-\frac{x}{a}}}{a} \cdot \{\int be^{\frac{x}{a}} dx + C\}$$

oder

$$y = b + \frac{C}{a} e^{-\frac{x}{a}}.$$

Die gesuchte Curve ist also im gegenwärtigen Falle eine logarithmische Linie. Dasselbe Resultat ergiebt sich auf einfachere Art aus der Differentialgleichung, welche jetzt

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{a} = \frac{b}{a}$$

oder

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b-y}$$

ist, und integrirt unmittelbar

$$x = -a \log \frac{b-y}{C} \quad \text{oder} \quad b - y = C.e^{-\frac{x}{a}}$$

giebt. Diese Gleichung stimmt mit der vorher angegebenen überein, wenn wir $-\frac{C}{a}$ für C setzen.

II. Es sey die gegebene Linie irgend eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade, und $y' = \varphi(x) = nx$ ihre Gleichung; so ist

$$y = \frac{e^{-\frac{x}{a}}}{a} \{\int nxe^{\frac{x}{a}} dx + C\},$$

oder, wenn wir die angedeutete Integration ausführen,

$$y = n(x-a) + \frac{C}{a} e^{-\frac{x}{a}}$$

die gesuchte Gleichung der Curve.

III. Es sey die gegebene Linie ABC eine logarithmische Linie und ihre §. 122.
Gleichung $y' = \varphi(x) = ae^{\frac{x}{a}}$, so ist

$$y = \frac{e^{-\frac{x}{a}}}{a}\{\int ae^{\frac{2x}{a}}dx + C\},$$

oder, nach vollführter Integration,

$$y = \tfrac{1}{2}ae^{\frac{x}{a}} + \frac{C}{a}e^{-\frac{x}{a}}$$

die Gleichung der gesuchten Curve. Fügen wir die Bedingung hinzu, daß die gesuchte Curve die gegebene logarithmische Linie auf der Ordinatenachse schneiden soll, so muß, für $x = 0$, $y = y'$ seyn. Es ist aber für $x = 0$, $y = \tfrac{1}{2}a + \frac{C}{a}$ und $y' = a$, es muß also $\tfrac{1}{2}a + \frac{C}{a} = a$, und folglich $C = \tfrac{1}{2}a^2$ seyn. Dieser Werth, in die gefundene Gleichung gesetzt, giebt

$$y = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

und die Curve ist somit eine Kettenlinie (§. 64. S. 5).

Aufgabe [213]. Es sind zwei Curven ABC, A'B'C' gegeben; es Fig. 85.
soll eine dritte Curve abc von der Beschaffenheit gefunden werden, daß wenn in irgend einem Punkte B der Curve ABC eine Senkrechte auf der Ordinate BN errichtet, und der Durchschnittspunkt B' dieser Senkrechten und der Curve A'B'C' mit dem Durchschnittspunkte b der Ordinate BN und der gesuchten Curve verbunden wird, die Verbindungslinie B'b diese gesuchte Curve in b berühre.

Wir bezeichnen die gemeinschaftlichen Abscissen der Curven ABC und abc durch x, die senkrechten Ordinaten dieser Curven respective durch y' und y, und die auf dieselben Achsen bezogenen Coordinaten der Curve A'B'C' durch x'', y''. Es sey nun

$y' = \varphi(x)$ die Gleichung der Curve ABC,
$x'' = \psi(y'')$ die Gleichung der Curve A'B'C'.

Da BB' der Abscissenachse parallel ist, haben wir *tang* B'TN = *tang* BB'T, also $\frac{dy}{dx} = \frac{Bb}{BB'}$. Es ist aber $Bb = y' - y = \varphi(x) - y$, und $BB' = NN' = x'' - x = \psi(y'') - x$; und, weil $B'N' = BN$, $y'' = y' = \varphi(x)$,

§. 122. also $\psi(y'') = \psi(\varphi(x))$, $BB' = \psi(\varphi(x)) - x$. Demnach

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x) - y}{\psi(\varphi(x)) - x}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\psi(\varphi(x)) - x} = \frac{\varphi(x)}{\psi(\varphi(x)) - x},$$

welches die Differentialgleichung der gesuchten Curve ist.

Um diese Gleichung zu integriren, setzen wir $y = uz$, wo u und z zwei noch zu bestimmende Functionen bedeuten. Alsdann ist $\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}$, und unsere Differentialgleichung verwandelt sich, wenn wir, der Kürze wegen, $\psi(\varphi(x)) - x$ durch $f(x)$ bezeichnen, in

$$x\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dz}{dx} + \frac{z}{f(x)}\right) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}.$$

Setzen wir nun $z\frac{du}{dx} = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ und $\frac{dz}{dx} + \frac{z}{f(x)} = 0$, wodurch diese Gleichung befriedigt wird, so erhalten wir $\frac{1}{z}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{f(x)}$, also, wenn wir integriren, $log\frac{z}{C'} = -\int\frac{1}{f(x)}.dx$ oder $z = C'e^{-\int\frac{1}{f(x)}dx}$, wo C' die Constante der Integration bedeutet, und substituiren wir diesen Ausdruck in $z\frac{du}{dx} = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$, so ergiebt sich $\frac{du}{dx} = \frac{1}{C'}e^{\int\frac{1}{f(x)}dx}.\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, also

$$u = \frac{1}{C'}\int e^{\int\frac{1}{f(x)}dx}.\frac{\varphi(x)}{f(x)}.dx + C.$$

Da nun $y = uz$ ist, so haben wir

$$y = e^{-\int\frac{1}{f(x)}dx}\left\{\int e^{\int\frac{1}{f(x)}dx}.\frac{\varphi(x)}{f(x)}.dx + C\right\},$$

als die Gleichung der gesuchten Curve.

I. Es seyen die beiden gegebenen Linien zwei auf der Ordinatenachse sich schneidende Gerade, welche mit dieser Achse, also auch mit der Abscissenachse, gleiche Winkel bilden. Alsdann ist

$y' = ax+b$ und $y'' = -ax''+b$; §. 122.

daher $\varphi(x) = ax+b$; $x'' = \frac{b-y''}{a}$, alſo $\psi(y'') = \frac{b-y''}{a}$ und $f(x) = \psi(ax+b)-x = \frac{b-(ax+b)}{a} - x = -2x$. Folglich iſt die Gleichung der Curve

$$y = e^{+\int\frac{1}{2x}dx}\left\{-\int e^{-\int\frac{1}{2x}dx}.\frac{ax+b}{2x}dx+C\right\},$$

oder, da $\int\frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\log x = \log x^{\frac{1}{2}}$, alſo $e^{\int\frac{1}{2x}dx} = x^{\frac{1}{2}}$,

$$y = -x^{\frac{1}{2}}\left\{\int\left[\frac{a}{2x^{\frac{1}{2}}}+\frac{b}{2x^{\frac{3}{2}}}\right].dx+C\right\}$$

oder

$$y = -x^{\frac{1}{2}}\left\{ax^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{x^{\frac{1}{2}}}+C\right\},$$

oder auch

$$y+ax-b = -Cx^{\frac{1}{2}},$$

und, wenn wir quadriren,

$$(y+ax-b)^2 = C^2x.$$

Die geſuchte Curve iſt alſo eine Linie zweiten Grades und zwar, wie man leicht findet, eine Parabel, welche von der Ordinatenachſe in dem Durchſchnittspunkte der beiden gegebenen Geraden berührt wird. Die erſte dieſer Geraden enthält den Brennpunkt der Parabel, die andere iſt ein Durchmeſſer derſelben.

II. Es ſeyen die beiden gegebenen Curven zwei gleiche, ſich von außen berührende Kreiſe, deren Mittelpunkte auf der Abſciſſenachſe liegen. Alsdann iſt

$$y'^2+x^2-2rx = 0 \quad \text{und} \quad y''^2+x''^2+2rx'' = 0;$$

daher $y' = \varphi(x) = \sqrt{2rx-x^2}$ und $x'' = \psi(y'') = -r\pm\sqrt{r^2-y''^2}$. Folglich iſt $f(x) = \psi(\sqrt{2rx-x^2})-x = -r\pm\sqrt{r^2-(2rx-x^2)}-x = -r\pm(r-x)-x$, alſo entweder $f(x) = -2x$ oder $f(x) = -2r$.

Nehmen wir $f(x) = -2x$, ſo iſt

$$y = e^{\int\frac{1}{2x}dx}\left\{-\int e^{-\int\frac{1}{2x}dx}.\frac{\sqrt{2rx-x^2}}{2x}dx+C\right\},$$

§. 122.

oder, da $e^{\int \frac{1}{2x} dx} = x^{\frac{1}{2}}$,

$$y = -x^{\frac{1}{2}}\left\{\int \frac{\sqrt{2rx - x^2}}{2x^{\frac{3}{2}}} dx - C\right\}$$

oder

$$y + \sqrt{2rx - x^2} + \sqrt{2rx}\, log \frac{\sqrt{2rx - x^2} - \sqrt{2rx}}{x} = Cx^{\frac{1}{2}}$$

die Gleichung der gesuchten Curve.

Hätten wir $f(x) = -2r$ genommen, so würden wir, da alsdann BB' (Fig. 85.) constant wäre, einen Fall der vorigen Aufgabe erhalten haben.

Aufgabe [214]. Es ist eine Curve gegeben; man soll eine andere Curve von der Beschaffenheit finden, daß die Tangente in einem jeden Punkte P der letztern auf der Ordinatenachse ein Stück abschneide, welches derjenigen Ordinate der gegebenen Curve gleich ist, die durch den Punkt P geht.

Es sey $y' = \varphi(x')$ die Gleichung der gegebenen Curve. Bezeichnen wir die, auf dieselben Coordinatenachsen bezogenen, laufenden Coordinaten der Tangente im Punkte P, dessen Coordinaten x, y seyn mögen, durch α, β; so ist die Gleichung dieser Tangente

$$\beta - y = \frac{dy}{dx}(\alpha - x) .$$

Für das Stück der Ordinatenachse, welches durch diese Tangente abgeschnitten wird, erhalten wir, indem wir $\alpha = 0$ setzen, $\beta = y - x\frac{dy}{dx}$, und da dieses Stück der durch den Punkt P gehenden Ordinate der Curve $y' = \varphi(x')$ gleich seyn soll, so haben wir

$$y - x\frac{dy}{dx} = \varphi(x) ,$$

welches die Differentialgleichung der gesuchten Curve ist.

Die Integration dieser Gleichung kann eben so wie diejenigen in den beiden vorigen Aufgaben bewerkstelligt werden. Wir können aber auch wie folgt verfahren. Bezeichnen wir $\frac{dy}{dx}$ durch p, so haben wir

$$y = xp + \varphi(x) ,$$

und, wenn wir differentiiren, und $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ durch $\varphi'(x)$ bezeichnen,

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(x) \,,$$ §. 122.

eine Gleichung, die ſich von ſelbſt auf $x\frac{dp}{dx} + \varphi'(x) = 0$ oder

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\varphi'(x)}{x} \,,$$

reducirt. Aus dieſer Gleichung erhalten wir durch Integration

$$p = -\int \frac{\varphi'(x)}{x} dx + C \,;$$

und wenn wir dieſen Ausdruck von p in die Gleichung $y = px + \varphi(x)$ ſubſtituiren, kommt

$$y = -x\int \frac{\varphi' x}{x} dx + Cx + \varphi(x)$$

als Gleichung der geſuchten Curve.

Es ſey z. B. die gegebene Curve eine Parabel nten Grades, deren Gleichung $y' = ax^n$ iſt, ſo haben wir $\varphi(x) = ax^n$, $\varphi'(x) = nax^{n-1}$, $\int \frac{\varphi'(x)}{x} dx = na\int x^{n-2} dx = \frac{na}{n-1} x^{n-1}$. Daher iſt die Gleichung der geſuchten Curve

$$y = \frac{na}{1-n} x^n + Cx + ax^n$$

oder

$$y = Cx + \frac{a}{1-n} x^n \,.$$

§. 123.

Aufgabe [215]. Es ſoll die Curve gefunden werden, welcher die Eigenſchaft zukommt, daß wenn man um die Dreiecke, welche die Tangente und Normale eines jeden Punktes der Curve mit der Abſciſſenachſe bilden, Kreiſe beſchreibt, alle dieſe Kreiſe einen und denſelben Ort der gleichen Tangente haben.

Da die Dreiecke rechtwinklig ſind, und ihre Hypotenuſen mit der Abſciſſenachſe zuſammen fallen, ſo liegen die Mittelpunkte der Kreiſe auf dieſer Achſe, und die Gerade, welche der Ort der gleichen Tangente iſt, ſteht ſenkrecht auf derſelben (§. 23.). Wir nehmen dieſe Gerade zur Ordinatenachſe. Sind nun x, y die Coordinaten der Curve und x_1, x_n die Abſciſſen der

§. 123. Punkte, in welchen die Abscissenachse respective von der Tangente und Normale des Punktes xy geschnitten wird, so ist offenbar $\frac{1}{2}(x_t+x_n)$ die Abscisse des Mittelpunktes und $\frac{1}{2}(x_t-x_n)$ der Radius der Kreise. Die Gleichung der Kreise ist daher, wenn α, β die laufenden Coordinaten bedeuten,

$$\beta^2+\left(\alpha-\frac{x_t+x_n}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4}(x_t-x_n)^2$$

oder

$$\beta^2+\alpha^2-(x_t+x_n)\alpha+x_tx_n=0\,.$$

Da nun alle Kreise, welche denselben Ort der gleichen Tangente haben, sich in denselben, reellen oder imaginären, Punkten dieser Geraden schneiden müssen, so muß die so eben gefundene Gleichung für $\alpha=0$ einen constanten, positiven oder negativen, Werth für β^2 geben. Bezeichnen wir diesen durch e^2, so haben wir, da für $\alpha=0$, $\beta^2=-x_tx_n$ ist,

$$x_tx_n+e^2=0\,.$$

Setzen wir nun in diese Gleichung für x_t und x_n die in §. 71. (Aufg. 114.) angegebenen Ausdrücke, so erhalten wir

$$\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)\left(x-y\frac{dx}{dy}\right)+e^2=0\,,$$

oder, wenn wir mit $\frac{dy}{dx}$ multipliciren,

$$(y\frac{dy}{dx}+x)(x\frac{dy}{dx}-y)+e^2\frac{dy}{dx}=0\,,$$

welches die Differentialgleichung der gesuchten Curve ist.

Was nun die Integration dieser Gleichung betrifft, so bemerkt man bei einiger Aufmerksamkeit bald, daß sie sich dadurch bewerkstelligen läßt, daß man

$$y^2+x^2-e^2=2xz\,,$$

und demgemäß

$$y\frac{dy}{dx}+x=x\frac{dz}{dx}+z\,,\quad\text{also}\quad\frac{dy}{dx}=\frac{x\frac{dz}{dx}+z-x}{y}$$

setzt. Führen wir diese Substitutionen aus, so kommt

$$(x\frac{dz}{dx}+z)(x\frac{dz}{dx}-z)=e^2$$

oder

$$x^2\frac{dz^2}{dx^2} - z^2 = e^2 \,, \qquad \text{§. 123.}$$

woraus wir

$$\frac{1}{\sqrt{e^2+z^2}}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \,,$$

und durch Integration

$$log\{z+\sqrt{e^2+z^2}\} = log\frac{x}{C} \,,$$

alſo

$$z+\sqrt{e^2+z^2} = \frac{x}{C}$$

erhalten. Um die Homogeneität dieſer Gleichung herzuſtellen, ſetzen wir $\frac{B^2}{e^2}$ für C, und erhalten alsdann, wenn wir ſie rational machen,

$$B^4(z^2+e^2) = (e^2x - B^2z)^2$$

oder

$$2B^2xz - e^2x^2 + B^4 = 0 \,;$$

und wenn wir für $2xz$ wieder $y^2+x^2-e^2$ ſetzen

$$B^2y^2 + (B^2-e^2)x^2 + B^2(B^2-e^2) = 0$$

als Gleichung der geſuchten Curve. Dieſe iſt alſo eine Ellipſe oder Hyperbel, und wenn e^2 poſitiv, d. i. wenn die Durchſchnittspunkte der Kreiſe reell ſind, fallen dieſe Punkte mit den Brennpunkten dieſer Curven zuſammen.

Aufgabe [216]. Es ſind zwei Punkte gegeben, und es ſoll diejenige Curve gefunden werden, welche alle Strahlen, die von dem einen der beiden Punkte ausgehen, nach einem gegebenen Brechungsverhältniſſe, ſo bricht (oder zurückwirft), daß die gebrochenen (oder zurückgeworfenen) Strahlen ſich in dem andern gegebenen Punkte vereinigen.

Wir nehmen einen der gegebenen Punkte zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten, deren Abſciſſenachſe wir durch den andern gegebenen Punkt legen. Iſt nun a die Abſciſſe dieſes zweiten Punktes und $n' : n$ das gegebene Brechungsverhältniß, ſo haben wir, zufolge der Gleichung (8) im §. 100., indem wir $\beta = \beta' = \alpha = 0$ und $\alpha' = a$ ſetzen,

$$\frac{n'\{y\frac{dy}{dx}+x\}}{\sqrt{y^2+x^2}} = \frac{n\{y\frac{dy}{dx}+x-a\}}{\sqrt{y^2+(x-a)^2}}$$

als Differentialgleichung der geſuchten Curve.

§. 123. Da jeder Theil dieſer Gleichung, wie leicht zu ſehen, ein unmittelbares Differential iſt, ſo hat die Integration keine Schwierigkeit, und wir finden unmittelbar aus ihr

$$n\sqrt{y^2+x^2} = n\sqrt{y^2+(x-a)^2}+C ,$$

welches die Gleichung der geſuchten Curve iſt.

Da $\sqrt{y^2+x^2}$ den vom Anfangspunkte der Coordinaten, und $\sqrt{y^2+(x-a)^2}$ den von dem zweiten gegebenen Punkte nach dem Punkte xy gezogenen Leitſtrahl ausdrückt, ſo haben wir, wenn wir dieſe Leitſtrahlen durch u und u' bezeichnen,

$$n'u-nu' = C .$$

Hieraus ſehen wir, wie unſere Curve die Eigenſchaft hat, daß die Geraden, welche von den gegebenen Punkten nach irgend einem ihrer Punkte gezogen werden, nachdem ſie mit zwei conſtanten Zahlen multiplicirt worden, eine conſtante Differenz oder Summe haben, je nachdem dieſe Zahlen von demſelben oder vom entgegengeſetzten Zeichen ſind.

Es iſt übrigens leicht einzuſehen, daß die Curve im Allgemeinen vom vierten Grade iſt.

Wenn $n' = n$, reducirt ſich die Curve auf eine Hyperbel, wenn $n' = -n$ auf eine Ellipſe, deren Brennpunkte die gegebenen Punkte ſind.

Setzen wir die willkürliche Conſtante $C = 0$, ſo iſt die Curve ein Kreis, deſſen Mittelpunkt auf der Abſciſſenachſe liegt, und deſſen Radius die mittlere Proportionale zwiſchen den beiden Entfernungen der gegebenen Punkte von dieſem Mittelpunkte iſt.

§. 124.

Aufgabe [217]. *Die Curve zu finden, an welcher die Normale und die Entfernung ihres Endpunktes vom Anfangspunkte der Coordinaten in einer gegebenen Relation ſtehen.*

Wenn x, y die rechtwinkligen Coordinaten der Curve und α, β diejenigen der Normale bedeuten, ſo iſt die Gleichung der Normale

$$(\beta-y)p+(\alpha-x) = 0 ,$$

wo p für $\frac{dy}{dx}$ geſetzt iſt. Nehmen wir $\beta = 0$, ſo ergiebt ſich das von der Normale auf der Abſciſſenachſe abgeſchnittene Stück

$$\alpha = x+yp .$$

Die Länge der Normale aber iſt $y\sqrt{1+p^2}$ (§. 71. F. 12). Wenn nun

die Normale zu dem genannten Abschnitte auf der Abscissenachse in einer Relation stehen soll, die durch die Gleichung $N = \varphi(\alpha)$ gegeben ist, so haben wir §. 124.

$$y\sqrt{1+p^2} = \varphi(x+yp) , \qquad (1)$$

welches die Differentialgleichung der gesuchten Curve ist.

Diese Gleichung kann integrirt werden, ohne daß die Function φ bestimmt ist. Wir setzen nämlich

$$x+yp = a , \qquad (2)$$

wo a eine willkürliche Constante bezeichnet, und integriren diese letzte Gleichung, wodurch wir

$$y^2+x^2-2ax = C$$

erhalten. Setzen wir nun die willkürliche Constante $C = (\varphi a)^2 - a^2$, so haben wir

$$y^2+(x-a)^2 = (\varphi a)^2 ; \qquad (3)$$

und dies ist das complette Integral der Gleichung (1). Denn differentiren wir die Gleichung (3) nach x, so kommt

$$yp+x-a = 0 , \qquad (2)$$

und eliminiren wir a zwischen (2) und (3), so erhalten wir

$$y^2(1+p^2) = \{\varphi(x+yp)\}^2 ,$$

oder, wenn wir die Quadratwurzeln beider Theile nehmen, die Gleichung (1).

Die Gleichung (3) drückt einen Kreis aus, dessen Mittelpunkt in der Entfernung a vom Anfangspunkte der Coordinaten auf der Abscissenachse liegt, und dessen Radius gleich $\varphi(a)$ ist. Es ist augenscheinlich, daß ein solcher Kreis die Bedingung der Aufgabe erfüllt.

Außer diesen Kreisen giebt es aber im Allgemeinen noch eine Curve, welche der Bedingung der Aufgabe genügt. Dies ist die einhüllende Curve aller dieser Kreise, deren Gleichung sich ergiebt, wenn wir, zufolge des §. 94., die Gleichung der Kreise

$$y^2+(x-a)^2 = (\varphi a)^2 \qquad (3)$$

nach a differentiiren, wodurch wir

$$x-a+\varphi(a).\varphi'(a) = 0 \qquad (4)$$

erhalten, und a zwischen den Gleichungen (3) und (4) eliminiren. Daß die Finalgleichung dieser Elimination, welche keine willkürliche Constante enthält, die Differentialgleichung (1) befriedigt, setzen wir aus der Theorie der particulären Solutionen als bekannt voraus.

§. 124. Es sey z. B. die gegebene Relation $N = k^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}$, so ist $\varphi(a)^2 = ka$ und $\varphi(a).\varphi'(a) = \frac{1}{2}k$. Die Gleichungen (3) und (4) sind also in diesem Falle

$$y^2+(x-a)^2 = ka \quad ; \quad x-a+\tfrac{1}{2}k = 0 \; ;$$

und die Elimination von a giebt

$$y^2 = k(x+\tfrac{1}{4}k) \; ,$$

welches die Gleichung einer Parabel ist, deren Parameter $= k$, und deren Brennpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt.

Aufgabe [218]. Der Ort des Halbirungspunktes desjenigen Stückes der Normale einer Curve, welches zwischen der Curve und der Polarsubnormale liegt, ist gegeben; man soll die Curve finden.

Bezeichnen x, y die rechtwinkligen Coordinaten der Curve, α, β aber die Coordinaten der geraden Linien, so ist die Gleichung der Normale im Punkte xy

$$(\beta-y)p+(\alpha-x) = 0$$

und die, im Anfangspunkte der Coordinaten auf dem, nach dem Punkte xy gezogenen, Leitstrahl errichtete Senkrechte hat zur Gleichung

$$\beta = -\frac{x}{y}\alpha \, .$$

Aus beiden Gleichungen erhalten wir durch Entwickelung von α u. β die Coordinaten des Durchschnittes der Normale und der genannten Senkrechten, d. i. des Endpunktes der Polarsubnormale, nämlich

$$\alpha' = \frac{(x+yp)y}{y-xp} \quad ; \quad \beta' = -\frac{(x+yp)x}{y-xp} \, .$$

Die Coordinaten des in der Aufgabe genannten Halbirungspunktes sind aber (§. 5. F. 4)

$$\alpha'' = \tfrac{1}{2}(\alpha'+x) \quad ; \quad \beta'' = \tfrac{1}{2}(\beta'+y) \, .$$

Die Substitution der für α' u. β' gefundenen Ausdrücke giebt

$$\alpha'' = \frac{(y^2-x^2)p+2xy}{2(y-xp)} \quad ; \quad \beta'' = \frac{y^2-x^2-2xyp}{2(y-xp)} \, .$$

Ist nun $\beta'' = \varphi(x'')$ die Gleichung des gegebenen Ortes jenes Halbirungspunktes, so haben wir

$$\frac{y^2-x^2-2xyp}{2(y-xp)} = \varphi\left\{\frac{(y^2-x^2)p+2xy}{2(y-xp)}\right\} , \qquad (5)$$

welches die Differentialgleichung der gesuchten Curve ist.

Diese

Dieſe Gleichung kann integrirt werden, ohne daß die Function φ be- §. 124.
ſtimmt iſt. Wir ſetzen nämlich

$$\frac{(y^2-x^2)p+2xy}{2(y-xp)} = a\,, \qquad (6)$$

wo a eine willkürliche Conſtante bezeichnet, und integriren dieſe letzte Gleichung. Dies bewerkſtelligen wir dadurch, daß wir ſie mit dem integrirenden Factor $\frac{2(y-xp)}{y^2}$ multipliciren, wodurch ſich

$$\frac{(y^2-x^2)p+2xy-2a(y-xp)}{y^2} = 0$$

ergiebt, eine Gleichung, die wir auf die Form

$$\frac{\{2yp+2(x-a)\}y-\{y^2+x^2-2ax\}p}{y^2} = 0$$

bringen können, und die, wie nun leicht zu ſehen, das unmittelbare Differential von

$$\frac{y^2+x^2-2ax}{y} = C$$

iſt. Setzen wir die willkürliche Conſtante $C = 2\varphi(a)$, ſo haben wir

$$y^2+x^2-2\varphi(a).y-2ax = 0\,, \qquad (7)$$

und dies iſt das complette Integral der Gleichung (5). Denn differentiiren wir die Gleichung (7) nach x, ſo kommt

$$[y-\varphi(a)]p+x-a = 0\,, \qquad (8)$$

und elimíniren wir $\varphi(a)$ zwiſchen den Gleichungen (7) und (8), ſo ergiebt ſich

$$2(y-xp)a = (y^2-x^2)p+2xy\,.$$

Setzen wir den Ausdruck von a, welcher aus dieſer letzten Gleichung hervorgeht, und der mit dem Ausdruck (6) übereinſtimmt, in die Gleichung (7), ſo erhalten wir die Gleichung (5) wieder.

Die Gleichung (7) drückt einen Kreis aus, welcher durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, und deſſen Mittelpunkt, da ſeine Coordinaten a und $\varphi(a)$ ſind, in dem gegebenen Orte liegt. Daß dieſer Kreis der Bedingung der Aufgabe genügt, iſt leicht einzuſehen. Denn wenn man in dem, in der Peripherie liegenden, Anfangspunkte der Coordinaten auf dem Leitſtrahle AP eines Punktes P des Kreiſes eine Senkrechte errichtet, ſo trifft dieſe den Kreis nothwendigerweiſe in dem Endpunkte des Durchmeſſers, deſ-

§. 124. sen Anfangspunkt P ist; dieser Durchmesser aber ist die Normale des Punktes P und wird von dem, in dem gegebenen Orte liegenden, Mittelpunkt des Kreises halbirt.

Außer diesen Kreisen giebt es aber im Allgemeinen noch eine Curve, welche der Bedingung der Aufgabe genügt. Dies ist die einhüllende Curve aller dieser Kreise. Ihre Gleichung ergiebt sich, wenn wir, zufolge des §. 94., die Kreisgleichung

$$y^2+x^2-2\varphi(a).y-2ax=0 \qquad (7)$$

nach a differentiiren, wodurch wir

$$y\varphi'(a)+x=0 \qquad (9)$$

erhalten, und a zwischen den Gleichungen (7) u. (9) elimíniren. Die Finalgleichung dieser Elimination ist eine particuläre Solution der Gleichung (5).

Ist z. B. der gegebene Ort eine Ellipse oder eine logarithmische Spirale, so wird die Bedingung von den, in der Aufgabe [159] (§. 96.) gefundenen, Curven erfüllt.

Aufgabe [219]. Die Curve zu finden, an welcher die Subnormale und die Entfernung des Halbirungspunktes der Subtangente vom Anfangspunkte der Coordinaten in einer gegebenen Relation stehen.

Bezeichnen wir die rechtwinkligen Coordinaten der gesuchten Curve durch x, y, so ist die Abscisse des Endpunktes der Tangente eines Punktes xy, zufolge §. 71. (Aufg. 114.), $x_t=x-\frac{y}{p}$, und folglich die Abscisse des Halbirungspunktes der Subtangente

$$x'=\tfrac{1}{2}(x_t+x)=\tfrac{1}{2}\left(2x-\frac{y}{p}\right)=\frac{2xp-y}{2p}.$$

Die Subnormale z aber ist (§. 71. F. 11.) $z=yp$. Ist nun $x'=\varphi(z)$ die gegebene Relation, so haben wir $\frac{2xp-y}{2p}=\varphi(yp)$ oder

$$y=2xp-2p\varphi(yp), \qquad (10)$$

welches die Differentialgleichung der gesuchten Curve ist.

Diese Gleichung kann integrirt werden, ohne daß die Function φ bestimmt ist. Wir setzen nämlich

$$yp=a, \qquad (11)$$

wo a eine willkürliche Constante bezeichnet, und integriren diese letzte Glei-

chung, wodurch wir §. 124.

$$y^2 = 2ax + C$$

erhalten. Setzen wir nun die willkürliche Constante $C = -2a\varphi(a)$, so haben wir

$$y^2 = 2a[x - \varphi(a)] \; ; \qquad (12)$$

und dies ist das complette Integral der Gleichung (10). Denn differentiiren wir diese Gleichung (12) nach x, so kommt

$$yp = a \; , \qquad (11)$$

und eliminiren wir die Constante a zwischen (11) u. (12), so erhalten wir die Gleichung (10) wieder.

Die gefundene Gleichung (12) drückt eine Parabel aus, deren Parameter gleich 2a ist, und deren Scheitel die Entfernung $\varphi(a)$ vom Anfangspunkte der Coordinaten hat. Es ist leicht zu sehen, daß eine solche Parabel die Bedingung der Aufgabe erfüllt. Denn da die Subnormale dem halben Parameter gleich ist, so haben wir $z = a$, und da die Subtangente eines jeden Punktes doppelt so groß ist, als die vom Scheitel anfangende Abscisse dieses Punktes (§. 35. Aufg. 63.), so halbirt der Scheitel die Subtangente; die Entfernung des Halbirungspunktes der Subtangente ist daher $\varphi(a)$, also $x' = \varphi(a)$. Aus $z = a$ und $x' = \varphi(a)$ aber folgt $x' = \varphi(z)$, welches die Bedingung der Aufgabe ist.

Außer diesen Parabeln giebt es indessen noch eine Curve, welche der Bedingung der Aufgabe genügt. Dies ist die einhüllende Curve aller dieser Parabeln, deren Gleichung wir, zufolge des §. 94., erhalten, wenn wir zwischen der Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2a[x - \varphi(a)] \qquad (12)$$

und der, durch Differentiation nach a gebildeten, Gleichung

$$x - [\varphi(a) + a\varphi'(a)] = 0 \qquad (13)$$

die willkürliche Constante a eliminiren. Die Finalgleichung ist eine particuläre Solution der Gleichung (10).

I. Es sey z. B. die gegebene Relation $x' = nz$, so ist $\varphi(a) = na$, $\varphi'(a) = n$. Die Gleichungen (12) u. (13) sind dann

$$y^2 = 2a(x - na) \quad ; \quad x - 2na = 0 \; ;$$

und die Elimination von a giebt

$$y^2 = \frac{x^2}{2n} \quad \text{oder} \quad y = \pm\frac{x}{\sqrt{2n}} \; ,$$

welches die Gleichung zweier, durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Geraden ist.

§. 124.

II. Es sey die gegebene Relation $x' = k^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}$, so ist $\varphi(a) = k^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$, $\varphi'(a) = \frac{1}{2} k^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}}$. Die Gleichungen (12) u. (13) sind in diesem Falle

$$y^2 = 2a(x - k^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}) \quad ; \quad x - \tfrac{3}{2} k^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} = 0 ;$$

und die Elimination von a giebt

$$y^2 = \tfrac{8}{27} \cdot \frac{x^3}{k} ,$$

welches die Gleichung der Neilischen Parabel ist (§. 58. S. 6).

§. 125.

Die Trajectorie ist eine Curve, welche eine Reihe stetig auf einander folgender Curven so schneidet, daß die Durchschnittspunkte einer gegebenen Bedingung entsprechen. Insbesondere versteht man aber unter einer Trajectorie diejenige Curve, welche die stetig auf einander folgenden Curven der Reihe unter demselben Winkel schneidet. Ist dieser Winkel ein rechter, so heißt die schneidende Curve orthogonale Trajectorie.

Aufgabe [220]. Die Gleichung der stetig auf einander folgenden Curven und der Winkel, unter welchem diese geschnitten werden sollen, ist gegeben; es soll die Gleichung der Trajectorie gefunden werden.

Es sey

$$\varphi(y', x', a) = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung der gegebenen Curven in rechtwinkligen Coordinaten, in welcher a diejenige Größe bedeutet, welche sich von einer Curve zur andern verändert, und es sey n die trigonometrische Tangente des gegebenen Winkels.

Sind nun x, y die auf dieselben Achsen bezogenen Coordinaten der gesuchten Curve, und bezeichnen wir, der Kürze wegen, $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{dy}{dx}$ respective durch p', p, so ist, der Bedingung der Aufgabe gemäß, da p' u. p die trigonometrischen Tangenten der Winkel sind, welche die Berührungslinien in den Punkten x'y' u. xy mit der Abscissenachse bilden, für die Durchschnittspunkte der Trajectorie und der gegebenen Curven

$$n = \frac{p - p'}{1 + pp'} ,$$

oder, wenn wir den Nenner fortschaffen,

$$(np'-1)\frac{dy}{dx}+p'+n=0\,. \qquad (2)$$ §. 125.

In dieser Gleichung ist p' als eine gegebene Function von y', x' und a zu betrachten, da die Gleichung (1) gegeben ist. Eliminiren wir die Größe a zwischen den Gleichungen (1) und (2), so erhalten wir eine Gleichung, welche nur x', y' und $\frac{dy}{dx}$ enthält, und diese ist die Differentialgleichung der gesuchten Trajectorie, wenn wir x u. y für x' u. y' setzen, weil für die Durchschnittspunkte der Trajectorie mit den gegebenen Curven $x = x'$ und $y = y'$ ist.

Soll die Trajectorie eine orthogonale seyn, so ist $n = \frac{1}{0}$ zu setzen, wodurch die Gleichung (2) sich auf

$$p'\frac{dy}{dx}+1=0 \qquad (3)$$

reducirt.

Wenn statt der Gleichung (1) die Polargleichung

$$\varphi(u',t',a)=0 \qquad (4)$$

der geschnittenen Curven gegeben ist, und t, u die Polarcoordinaten der gesuchten Trajectorie bedeuten, so ist, weil $\frac{1}{u'}\frac{du'}{dt'}$ und $\frac{1}{u}\frac{du}{dt}$ die trigonometrischen Tangenten der Winkel sind, welchen die Normalen mit den Leitstrahlen bilden (§. 71.), für die Durchschnittspunkte der Trajectorie mit den gegebenen Curven,

$$n=\frac{\frac{1}{u}\frac{du}{dt}-\frac{1}{u'}\frac{du'}{dt'}}{1+\frac{1}{uu'}\frac{du}{dt}\frac{du'}{dt'}},$$

oder, wenn wir die Nenner fortschaffen,

$$\left(n\frac{du'}{dt'}-u'\right)\frac{du}{dt}+u\left(\frac{du'}{dt'}+nu'\right)=0\,. \qquad (5)$$

In dieser Gleichung ist $\frac{du'}{dt'}$ als eine bekannte Function von u', t' und a zu betrachten, da die Gleichung (4) gegeben ist. Eliminiren wir die Größe a zwischen den Gleichungen (4) und (5), so erhalten wir eine Gleichung, welche nur u', t' und $\frac{du}{dt}$ enthält, und diese ist die Differentialgleichung der

§. 125. gesuchten Trajectorie, wenn wir darin t u. u für t' u. u' setzen, weil für die Durchschnittspunkte der Trajectorie mit den gegebenen Curven $t = t'$ und $u = u'$ ist.

Soll die Trajectorie eine orthogonale seyn, so ist $n = \frac{1}{6}$ zu setzen, wodurch sich die Gleichung (5) auf

$$\frac{du'}{dt'}\frac{du}{dt} + uu' = 0 \qquad (6)$$

reducirt.

Da die Entwickelung von a aus der Gleichung (1), oder auch die Elimination dieser Größe zwischen den Gleichungen (1) u. (2) sich zuweilen nicht ausführen läßt — ein Fall, der oft eintritt, wenn die Gleichung (1) transscendent ist — und die Aufstellung der Differentialgleichung der Curve nach der oben angegebenen Art dann unmöglich wird; so ist es gut, noch ein anderes Verfahren zur Aufsuchung der Trajectorie zu kennen, und dies läßt sich auf folgende Weise herleiten.

Da eine jede Curve der Reihe einen bestimmten Durchschnittspunkt, also einen bestimmten Punkt der gesuchten Trajectorie giebt, so folgt, daß jedem bestimmten Werthe von a ein bestimmter Werth von x entspricht, oder, mit andern Worten, daß x eine Function von a und also umgekehrt auch a eine Function von x ist. Läßt sich demnach y' aus der gegebenen Gleichung (1) entwickeln, so daß wir erhalten

$$y' = \psi(x', a) , \qquad (7)$$

so verwandeln wir zunächst x' u. y' in x u. y, und differentiiren diese Gleichung nach a, wodurch wir

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d\psi}{dx}\right) + \left(\frac{d\psi}{da}\right)\frac{da}{dx}$$

erhalten; diesen Ausdruck substituiren wir für $\frac{dy}{dx}$ in die Gleichung (2), was uns

$$(np' - 1)\left\{\left(\frac{d\psi}{dx}\right) + \left(\frac{d\psi}{da}\right)\frac{da}{dx}\right\} + p' + n = 0$$

giebt. In diese Gleichung müssen wir für p' seinen aus der Gleichung (7) zu entwickelnden Werth setzen, indem wir wieder x' u. y' in x u. y verwandeln. Durch diese Verwandlung aber geht p' offenbar in $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)$ und die zuletzt angegebene Gleichung in

$$\left\{n\left(\frac{d\psi}{dx}\right)-1\right\}\left\{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)+\left(\frac{d\psi}{da}\right)\frac{da}{dx}\right\}+\left(\frac{d\psi}{dx}\right)+n=0\,,$$ §. 125.

oder in

$$n\left\{1+\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2\right\}+\left\{n\left(\frac{d\psi}{dx}\right)-1\right\}\left(\frac{d\psi}{da}\right)\frac{da}{dx}=0 \qquad (8)$$

über. Diese Differentialgleichung enthält kein y, sondern nur x und a; integriren wir sie, so erhalten wir eine primitive Gleichung zwischen x und a. Eliminiren wir a zwischen dieser Gleichung und der Gleichung (1 oder 7), in welcher letztern x' u. y' in x u. y zu verwandeln sind, so ergiebt sich die verlangte Gleichung der Trajectorie.

Soll die Trajectorie eine orthogonale seyn, so ist, wie oben, $n=\frac{1}{0}$ zu setzen, wodurch die Gleichung (8) sich auf

$$1+\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\left(\frac{d\psi}{da}\right)\frac{da}{dx}=0 \qquad (9)$$

reducirt.

Beispiel I. Es seyen die Linien, welche geschnitten werden sollen, durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Gerade. Die Gleichung (1 od. 7) ist in diesem Falle

$$y'=ax'\,,$$

woraus $p'=a$. Die Gleichung (2) ist demnach

$$(na-1)\frac{dy}{dx}+a+n=0\,,$$

und wenn wir für a seinen Werth aus $y'=ax'$ setzen, und x', y' mit x, y vertauschen, so ergiebt sich

$$(ny-x)\frac{dy}{dx}+y+nx=0\,.$$

Diese homogene Differentialgleichung läßt sich auf verschiedene Arten integriren. Transformiren wir sie in Polarcoordinaten, indem wir $y=u\sin t$, $x=u\cos t$, und demnach $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dt}\sin t+u\cos t}{\frac{du}{dt}\cos t-u\sin t}$ setzen, so erhalten wir

$n\frac{du}{dt}-u=0$, oder

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dt}=\frac{1}{n}\,,$$

§. 125. alſo

$$\int \frac{1}{u}\frac{du}{dt} = \frac{t}{n}\,, \quad \text{d. i.} \quad log\frac{u}{C} = \frac{t}{n}$$

oder

$$u = Ce^{\frac{t}{n}}.$$

Die Trajectorie iſt daher eine logarithmiſche Spirale (vergl. §. 72. Aufg. 117. V.). Für die orthogonale Trajectorie iſt $n = \infty$, alſo $\frac{t}{n} = 0$ und $e^{\frac{t}{n}} = 1$, folglich $u = C$, wodurch ein Kreis ausgedrückt iſt.

Nach dem andern oben angegebenen Verfahren erhalten wir, aus der Gleichung $y' = ax'$, $\psi(x', a) = ax'$; daher iſt $\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = a$, $\left(\frac{d\psi}{da}\right) = x$, und in Folge der Gleichung (8)

$$n(1+a^2)+(na-1)x\frac{da}{dx} = 0\,.$$

Durch Separation der Veränderlichen erhalten wir

$$\frac{1-na}{1+a^2}\frac{da}{dx} = \frac{n}{x}\,,$$

und durch Integration

$$arc(tang = a) - \tfrac{1}{2}n\,log(1+a^2) = n\,log\frac{x}{C}$$

oder

$$arc(tang = a) = n\,log\frac{\sqrt{x^2+a^2x^2}}{C}\,;$$

und wenn wir, in Folge der Gleichung $y = ax$, $\frac{y}{x}$ für a ſetzen

$$arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) = n\,log\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{C}\,,$$

oder auch

$$\sqrt{y^2+x^2} = Ce^{\frac{arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)}{n}}\,,$$

welches die Gleichung der logarithmiſchen Spirale in rechtwinkligen Coordinaten iſt.

Beiſpiel II. Es ſeyen die Curven, welche geſchnitten werden ſollen,

logarithmiſche Spiralen und §. 125.

$$u' = ae^{\frac{t'}{m}}$$

ihre Gleichung, in welcher a die von einer Curve zur andern ſich ändernde Größe iſt. Wir finden zunächſt $\frac{du'}{dt'} = \frac{a}{m} e^{\frac{t'}{m}} = \frac{u'}{m}$, und durch Subſtitution dieſes Ausdrucks in die Gleichung (5), indem wir u für u' ſetzen,

$$(n-m)\frac{du}{dt} + u(1+nm) = 0$$

oder

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dt} = \frac{1+nm}{m-n}.$$

Durch Integration erhalten wir hieraus

$$lcg\frac{u}{C} = \frac{1+nm}{m-n}.t \quad \text{oder} \quad u = Ce^{\frac{1+nm}{m-n}.t}$$

als Gleichung der Trajectorie, welche alſo wieder eine logarithmiſche Spirale iſt. Soll die Trajectorie orthogonal ſeyn, ſo muß $n = \infty$ geſetzt werden, wodurch ſich die gefundene Gleichung auf

$$u = Ce^{-mt}$$

reducirt. Soll die Trajectorie die gegebenen Spiralen unter demſelben conſtanten Winkel ſchneiden, unter welchen ſie von ihren Leitſtrahlen getroffen werden, ſo muß $n = u'\frac{dt'}{du'} = m$, alſo $m-n = 0$ ſeyn; die Differentialgleichung der Trajectorie reducirt ſich in dieſem beſondern Falle auf $\frac{dt}{du} = 0$, woraus $t = C'$ folgt, und dieſe Gleichung drückt eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade aus. Soll endlich die Trajectorie die gegebenen Spiralen unter demſelben conſtanten Winkel ſchneiden, welchen die Normalen dieſer Curven mit den zugehörigen Leitſtrahlen bilden, ſo muß $n = -\frac{1}{u'}\frac{du'}{dt'} = -\frac{1}{m}$, alſo $nm+1 = 0$ ſeyn, wodurch ſich die gefundene allgemeine Gleichung der Trajectorie auf $u = C$ reducirt, und hierdurch iſt ein Kreis ausgedrückt, deſſen Mittelpunkt im Pol der Spiralen liegt.

§. 125. Alle dieſe einzelnen Ergebniſſe hätten leicht vorausgeſehen werden können.

Aufgabe [221]. Es ſoll die orthogonale Trajectorie aller durch die Gleichung $y' = ax'^n$ ausgedrückten Parabeln gefunden werden, wenn a die ſich verändernde Größe iſt.

Wir erhalten zunächſt $\frac{dy'}{dx'} = p' = nax'^{n-1}$, und wenn wir dieſen Ausdruck in die Gleichung (3) ſetzen, und x' mit x vertauſchen,

$$nax^{n-1}\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

oder, da $a = \frac{y'}{x'^n} = \frac{y}{x^n}$ iſt,

$$ny\frac{dy}{dx} + x = 0,$$

woraus durch Integration

$$ny^2 + x^2 = C$$

als Gleichung der geſuchten Trajectorie folgt. Dieſe iſt daher eine Ellipſe, und bezeichnen wir ihre Achſen durch 2A, 2B, ſo iſt $A^2 = C$ und $B^2 = \frac{1}{n}C$. Die eine der beiden Achſen kann daher willkürlich angenommen werden; der Quotient $\frac{A^2}{B^2}$ aber iſt gleich n.

Es verſteht ſich von ſelbſt, daß man hier, und auch in jedem andern Falle, ſtatt die Conſtante a nach geſchehener Differentiation zu eliminiren, die gegebene Gleichung durch Entwickelung von a ſo umformen kann, daß dieſe Größe a den einen Theil der Gleichung bildet, und daß die ſodann vorzunehmende Differentiation, eine Differentialgleichung giebt, welche die Größe a nicht mehr enthält, und aus der man nur p' zu entwickeln und in die Gleichnng (2 od. 3) zu ſetzen braucht, um die Differentialgleichung der Trajectorie zu erhalten. Verfahren wir mit der gegebenen Gleichung $y' = ax'^n$ auf dieſe Weiſe, ſo finden wir nach einander: $a = \frac{y'}{x'^n}$; $0 = x'p' - ny'$; $p' = \frac{ny'}{x'} = \frac{ny}{x}$ und, durch Subſtitution dieſes Ausdrucks in die Gleichung (3), $ny\frac{dy}{dx} + x = 0$, wie oben.

Aufgabe [222]. Es ſoll die orthogonale Trajectorie aller durch

die Gleichung $\left(\frac{y'}{b}\right)^n + \left(\frac{x'}{a}\right)^n = 1$ ausgedrückten Curven gefunden wer- §. 125.
den, wenn a die sich verändernde Größe bedeutet.

Wir erhalten aus der gegebenen Gleichung

$$\frac{y'^{n-1}}{b^n}p' + \frac{x'^{n-1}}{a^n} = 0 ,$$

und wenn wir a eliminiren,

$$x'y'^{n-1}p' = y'^n - b^n , \quad \text{oder} \quad p' = \frac{y'^n - b^n}{x'y'^{n-1}} .$$

Setzen wir diesen Ausdruck von p' in die Gleichung (3), und x, y für x', y', so erhalten wir

$$(y^n - b^n)\frac{dy}{dx} + xy^{n-1} = 0 ,$$

oder auch

$$\left(y - \frac{b^n}{y^{n-1}}\right)\frac{dy}{dx} = -x ,$$

woraus wir durch Integration

$$\tfrac{1}{2}y^2 - \frac{b^n y^{2-n}}{2-n} = -\tfrac{1}{2}x^2 + C$$

oder

$$y^2 + x^2 = \frac{2b^n}{2-n}\cdot y^{2-n} + C$$

als Gleichung der gesuchten Trajectorie finden.

Wenn $n = 2$ ist, so drückt die gegebene Gleichung $\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$ eine Reihe von Ellipsen aus, in welchen die Scheitel einer Achse zusammen fallen. Die vorher gefundene Differentialgleichung, $\left(y - \frac{b^n}{y^{n-1}}\right)\frac{dy}{dx} = -x$, ist in diesem Falle

$$\left(y - \frac{b^2}{y}\right)\frac{dy}{dx} = -x$$

und giebt durch Integration $\frac{1}{2}y^2 - b^2 \log\frac{y}{C} = -\frac{1}{2}x^2$ oder

$$y^2 + x^2 = 2b^2 \log\frac{y}{C}$$

als Gleichung der Trajectorie jener Ellipsen.

§. 125. **Aufgabe [223].** Es soll die orthogonale Trajectorie aller Ellipsen gefunden werden, welche dieselben Brennpunkte haben.

Bezeichnen wir die gemeinschaftliche Excentricität der Ellipsen durch e, so ist die Gleichung dieser Ellipsen

$$a^2y'^2+(a^2-e^2)x'^2 = a^2(a^2-e^2) .$$

Daraus erhalten wir

$$p' = -\frac{(a^2-e^2)x'}{a^2y'} ,$$

und wenn wir diesen Ausdruck in die Gleichung (3) setzen,

$$(a^2-e^2)x'\frac{dy}{dx}-a^2y' = 0 .$$

Elimiriren wir nun a zwischen dieser Gleichung und derjenigen der Ellipsen, und setzen x u. y für x' u. y', so ergiebt sich

$$(y\frac{dy}{dx}+x)(x\frac{dy}{dx}-y) = e^2\frac{dy}{dx}$$

als Differentialgleichung der Trajectorie. Diese Gleichung stimmt mit der in der Aufgabe [215] (§. 123.) gefundenen überein, wenn wir e^2 in $-e^2$ verwandeln, und kann wie diese, indem man $y^2+x^2+e^2 = 2xz$ setzt, integrirt werden. Man findet alsdann zunächst zwischen x u. z die Gleichung

$$z+\sqrt{z^2-e^2} = \frac{x}{C} ,$$

oder, wenn man $\frac{A^2}{e^2}$ für die willkürliche Constante C setzt, die Gleichung rational macht und dann $y^2+x^2+e^2$ für 2xz substituirt,

$$A^2y^2+(A^2-e^2)x^2 = A^2(A^2-e^2)$$

eine Gleichung, in welcher A die willkürliche Constante ist. Diese Gleichung der Trajectorie ist der gegebenen vollkommen ähnlich; sie drückt Ellipsen oder Hyperbeln aus, je nachdem man die willkürliche Constante A^2 größer oder kleiner als e^2 nimmt. Es muß aber A^2 kleiner als e^2 genommen werden, wenn die gefundene Curve die gegebenen Ellipsen wirklich schneiden soll, was man dadurch findet, daß man die Coordinaten der Durchschnittspunkte aus den beiden Gleichungen entwickelt, die, wie sich dann zeigt, unter der Voraussetzung, daß $a^2 > e^2$ ist, nur reell sind, wenn $A^2 < e^2$ ist; wie denn auch von vorn herein klar ist, daß wenn $A^2 > e^2$ die gefundene Gleichung eine der gegebenen Ellipsen ausdrückt, die sich nicht schneiden, da sie beide Brennpunkte gemein haben.

Die orthogonale Trajectorie ist also eine Hyperbel, welche mit den gegebenen Ellipsen beide Brennpunkte gemein hat. Uebrigens sieht man leicht ein, daß eine Ellipse und Hyperbel mit gemeinschaftlichen Brennpunkten sich nothwendigerweise rechtwinklig schneiden müssen, weil die Gerade, welche den Winkel der beiden, von den Brennpunkten nach einem Durchschnittspunkte gezogenen, Leitstrahlen halbirt, die Normale an der einen und die Tangente an der andern Curve ist. §. 125

Aufgabe [224]. Die orthogonale Trajectorie aller Linien zweiten Grades zu finden, welche sich in den Eckpunkten eines gegebenen Rechtecks schneiden.

Nehmen wir die Verbindungslinien der Halbirungspunkte der gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks zu Coordinatenachsen, und bezeichnen die Seiten des Rechtecks durch 2α und 2β, so werden alle Linien zweiten Grades, welche durch die Eckpunkte gehen, durch die Gleichung

$$y'^2 + ax'^2 = \beta^2 + a\alpha^2 ,$$

ausgedrückt, wo a diejenige Größe ist, die sich von einer Curve zur andern verändert. Entwickeln wir a aus dieser Gleichung, so kommt

$$a = -\frac{y'^2 - \beta^2}{x'^2 - \alpha^2} ,$$

und nun durch Differentiation

$$(x'^2 - \alpha^2)y'p' - (y'^2 - \beta^2)x' = 0 .$$

Vermittelst der Gleichung (3) erhalten wir jetzt

$$(y^2 - \beta^2)x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

als Differentialgleichung der Trajectorie. Um diese zu integriren, separiren wir die Veränderlichen, und erhalten

$$\frac{y^2 - \beta^2}{y}\,\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - \alpha^2}{x} ,$$

woraus denn

$$\tfrac{1}{2}y^2 - \beta^2 \log y = -\tfrac{1}{2}x^2 + \alpha^2 \log\frac{x}{C} ,$$

oder auch, wenn wir C für C^{α^2} setzen,

$$y^2 + x^2 = 2\log\frac{y^{\beta^2}x^{\alpha^2}}{C} \quad \text{oder} \quad Ce^{\frac{1}{2}(y^2+x^2)} = y^{\beta^2}x^{\alpha^2}$$

folgt, welches die Gleichung der gesuchten Trajectorie ist.

§. 125. und integriren, so kommt

$$y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 - n \log \frac{x}{C}$$

oder

$$2y^2 + x^2 + 2n \log \frac{x}{C} = 0 .$$

§. 126.

Aufgabe [226]. Die Trajectorie aller Curven zu finden, welche einer gegebenen ähnlich und ähnlich-liegend sind, und die sämmtlich einen und denselben Aehnlichkeitspunkt mit der gegebenen haben.

Es sey der gemeinschaftliche Aehnlichkeitspunkt der Anfangspunkt der Polarcoordinaten, und

$$u' = \varphi(t')$$

die Polargleichung der gegebenen Curve. Alsdann sind sämmtliche Curven der Reihe durch $\frac{u'}{a} = \varphi(t')$ oder

$$u' = a\varphi(t')$$

auszudrücken. Hieraus erhalten wir $\frac{du'}{dt'} = a\varphi'(t')$, wenn $\varphi'(t')$ für $\frac{d\varphi(t')}{dt'}$ gesetzt wird. Substituiren wir diese Ausdrücke von u' und $\frac{du'}{dt'}$ in die Gleichung (5) des vorigen §., so kommt nach der Division durch a, und wenn wir t für t' setzen,

$$\{n\varphi'(t) - \varphi(t)\}\frac{du}{dt} + u\{\varphi'(t) + n\varphi(t)\} ,$$

oder

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dt} = \frac{\varphi'(t) + n\varphi(t)}{\varphi(t) - n\varphi'(t)} , \qquad (1)$$

welches die Differentialgleichung der Trajectorie ist. Integriren wir sie, so erhalten wir

$$\log \frac{u}{C} = \int \frac{\varphi'(t) + n\varphi(t)}{\varphi(t) - n\varphi'(t)} dt \qquad (2)$$

als Polargleichung der Trajectorie, in welcher C die Constante der Integration ist.

Soll die Trajectorie eine orthogonale seyn, so ist $n = \frac{1}{0}$ zu setzen, wodurch sich

log

$$\log\frac{u}{C} = -\int\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}dt \qquad (3)\ \S.\ 126.$$

als Polargleichung der orthogonalen Trajectorie ergiebt.

Beispiel I. Es soll die orthogonale Trajectorie aller ähnlichen und ähnlich-liegenden concentrischen Ellipsen gefunden werden.

Nehmen wir die größere Achse zur Abscissenachse, von welcher die t angerechnet werden, so ist

$$u' = \frac{ab}{\{a^2\sin^2 t' + b^2\cos^2 t'\}^{\frac{1}{2}}}$$

die Gleichung einer von diesen Ellipsen. Wir haben daher

$$\varphi(t) = \frac{ab}{\{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\}^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \varphi'(t) = -\frac{abe^2\sin t\cos t}{\{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\}^{\frac{3}{2}}},$$

wo e^2 für $a^2 - b^2$ gesetzt ist.

Die Gleichung (3) ist also im gegenwärtigen Falle

$$\log\frac{u}{C} = \frac{1}{e^2}\int\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{\sin t\cos t}.dt = \frac{1}{e^2}\int\left\{\frac{a^2\sin t}{\cos t} + \frac{b^2\cos t}{\sin t}\right\}dt,$$

oder

$$\log\frac{u}{C} = -\frac{a^2}{e^2}\log\cos t + \frac{b^2}{e^2}\log\sin t\ .$$

Diese Gleichung können wir wie folgt umformen,

$$\log\frac{u^{e^2}}{C^{e^2}} = \log\frac{\sin^{b^2} t}{\cos^{a^2} t},$$

also, wenn wir C^{b^2} für C^{e^2} setzen, in

$$u^{e^2} = C^{b^2}\frac{\sin^{b^2} t}{\cos^{a^2} t}, \quad \text{oder} \quad u^{a^2-b^2}.\cos^{a^2} t = C^{b^2}\sin^{b^2} t,$$

und wenn wir mit u^{b^2} multipliciren, in

$$u^{a^2}\cos^{a^2} t = C^{b^2}u^{b^2}\sin^{b^2} t\ .$$

Gehen wir nun zu rechtwinkligen Coordinaten über, so haben wir

$$x^{a^2} = C^{b^2}y^{b^2},$$

oder, wenn wir $\frac{a^2}{b^2} = n$ setzen,

§. 126. $$Cy = x^n .$$

Die Trajectorie iſt alſo eine Parabel nten Grades.

Wir bemerken hierbei, daß ſich dieſelbe Gleichung nach der im vorigen Paragraphen für rechtwinklige Coordinaten aufgeſtellten Formel auf einfachere Weiſe auffinden läßt. Denn die genannten Ellipſen ſind in rechtwinkligen Coordinaten durch die Gleichung

$$ny'^2 + x'^2 = a$$

auszudrücken, wo a die von einer Curve zur andern ſich verändernde Conſtante iſt. Durch Differentiation erhalten wir daraus $ny'p' + x' = 0$, und vermittelſt der Gleichung (3) des vorigen §.

$$x\frac{dy}{dx} - ny = 0 ,$$

eine Gleichung, die, nachdem man die Variabeln ſeparirt hat, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{n}{x}$, und dann durch Integration $log\, Cy = n\, log\, x$, oder

$$Cy = x^n ,$$

wie vorher, giebt.

Uebrigens wird man leicht einſehen, daß ſich dieſes Reſultat aus der Löſung der Aufgabe [221] ohne alle Rechnung hätte herleiten laſſen.

Beiſpiel II. Es ſoll die orthogonale Trajectorie aller ähnlichen und ähnlich-liegenden confocalen Linien zweiten Grades gefunden werden.

Wir haben zufolge des §. 33. (S. 16)

$$u' = \varphi(t') = \frac{r}{1 - m\, cos\, t'} ,$$

woraus wir

$$\frac{du'}{dt'} = \varphi'(t') = -\frac{mr\, sin\, t'}{(1 - m\, cos\, t')^2}$$

erhalten. Setzen wir dieſe Ausdrücke in die Gleichung (3), ſo kommt

$$log\frac{u}{C} = \int \frac{1 - m\, cos\, t}{m\, sin\, t} dt = \int \left\{ \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{sin\, t} - \frac{cos\, t}{sin\, t} \right\} dt ,$$

alſo

$$log\frac{u}{C} = \frac{1}{m} log\, tang\, \tfrac{1}{2}t - log\, sin\, t ,$$

oder

$$log\frac{u\, sin\, t}{C} = log\, tang^{\frac{1}{m}}\, \tfrac{1}{2}t ,$$

d. i. §. 126.

$$u \sin t = C \operatorname{tang}^{\frac{1}{m}} \tfrac{1}{2} t$$

als Polargleichung der gesuchten Curve.

Für die Parabel ist $m = 1$ (§. 33.), und dieser Werth von m reducirt die gefundene Gleichung auf

$$u \sin t = C \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} t = C \frac{\sin t}{1 + \cos t} ,$$

also auf

$$u = \frac{C}{1 + \cos t} ,$$

wodurch wieder eine Parabel ausgedrückt wird.

Beispiel III. Es soll die orthogonale Trajectorie aller Kreise gefunden werden, welche mit einem gegebenen einen und denselben Aehnlichkeitspunkt haben.

Es sey der gegebene Aehnlichkeitspunkt der Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten, deren Abscissenachse wir durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises legen. Die Gleichung dieses Kreises ist alsdann

$$y'^2 + x'^2 - 2\alpha x' + k^2 = 0 ,$$

oder in Polarcoordinaten,

$$u'^2 - 2\alpha u' \cos t' + k^2 = 0 ;$$

woraus wir erhalten:

$$u' = \varphi(t') = \alpha \cos t' \pm \sqrt{\alpha^2 \cos^2 t' - k^2} ;$$

$$\frac{du'}{dt'} = \varphi'(t') = \frac{\alpha \sin t' \{\alpha \cos t' \pm \sqrt{\alpha^2 \cos^2 t' - k^2}\}}{\mp \sqrt{\alpha^2 \cos^2 t' - k^2}} .$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (3), so ergiebt sich

$$\log \frac{u}{C} = \pm \int \frac{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 t - k^2}}{\alpha \sin t} dt .$$

Setzen wir, um das Integral zu finden,

$\alpha^2 \cos^2 t - k^2 = z^2$, also $\alpha \cos t = \sqrt{k^2 + z^2}$ u. $\alpha \sin t = \sqrt{\alpha^2 - k^2 - z^2}$,

so ist $\alpha^2 \sin t \cos t \frac{dt}{dz} = -z$, und demnach

$$\pm \int \frac{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 t - k^2}}{\alpha \sin t} dt = \mp \int \frac{z^2}{(\alpha^2 - k^2 - z^2)\sqrt{k^2 + z^2}} dz ,$$

§. 126. woraus sich denn

$$\log\frac{u}{C} = \pm\log(z+\sqrt{k^2+z^2}) \mp \frac{\sqrt{\alpha^2-k^2}}{\alpha}\log\frac{(\alpha^2-k^2)\sqrt{k^2+z^2}+\alpha\sqrt{\alpha^2-k^2}.z}{\sqrt{\alpha^2-k^2-z^2}},$$

und wenn wir wieder $\sqrt{\alpha^2\cos^2 t-k^2}$ für z und $\alpha\cos t$ für $\sqrt{k^2+z^2}$ setzen,

$$\log\frac{u}{C} = \pm\log\{\sqrt{\alpha^2\cos^2 t-k^2}+\alpha\cos t\}$$
$$\mp\frac{\sqrt{\alpha^2-k^2}}{\alpha}\log\frac{\sqrt{\alpha^2-k^2}\{\sqrt{\alpha^2-k^2}.\cos t+\sqrt{\alpha^2\cos^2 t-k^2}\}}{\sin t}$$

als Polargleichung der Trajectorie ergiebt.

Wenn $k = 0$ ist, berühren die Kreise einander und die Ordinatenachse im Anfangspunkte der Coordinaten; die Ordinatenachse ist alsdann der Ort der gleichen Tangente, und es reducirt sich die gefundene Gleichung der Trajectorie auf $\log\frac{u}{C} = \log\frac{\sin t}{\alpha}$, also auf $u = \frac{C}{\alpha}\sin t$, wodurch ein Kreis ausgedrückt wird, der die Abscissenachse im Anfangspunkte der Coordinaten berührt, was mit dem, in der Lösung der 225sten Aufgabe erwähnten, Falle übereinstimmt.

Aufgabe [227]. Die orthogonale Trajectorie einer gegebenen Curve zu finden, wenn diese Curve sich in ihrer Ebene um einen gegebenen festen Punkt dreht.

Wir nehmen den gegebenen Punkt zum Anfangspunkte der Polarcoordinaten, und es sey, in Beziehung auf dieselben, die Gleichung der gegebenen Curve in einer ihrer Lagen

$$t' = \varphi(u') .$$

In irgend einer andern Lage ist die Gleichung dieser Curve alsdann

$$t'+a = \varphi(u') .$$

Hieraus erhalten wir $\frac{dt'}{du'} = \varphi'(u')$, also $\frac{du'}{dt'} = \frac{1}{\varphi'(u')}$, und wenn wir diesen Ausdruck in die Gleichung (6) des vorigen §. setzen, und t', u' mit t, u vertauschen,

$$\frac{1}{\varphi'(u)}\frac{du}{dt}+u^2 = 0 ,$$

welches die Differentialgleichung der gesuchten Curve ist. Bringen wir diese auf die Form $\frac{dt}{du} = -\frac{1}{u^2\varphi'(u)}$, so ergiebt sich durch Integration

$$t+C = -\int \frac{1}{u^2 \varphi'(u)} du \qquad (4)$$ §. 126.

las Gleichung der orthogonalen Trajectorie.

Beiſpiel I. Es ſoll die orthogonale Trajectorie aller gleichen und confocalen Parabeln gefunden werden.

Wenn wir den conſtanten Parameter dieſer Parabeln durch 2r bezeichnen, ſo iſt die Gleichung von einer derſelben (§. 33. S. 10 od. 16)

$$(1 - \cos t')u' = r ,$$

woraus wir $t' = arc\left(\cos = \frac{u'-r}{u'}\right)$, alſo

$$\varphi(u) = arc\left(\cos = \frac{u-r}{u}\right) ,$$

und demnach

$$\varphi'(u) = -\frac{r}{u\sqrt{2ru - r^2}}$$

erhalten. Die obige Gleichung (4) iſt alſo im gegenwärtigen Falle

$$t+C = \int \frac{\sqrt{2ru - r^2}}{ru} du ,$$

oder wenn wir die Integration ausführen,

$$t+C = 2\left\{\frac{\sqrt{2ru - r^2}}{r} - arc\left(tang = \frac{\sqrt{2ru - r^2}}{r}\right)\right\} ,$$

wodurch die geſuchte Trajectorie ausgedrückt wird.

Beiſpiel II. Es ſoll die orthogonale Trajectorie der Spirale, welche durch die Gleichung

$$u'^n = r^n t'$$

ausgedrückt wird, und die ſich um ihren Pol dreht, gefunden werden.

Aus der gegebenen Gleichung erhalten wir $t' = \frac{u'^n}{r^n}$, alſo iſt $\varphi(u) = \frac{u^n}{r^n}$ und $\varphi'(u) = n\frac{u^{n-1}}{r^n}$. Die oben gefundene Gleichung (4) giebt demnach

$$t+C = -\frac{r^n}{n}\int \frac{1}{u^{n+1}} . du ,$$

und, wenn wir die Integration ausführen,

$$t+C = +\frac{r^n}{n^2 u^n} ,$$

§. 126. oder, indem wir die Constante C, welche sich nur auf die Lage der Achse, von welcher die t angerechnet werden, bezieht, gleich Null setzen,

$$n^2u^nt = r^n$$

als Gleichung der orthogonalen Trajectorie.

Aufgabe [228]. Die orthogonale Trajectorie einer gegebenen Curve zu finden, wenn diese Curve sich so bewegt, daß jeder Punkt derselben eine gerade Linie beschreibt, die einer gegebenen Richtung parallel ist.

Wir nehmen die gegebene Richtung zur Ordinatenachse rechtwinkliger Coordinaten. Ist nun, in Beziehung auf diese,

$$y' = \varphi(x')$$

die Gleichung der gegebenen Curve in einer ihrer Lagen, so wird die Gleichung

$$y' + a = \varphi(x')$$

dieselbe Curve in einer andern der genannten Lagen ausdrücken. Nun ist $\frac{dy'}{dx'} = p' = \varphi'(x')$, und durch Substitution dieses Ausdruckes in die Gleichung (3) des vorigen §. erhalten wir, wenn x' in x verwandelt wird,

$$\varphi'(x)\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

woraus sich $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\varphi'(x)}$, und durch Integration

$$y = -\int \frac{1}{\varphi'(x)}dx + C \qquad (5)$$

als Gleichung der gesuchten Trajectorie ergiebt.

Beispiel I. Es soll die orthogonale Trajectorie der Parabel, deren Gleichung $y' = kx'^n$ ist, gefunden werden, wenn diese Curve parallel mit der Ordinatenachse verschoben wird.

Wir haben in diesem Falle $\varphi(x') = kx'^n$, daher $\varphi'(x) = nkx^{n-1}$, und zufolge der Gleichung (5), finden wir

$$y = -\frac{1}{nk}\int x^{1-n}dx,$$

d. i.

$$y = \frac{x^{2-n}}{(n-2)nk} + C$$

als Gleichung der Trajectorie.

Für $n = 3$ ist die Gleichung der Trajectorie $y = \frac{1}{3kx} + C$ oder §. 126.
$3kxy = 3kCx + 1$, wodurch offenbar eine Hyperbel ausgedrückt wird.

Beispiel II. Es sey die gegebene Curve eine durch die Gleichung

$$y' = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x'}{m}} + e^{-\frac{x'}{m}}\right)$$

ausgedrückten Kettenlinie, und es soll die orthogonale Trajectorie gefunden werden, wenn jene Curve sich parallel der Ordinatenachse bewegt.

Hier ist $\varphi(x') = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)$, also, zufolge der Gleichung (5),

$$y = -2\int \frac{1}{\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)} dx + C .$$

Um die Integration auszuführen, setzen wir $e^{\frac{x}{m}} = z$, also $x = m\,log\,z$ und $\frac{dx}{dz} = \frac{m}{z}$. Hierdurch erhalten wir

$$y = 2m\int \frac{1}{1-z^2} \cdot dz + C = m\,log\,\frac{C'(1+z)}{1-z} ,$$

woraus sich $e^{\frac{y}{m}} = \frac{C'(1+z)}{1-z}$, und wenn wir wieder $e^{\frac{x}{m}}$ für z setzen,

$\left(1 - e^{\frac{x}{m}}\right)e^{\frac{y}{m}} = C'\left(1 + e^{\frac{x}{m}}\right)$ oder auch

$$e^{\frac{x+y}{m}} - e^{\frac{y}{m}} + C'e^{\frac{x}{m}} + C' = 0$$

als Gleichung der orthogonalen Trajectorie ergiebt.

Beispiel III. Es sey die gegebene Curve eine Cycloide, welche sich ihrer Basis parallel bewegt.

Nehmen wir die Basis zur Ordinatenachse, so ist die Gleichung der Cycloide (§. 66. S. 4)

$$y = a \cdot arc\left(cos = \frac{a-x}{a}\right) - \sqrt{2ax - x^2} ,$$

woraus wir $\varphi'(x) = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}$ und demnach, zufolge der Gleichung (5),

§. 126.

$$y = -\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} dx + C$$

erhalten. Führen wir die angedeutete Integration aus, so ist

$$y = -a \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{a-x}{a}\right) - \sqrt{2ax - x^2} + C .$$

Diese Gleichung drückt eine Cycloide aus, welche der gegebenen gleich ist, die aber eine umgekehrte Lage hat, so daß die Basis der einen die Tangente in den Scheiteln der andern ist.

§. 127.

Aufgabe [229]. Es soll die Trajectorie gefunden werden, welche eine Reihe stetig auf einander folgender Curven so schneidet, daß der Winkel, welche eine jede Curve der Reihe mit der schneidenden Curve in dem Durchschnittspunkte bildet, von der Ordinate dieses Punktes halbirt wird.

Es sey

$$\varphi(x', y', a) = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung der gegebenen Curven in rechtwinkligen Coordinaten, worin a die zu variirende Constante bedeutet, und es seyen x, y die auf dieselben Achsen bezogenen Coordinaten der gesuchten Trajectorie. Bezeichnen wir $\frac{dy'}{dx'}$ durch p', so muß in Folge der Bedingung der Aufgabe

$$\frac{dy}{dx} = -p' \qquad (2)$$

seyn. Eliminiren wir zwischen den Gleichungen (1) u. (2) die Constante a, und setzen, nachdem dies geschehen, x u. y an die Stelle von x' u. y', weil für die Durchschnittspunkte x' = x und y' = y ist, so erhalten wir die gesuchte Gleichung der Trajectorie.

Beispiel I. Es soll die Trajectorie gefunden werden, welche alle durch die Gleichung

$$y' = ax'^n$$

ausgedrückten Curven, in welcher a die zu variirende Constante ist, so schneidet, daß die Winkel in den Durchschnittspunkten von den Ordinaten derselben halbirt werden.

Wir erhalten aus der gegebenen Gleichung $p' = nax'^{n-1}$, also zufolge der Gleichung (2)

$$\frac{dy}{dx} = -nax'^{n-1} ,$$ §. 127.

und wenn wir a eliminiren und x, y für x', y' ſetzen,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ny}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{n}{x} ;$$

alſo durch Integration

$$log\frac{y}{C} = -n\,log\,x \quad \text{oder} \quad yx^n = C$$

als Gleichung der geſuchten Trajectorie.

Wenn $n = 1$, d. i. wenn die gegebenen Linien durch den Anfangspunkt gehende Gerade ſind, ſo iſt

$$yx = C ,$$

die Trajectorie alſo eine gleichſeitige Hyperbel.

Beiſpiel II. Es ſoll die Trajectorie gefunden werden, welche eine Curve, die ſich dergeſtalt bewegt, daß alle ihre Punkte gerade Linien, die einer gegebenen parallel ſind, beſchreiben, ſo ſchneidet, daß die Winkel in den Durchſchnittspunkten von den Ordinaten halbirt werden.

Es ſey die gegebene Gerade die Ordinatenachſe und alsdann

$$y' = \varphi(x')$$

die Gleichung der gegebenen Curve in einer ihrer Lagen, ſo wird

$$y' + a = \varphi(x')$$

die Gleichung aller von der Trajectorie zu ſchneidenden Curven ſeyn, wenn a als eine ſich ſtetig ändernde Größe betrachtet wird. Wir erhalten aus dieſer letzten Gleichung $p' = \varphi'(x')$, und, zufolge der Gleichung (2),

$$\frac{dy}{dx} = -\varphi'(x) ,$$

folglich, wenn wir integriren, da $\int\varphi'(x)dx = \varphi(x) + C$ iſt,

$$y + C = -\varphi(x) .$$

Die Trajectorie iſt demnach der gegebenen Curve gleich, ſie hat aber in Beziehung auf die Abſciſſenachſe eine entgegengeſetzte Lage.

Aufgabe [230]. Es ſoll die Trajectorie gefunden werden, welche eine Reihe ſtetig auf einander folgender Curven ſo ſchneidet, daß in den Durchſchnittspunkten die Tangente der Trajectorie und diejenige der geſchnittenen Curve in einer gegebenen Relation ſtehen.

§. 127. Es sey $\varphi(y', x', a) = 0$ die Gleichung der gegebenen Curven, worin a die zu variirende Constante, ferner x, y die auf dieselben rechtwinkligen Achsen bezogenen Coordinaten der Trajectorie.

Die Tangente in einem Durchschnittspunkte, dessen Coordinaten $x' = x$ und $y' = y$ sind, haben respective die Ausdrücke (§. 71. F. 11.)

$$\frac{y\sqrt{1+p'^2}}{p'} \quad \text{und} \quad \frac{y\sqrt{1+p^2}}{p}.$$

Ist nun die gegebene Relation durch die Gleichung $T = \psi(T')$ ausgedrückt, wo T' und T die Längen der Tangenten in einem Durchschnittspunkte respective an der gegebenen und an der gesuchten Curve bedeuten, so haben wir

$$\frac{y\sqrt{1+p^2}}{p} = \psi\left(\frac{y'\sqrt{1+p'^2}}{p'}\right). \qquad (3)$$

Elimiren wir zwischen dieser Gleichung und der gegebenen Gleichung $y' = \varphi(x')$ die Constante a, und setzen y u. x an die Stelle von y' u. x', so erhalten wir die Differentialgleichung der gesuchten Trajectorie.

Beispiel. Es soll die Trajectorie gefunden werden, welche eine Parabel zweiten Grades, die nach der Richtung ihrer Achse fortbewegt wird, in jeder Lage so schneidet, daß in den Durchschnitten die Tangente der Trajectorie und diejenige der Parabel in dem Verhältniß von $1 : n$ stehen, die Längen beider Tangenten von dem Berührungspunkte bis zu einer festen, auf der Richtung der Achse der Parabeln senkrechten, Geraden gerechnet.

Nehmen wir die genannte Senkrechte zur Abscissenachse und nennen den Parameter der Parabel 2k, so ist

$$2k(y'+a) = x'^2$$

die Gleichung, welche diese Curve in einer jeden ihrer Lagen ausdrückt. Wir erhalten daraus $p' = \frac{x'}{k}$, und da die Gleichung $T = \psi(T')$ im gegenwärtigen Falle $T = nT'$ ist, so haben wir, zufolge der Gleichung (3)

$$\frac{y\sqrt{1+p^2}}{p} = \frac{ny'\sqrt{k^2+x'^2}}{x'}.$$

Setzen wir nun x u. y an die Stelle von x' u. y', so erhalten wir

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{p} = \frac{n\sqrt{k^2+x^2}}{x}$$

als Differentialgleichung der gesuchten Trajectorie. Es ergiebt sich aus

derſelben §. 127.

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{n^2k^2+(n^2-1)x^2}},$$

und nun durch Integration

$$y+C = \frac{\sqrt{n^2k^2+(n^2-1)x^2}}{n^2-1}$$

oder,

$$(n^2-1)^2(y+C)^2-(n^2-1)x^2 = n^2k^2$$

als Gleichung der Trajectorie. Dieſe Curve iſt demnach eine Ellipſe oder Hyperbel, von welcher eine Achſe mit derjenigen der Parabel zuſammen fällt, je nachdem $n^2<1$ oder $n^2>1$ iſt.

§. 128.

Wenn eine Curve B auf einer andern feſten Curve A fortrollt, ohne verſchoben zu werden, ſo beſchreibt irgend ein beſtimmter Punkt in der Ebene der rollenden Curve B eine dritte Curve C, welche Roulette genannt wird. Die feſte Curve A heißt die Baſis der Roulette. Die Cycloiden, Epicycloiden und Hypocycloiden ſind demnach Rouletten.

Aufgabe [231]. Die Baſis (A), die rollende Curve (B) und der beſchreibende Punkt P in der Ebene der letztern iſt gegeben. Es ſoll die Roulette gefunden werden.

Die Roulette hat in einer jeden der verſchiedenen Lagen, welche ſie während des Rollens einnimmt, einen Punkt mit der Baſis gemein, und in dieſem Punkte offenbar einen Contact erſter Ordnung mit dieſer Curve. Es ſey b derjenige Punkt der rollenden Curve (B), welche beim Anfange der Bewegung auf der Baſis (A), und zwar im Punkte a dieſer Curve, befindlich war. Iſt nun bei einer ſpätern Lage der rollenden Curve der Punkt n derjenige, in welchem ſie ſich berühren, ſo muß der Bogen bn der Curve (B) dem Bogen an der Curve (A) gleich ſeyn, weil ein Verſchieben der beweglichen Curve nicht Statt gefunden haben ſoll. Wir wollen nun annehmen, daß die rollende Curve (B) auf Polarcoordinaten bezogen ſey, deren Pol der beſchreibende Punkt P iſt, und daß die Gerade, von welcher die t angerechnet werden, durch den vorher genannten Punkt b gehe; ferner wollen wir annehmen, daß die Baſis (A) auf ein rechtwinkliges Coordinatenſyſtem bezogen ſey. Bezeichnen wir nun die Polarcoordinaten des Punktes n der Curve (B) durch t, u und die rechtwinkligen Coordinaten deſſelben Punk- Fig. 86.

§. 128. tes n der Curve (A) durch α, β, ferner die Länge des Bogens bn, welche der Länge des Bogens an gleich ist, durch s; so ist, da die Curve (B) gegeben, s eine bekannte Function von u, und, da auch die Curve (A) gegeben, s eine ebenfalls bekannte Function von α; folglich ist u als eine bestimmbare Function von α anzusehen. Dies vorausgesetzt, kommt es nun darauf an, die Coordinaten des Punktes P, welche wir auf dieselben Achsen beziehen, auf welche α, β bezogen gedacht werden, und die wir durch x u. y bezeichnen, durch α und β auszudrücken, oder nur so viele Gleichungen zwischen den sechs Größen α, β, t, u, x und y aufzustellen, daß wir, vermittelst derselben und der gegebenen Gleichungen der Curven (A) und (B), die vier ersten Größen eliminiren, und zu einer Gleichung der Curve (C) zwischen x und y gelangen können.

I. Ziehen wir in den Curven (A) u. (B) zwei, durch den Punkt n gehende, Sehnen nm, nm' und setzen diese Sehnen an die Stelle der ihnen zugehörigen Bogen, so ist klar, daß die rollende Bewegung der Curve (B) bei dem Punkte n aufhören und statt ihrer eine drehende Bewegung eintreten würde, welche so lange dauern würde, bis die Sehne nm' in die Richtung der Sehne nm gekommen wäre. Bei dieser Drehung würde der Punkt P einen Kreisbogen beschreiben, dessen Mittelpunkt n und dessen Radius $Pn = u$ ist. Der Mittelpunktswinkel dieses Kreisbogens ist dem Winkel gleich, welchen die Sehne nm, nm' in ihrer ursprünglichen Lage mit einander bilden; er wird daher ein anderer seyn, wenn die durch n beliebig gezogenen Sehnen eine andere Lage haben; aber der Mittelpunkt n und der Radius $Pn = u$ dieses Kreisbogens bleiben dieselben, wie auch die Sehnen durch den Punkt n gezogen werden mögen. Und hieraus läßt sich einsehen, daß die gesuchte Roulette von einem Kreise, der mit dem Radius Pn um n beschrieben ist, berührt werden muß. Die Roulette kann daher als die einhüllende Curve derjenigen Kreise betrachtet werden, deren Mittelpunkte auf der Curve (A) liegen und deren Radien den Leitstrahlen u der Curve (B) gleich sind. Die Gleichung dieser Kreise ist

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = u^2 , \qquad (1)$$

worin x, y die laufenden Coordinaten bedeuten, β aber, in Folge der gegebenen Gleichung der Curve (A), als eine Function von α, und u, zufolge des oben Gesagten, ebenfalls als eine Function von α anzusehen ist. Differentiiren wir diese Gleichung nach α, wodurch wir

$$(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}+(x-\alpha)+u\frac{du}{d\alpha} = 0 \qquad (2)$$

erhalten, und eliminiren zwiſchen den Gleichungen (1) u. (2) das α, ſo erhalten wir die Gleichung der einhüllenden Curve oder der geſuchten Roulette. § 128.

Die Entwickelung von x und y aus den Gleichungen (1) u. (2) giebt uns, wenn wir $\frac{ds}{d\alpha}$ für $\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}$ ſetzen,

$$x = \alpha - \frac{u\left\{\frac{du}{d\alpha} \mp \frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{\frac{ds^2}{d\alpha^2} - \frac{du^2}{d\alpha^2}}\right\}}{\frac{ds^2}{d\alpha^2}}, \qquad (3)$$

$$y = \beta - \frac{u\left\{\frac{du}{d\alpha}\frac{d\beta}{d\alpha} \pm \sqrt{\frac{ds^2}{d\alpha^2} - \frac{du^2}{d\alpha^2}}\right\}}{\frac{ds^2}{d\alpha^2}}. \qquad (4)$$

Da dieſe Herleitung der geſuchten Gleichungen noch einige Dunkelheit zurücklaſſen könnte, weil es vielleicht nicht einleuchtend genug iſt, daß die Roulette als die einhüllende Curve der genannten Kreiſe angeſehen werden kann, ſo wollen wir dieſelben Gleichungen auf einem andern, allerdings weniger zierlichen, Wege aufſuchen.

II. Es ſeyen Pn, nN die ſenkrechten Ordinaten von P u. n; es ſey Fig. 86.
ferner nT die gemeinſchaftliche Tangente beider Curven (A) und (B) in ihrem Berührungspunkte n, und nQ der Abſciſſenachſe parallel. Wir bezeichnen die Winkel nTX, PnT und PnQ reſpective durch m, n und k, und es iſt $AN = \alpha$, $nN = \beta$, $Ap = x$, $Pp = y$.

Es iſt ferner $PnQ = PnT - QnT$ und, wegen des Parallelismus von TX und nQ, $QnT = nTX$, alſo $PnQ = PnT - nTX$ oder $k = n - m$; folglich

$$\cos k = \cos n \cos m + \sin n \sin m\,; \quad \sin k = \sin n \cos m - \cos n \sin m\,.$$

Wir haben aber $\tang m = \frac{d\beta}{d\alpha}$, $\tang n = u\frac{dt}{du}$; folglich

$$\sin m = \frac{\frac{d\beta}{d\alpha}}{\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}} = \frac{\frac{d\beta}{d\alpha}}{\frac{ds}{d\alpha}}\,; \quad \sin n = \frac{u\frac{dt}{du}}{\sqrt{u^2\frac{dt^2}{du^2}+1}} = \frac{u}{\frac{ds}{dt}}\,;$$

§. 128.

$$\cos m = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}} = \frac{1}{\frac{ds}{d\alpha}} \quad ; \quad \cos n = \frac{1}{\sqrt{u^2\frac{dt^2}{du^2}+1}} = \frac{\frac{du}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad ;$$

und demnach

$$\cos k = \frac{\frac{du}{dt}+u\frac{d\beta}{d\alpha}}{\frac{ds}{d\alpha}\frac{ds}{dt}} \quad ; \quad \sin k = -\frac{\frac{du}{dt}\frac{d\beta}{d\alpha}-u}{\frac{ds}{d\alpha}\frac{ds}{dt}} \quad ;$$

oder, wenn wir die Zähler und Nenner dieser Ausdrücke mit $\frac{dt}{d\alpha}$ multipliciren,

$$\cos k = \frac{\frac{du}{d\alpha}+u\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{dt}{d\alpha}}{\frac{ds^2}{d\alpha^2}} \quad ; \quad \sin k = -\frac{\frac{du}{d\alpha}\frac{d\beta}{d\alpha}-u\frac{dt}{d\alpha}}{\frac{ds^2}{d\alpha^2}} \quad .$$

Es ist aber

$$\frac{ds^2}{dt^2}\frac{dt^2}{d\alpha^2} = \frac{ds^2}{d\alpha^2} = \left(u^2+\frac{du^2}{dt^2}\right)\frac{dt^2}{d\alpha^2} = u^2\frac{dt^2}{d\alpha^2}+\frac{du^2}{d\alpha^2} \quad ,$$

folglich

$$u^2\frac{dt^2}{d\alpha^2} = \frac{ds^2}{d\alpha^2}-\frac{du^2}{d\alpha^2} \quad \text{und} \quad u\frac{dt}{d\alpha} = \mp\sqrt{\frac{ds^2}{d\alpha^2}-\frac{du^2}{d\alpha^2}} \quad ,$$

und demnach auch

$$\cos k = \frac{\frac{du}{d\alpha}\mp\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{\frac{ds^2}{d\alpha^2}-\frac{du^2}{d\alpha^2}}}{\frac{ds^2}{d\alpha^2}} \quad ; \quad \sin k = -\frac{\frac{du}{d\alpha}\frac{d\beta}{d\alpha}\pm\sqrt{\frac{ds^2}{d\alpha^2}-\frac{du^2}{d\alpha^2}}}{\frac{ds^2}{d\alpha^2}} \quad .$$

Wir haben nun auch $Ap = An - Qn$; $Pp = nN + PQ$, und $Qn = u\cos k$; $PQ = u\sin k$, folglich

$$Ap = x = \alpha - u\cos k \quad ; \quad Pp = y = \beta + u\sin k \quad .$$

Setzen wir hierin die für $\cos k$ und $\sin k$ gefundenen Ausdrücke, so erhalten wir die oben gefundenen Formeln (3) und (4), wodurch die Richtigkeit der in (I.) gemachten Herleitung bestätigt ist.

III. Da der Punkt P der Berührungspunkt eines eingehüllten Kreises, der n zum Mittelpunkte hat, und der einhüllenden Curve oder Roulette ist, so folgt, daß der Radius vector Pn der rollenden Curve mit der Normale der Roulette zusammenfällt. Dies ergiebt sich auch auf folgende Weise.

Wenn wir nämlich die Gleichung (1) vollſtändig differentiiren, ſo kommt §. 128.

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx}+(x-\alpha)-\left\{(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}+(x-\alpha)+u\frac{du}{d\alpha}\right\}\frac{d\alpha}{dx}=0$$

und dieſe Gleichung reducirt ſich, in Folge der Gleichung (2), auf

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx}+(x-\alpha)=0\,. \qquad (5)$$

Der Werth von $\frac{dy}{dx}$ iſt alſo derſelbe, man mag α als conſtant oder als veränderlich anſehen, oder die Gleichung (5) drückt ſowohl die Normale im Punkte xy des Kreiſes, deſſen Mittelpunkt $\alpha\beta$ iſt, als die Normale im Punkte xy der Roulette aus.

IV. Wenn in der Aufgabe nicht beſtimmt iſt, welcher Punkt b der rollenden Curve auf dem gegebenen Punkt a, oder auf welchem Punkt a der Baſis der gegebene Punkt b der rollenden Curve liegt, ſo iſt s zwar noch immer eine durch die gegebene Gleichung der Curve (A) beſtimmbare Function von α und eine durch die Gleichung der Curve (B) beſtimmbare Function von u, allein eine dieſer Functionen enthält eine durch die Integration hineingekommene willkürliche Conſtante C, welcher jeder beliebige Werth beigelegt werden kann, und dieſe Conſtante befindet ſich dann auch in dem Ausdrucke, welcher u durch α angiebt. Daher enthält alsdann im Allgemeinen die Finalgleichung der Elimination von α zwiſchen den Gleichungen (1) u. (2) oder (3) u. (4) dieſe Conſtante, und dieſe Finalgleichung drückt ſodann alle Rouletten aus, welche der gegebene Punkt P beſchreiben kann, während die Curve (B) auf der Baſis (A) rollt.

Differentiiren wir die genannte Finalgleichung und eliminiren die Conſtante C, ſo erhalten wir eine Differentialgleichung der Roulette, welche, obgleich ſie keine willkürliche Conſtante mehr enthält, nicht weniger umfaſſend iſt, als jene primitive Gleichung, indem durch Integration dieſelbe Conſtante wieder hineintritt.

Zu dieſer Differentialgleichung der Roulette können wir aber auch auf folgende Weiſe gelangen. Da $\frac{du}{d\alpha}=\frac{du}{ds}\frac{ds}{d\alpha}$, $\frac{ds}{du}=\sqrt{u^2+\frac{du^2}{dt^2}}\cdot\frac{dt}{du}$ und $\frac{ds}{d\alpha}=\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}$, ſo iſt $\frac{du}{d\alpha}=\frac{\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}}{\sqrt{u^2+\frac{du^2}{dt^2}}}\cdot\frac{du}{dt}$. Die Glei-

§. 128. chungen (1), (5) und (2) sind nun, wenn wir in der zuletzt genannten für $\frac{du}{d\alpha}$ den eben angegebenen Ausdruck setzen,

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = u^2 , \qquad (6)$$

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx}+(x-\alpha) = 0 , \qquad (7)$$

$$\{(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}+(x-\alpha)\}\sqrt{u^2+\frac{du^2}{dt^2}}+u\frac{du}{dt}\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}} = 0 . \qquad (8)$$

Nach der Substitution der aus den gegebenen Gleichungen hervorgehenden Ausdrücke von u, $\frac{du}{dt}$ und β, $\frac{d\beta}{d\alpha}$ respective in t und α, enthalten diese Gleichungen (6, 7, 8), außer x, y und $\frac{dy}{dx}$, nur noch die zuletzt genannten Veränderlichen t und α. Eliminiren wir demnach diese beiden Größen zwischen den drei Gleichungen (6, 7, 8), so erhalten wir eine Gleichung in x, y u. $\frac{dy}{dx}$, welche die Differentialgleichung der Roulette ist. Die Integration dieser Differentialgleichung giebt die primitive Gleichung der Roulette.

V. Wenn die rollende Curve (B) der Basis (A) gleich ist, und jene im Anfange der Bewegung so liegt, daß zwei einander entsprechende Punkte auf einander fallen, so läßt sich die primitive Gleichung der Roulette ohne alle Integration finden. Denn bei der vorausgesetzten Gleichheit und Lage der Curven (A) und (B) fallen während der Bewegung nur immer homologe Punkte auf einander. Nehmen wir daher denjenigen Punkt Π, welcher in der Ebene der Basis (A) dem beschreibenden Punkte P in der Ebene der rollenden Curve (B) entspricht, zum Anfangspunkte der rechtwinkligen Coordinaten α, β und x, y, so ist der Radius vector u, welcher von P nach einem Berührungspunkte $\alpha\beta$ gezogen wird, dem Radius vector gleich, welcher von Π nach demselben Punkte hinführt, weil in gleichen Figuren homologe Punkte gleiche Linien begrenzen. Es ist also $u^2 = \alpha^2+\beta^2$, und demnach $u\frac{du}{d\alpha} = \alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}$. Die Gleichungen (1) u. (2) gehen durch Substitution dieser Ausdrücke in

$$y^2+x^2-2\beta y-2\alpha x = 0 , \qquad (9)$$

$$y\frac{d\beta}{d\alpha}+x = 0 \qquad (10)$$

über,

über, und enthalten u und t nicht mehr. Eliminiren wir α zwiſchen ihnen, §. 128.
ſo erhalten wir die Gleichung der Roulette.

Die Uebereinſtimmung dieſer Gleichungen (9 u. 10) mit den Gleichungen (3 u. 4) des §. 96. (Aufg. 160.) zeigt, daß die in Rede ſtehende Roulette die einhüllende Curve aller Kreiſe iſt, deren Mittelpunkte auf der Baſis A liegen, und deren Peripherien durch den Anfangspunkt der Coordinaten *II* gehen, was auch eine Folge des oben unter (I.) Geſagten iſt. (Vergl. d. Anmerk. S. 475.)

Wenn z. B. eine Ellipſe auf einer ihr gleichen Ellipſe rollt und die homologen Punkte dabei auf einander fallen, ſo beſchreibt irgend ein Punkt der Ebene der rollenden Ellipſe eine Curve vom vierten Grade (§. 96. G. 10); ein Brennpunkt derſelben beſchreibt aber einen Kreis (§. 96. G. 11). Das Letztere läßt ſich auch durch eine ſehr einfache geometriſche Betrachtung einſehen.

VI. Wenn die Baſis eine gerade Linie iſt, und dieſe zur Abſciſſenachſe genommen wird, ſo haben wir $\beta = 0$, und daher $\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$ und $\frac{ds}{d\alpha} = 1$. Die Gleichungen (3 u. 4) reduciren ſich dann auf

$$x = \alpha - u\frac{du}{d\alpha}\,; \qquad (11)$$

$$y = \mp u\sqrt{1 - \frac{du^2}{d\alpha^2}}\,; \qquad (12)$$

die Gleichungen (6), (7) u. (8) aber auf

$$y^2 + (x-\alpha)^2 = u^2\,;$$

$$y\frac{dy}{dx} + (x-\alpha) = 0\,;$$

$$(x-\alpha)\sqrt{u^2 + \frac{du^2}{dt^2}} + u\frac{du}{dt} = 0\,.$$

Eliminiren wir $(x-\alpha)$ zwiſchen den drei letzten Gleichungen, ſo erhalten wir

$$y^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = u^2\,; \qquad (13)$$

$$y\frac{dy}{dx}\sqrt{u^2 + \frac{du^2}{dt^2}} = u\frac{du}{dt}\,. \qquad (14)$$

Die Elimination von α zwiſchen den Gleichungen (11) u. (12), nachdem

§. 128. u und $\frac{du}{dt}$ durch α ausgedrückt worden, giebt die primitive Gleichung der Roulette; die Elimination von t zwischen den Gleichungen (13) u. (14) giebt die Differentialgleichung dieser Curve.

Aufgabe [232]. Ein gegebener Kreis rollt auf irgend einer gegebenen Curve. Man soll die Roulette finden, welche vom Mittelpunkte des Kreises beschrieben wird.

Die Polargleichung des Kreises ist $u = r$, wenn der Mittelpunkt zum Anfangspunkt genommen wird. Daraus erhalten wir $\frac{du}{dt} = 0$, und durch Substitution in den Gleichungen (6) u. (8),

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = r^2 ,$$

$$(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}+(x-\alpha) = 0 .$$

Diese beiden Gleichungen enthalten t nicht mehr, und geben nach Elimination von α die Gleichung der gesuchten Roulette. Aber eben diese Gleichungen geben durch dieselbe Elimination auch die Gleichung derjenigen Curve, welche der gegebenen Basis in der Entfernung r parallel ist (§. 92. Aufg. 149.); daher ist die gesuchte Roulette eine der gegebenen Basis in der Entfernung r parallele Curve, was durch eine sehr einfache geometrische Betrachtung bestätigt wird.

Aufgabe [233]. Eine gegebene Parabel rollt auf einer geraden Linie; es soll die vom Brennpunkte beschriebene Roulette gefunden werden.

Es sey der Parameter der Parabel $= 4m$, also die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel $= m$. Die Polargleichung dieser Parabel ist (§. 33. G. 10)

$$u = \frac{2m}{1-\cos t} , \quad \text{woraus} \quad \frac{du}{dt} = -\frac{2m\sin t}{(1-\cos t)^2} .$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in die Gleichungen (13 u. 14), so kommt

$$y^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)(1-\cos t)^2 = 4m^2 ,$$

$$y^2\frac{dy^2}{dx^2}[(1-\cos t)^2+\sin^2 t](1-\cos t)^2 = 4m^2\sin^2 t .$$

Da nun $(1-\cos t)^2+\sin^2 t = 2(1-\cos t)$, und $\sin^2 t = (1-\cos t)(1+\cos t)$

ist, so verwandelt sich die letzte Gleichung, wenn wir sie durch $(1-\cos t)$ §. 128. dividiren, in

$$y^2\frac{dy^2}{dx^2}(1-\cos t)^2 = 2m^2(1+\cos t)\ .$$

Dividiren wir ferner diese Gleichung durch die erste, so erhalten wir

$$\frac{2\frac{dy^2}{dx^2}}{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = 1+\cos t\ ,$$

woraus sich

$$\cos t = -\frac{1-\frac{dy^2}{dx^2}}{1+\frac{dy^2}{dx^2}}, \quad \text{und} \quad 1-\cos t = \frac{2}{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

ergiebt. Durch Substitution des letzten Ausdrucks in die erste Gleichung kommt

$$y^2 = m^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)$$

als Differentialgleichung der Roulette.

Entwickeln wir $\frac{dy}{dx}$, so ergiebt sich $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2-m^2}}{m}$, also ist

$$\frac{1}{\sqrt{y^2-m^2}}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m}\ ,$$

woraus durch Integration

$$\log\frac{y+\sqrt{y^2-m^2}}{C} = \frac{x}{m}$$

als Gleichung der Roulette folgt. Sowohl aus dieser Gleichung, als aus dem Ausdrucke für den Differentialcoefficienten, $\frac{\sqrt{y^2-m^2}}{m}$, sehen wir, daß y^2 nicht kleiner als m^2 werden kann, wie denn auch die kleinste Entfernung des Brennpunkts von der Parabel gleich m ist. Bestimmen wir C so, daß, für $x = 0$, $y = m$ sey, so haben wir $\log\frac{m}{C} = 0$, also $\frac{m}{C} = 1$, und daher $C = m$. Die Gleichung der Roulette ist alsdann

§. 128.

$$\frac{x}{m} = log\frac{y+\sqrt{y^2-m^2}}{m} \quad \text{oder} \quad y = \tfrac{1}{2}m\left(e^{\frac{x}{m}}+e^{-\frac{x}{m}}\right),$$

und die Roulette ist folglich eine Kettenlinie (§. 64. G. 5 u. 6).

Aufgabe [234]. Die Roulette zu finden, welche der Mittelpunkt eines gegebenen Kreises beschreibt, wenn sich seine mit ihm fest verbundene Evolvente auf einer geraden Linie wälzt.

I. Aus der Polargleichung der Kreisevolvente (§. 66. G. 2) erhalten wir $\frac{dt}{du} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{au}$; also ist $\frac{du}{dt} = \frac{au}{\sqrt{u^2-a^2}}$ und $\sqrt{u^2+\frac{du^2}{dt^2}} = \frac{u^2}{\sqrt{u^2-a^2}}$. Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (14), so ergiebt sich

$$y\frac{dy}{dx}\cdot\frac{u^2}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{au^2}{\sqrt{u^2-a^2}}.$$

Dividiren wir durch $\frac{u^2}{\sqrt{u^2-a^2}}$, so kommt

$$y\frac{dy}{dx} = a,$$

und dies ist die Differentialgleichung der Roulette, welche integrirt

$$y^2 = 2ax+C$$

giebt. Die Roulette ist demnach eine Parabel zweiten Grades, deren Parameter dem Durchmesser des gegebenen Kreises gleich ist.

II. Zu demselben Resultate gelangen wir vermittelst der Gleichungen (11 u. 12) wie folgt. In §. 116. (Aufg. 192. IV.) haben wir für den Bogen der Kreisevolvente den Ausdruck $s = \frac{u^2}{2a}+C'$ gefunden. Da nun die Basis eine gerade Linie ist, so haben wir auch $s = \alpha$, folglich $\alpha = \frac{u^2}{2a}+C'$, woraus sich

$$u = \sqrt{2a(\alpha-C')} \quad \text{und} \quad \frac{du}{d\alpha} = \frac{a}{\sqrt{2a(\alpha-C')}}$$

ergiebt. Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichungen (11) u. (12), so kommt

$$x = \alpha-a \quad ; \quad y = \mp\sqrt{2a\alpha-2aC'-a^2},$$

und wenn wir α eliminiren,

$$y^2 = 2ax + a^2 - 2aC' ,$$ §. 128.

eine Gleichung der Parabel, die mit der vorher gefundenen übereinstimmt, wenn wir die Constante C gleich $a^2 - 2aC'$ setzen.

Aufgabe [235]. Die Roulette zu finden, welche der Pol einer hyperbolischen Spirale beschreibt, während sich diese Curve auf einer geraden Linie wälzt.

Aus der Polargleichung der hyperbolischen Spirale (§. 68. S. 3) $u = \frac{r}{t}$, erhalten wir $\frac{du}{dt} = -\frac{r}{t^2}$, und diese Ausdrücke, in die Gleichungen (13) u. (14) gesetzt, geben

$$t^2y^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right) = r^2 ,$$

$$y^2\frac{dy^2}{dx^2}(t^2+1)t^2 = r^2 .$$

Eliminiren wir t, so kommt $r^2\frac{dy^2}{dx^2} = y^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)$, woraus wir

$$\pm\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = 1 ,$$

und durch Integration

$$x = \pm\sqrt{r^2-y^2} \mp \tfrac{1}{2}r\,log\frac{(r+\sqrt{r^2-y^2})^2}{y^2} + C$$

erhalten. Die Roulette ist daher die in der 205ten Aufgabe betrachtete Tractorie (§. 119. S. 1).

Aufgabe [236]. Die Roulette zu finden, welche der Pol einer logarithmischen Spirale beschreibt, wenn diese Curve sich auf einer geraden Linie wälzt.

Aus der Gleichung $u = re^{\frac{t}{m}}$ (§. 68. S. 5) erhalten wir $\frac{du}{dt} = \frac{u}{m}$ und, indem wir diesen Ausdruck in die Gleichungen (13) u. (14) setzen,

$$y^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right) = u^2 \quad \text{und} \quad y^2\frac{dy^2}{dx^2}(m^2+1) = u^2 ;$$

ferner, durch Elimination von u,

$$m\frac{dy}{dx} = \pm 1 ,$$

§. 128. und, wenn wir integriren,

$$my = \pm x + C$$

als Gleichung der Roulette, welche also eine gerade Linie ist.

§. 129.

Aufgabe [237]. Eine Roulette und ihre Basis sind gegeben; es soll die Gleichung der rollenden Curve gefunden werden.

I. Die Gleichungen (6, 7 u. 8) des vorigen §. enthalten die Lösung auch dieser Aufgabe. Da nämlich die Gleichung der Roulette und die der Basis gegeben ist, so können wir aus ihnen β und $\frac{d\beta}{d\alpha}$ durch α, ferner y und $\frac{dy}{dx}$ durch x ausdrücken. Setzen wir nun diese Ausdrücke in die genannten Gleichungen, so enthalten sie außer t und u nur noch die Veränderlichen α und x, und wenn wir diese beiden letzten Größen zwischen den drei Gleichungen eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung in t, u u. $\frac{du}{dt}$, welche die Differentialgleichung der rollenden Curve ist und integrirt die Polargleichung derselben giebt.

II. Wenn die gegebene Basis eine gerade Linie ist, können wir uns der beiden Gleichungen (13 u. 14) des vorigen §. statt der vorher genannten drei Gleichungen bedienen, indem wir, nachdem für y u. $\frac{dy}{dx}$ ihre Ausdrücke in x substituirt worden, zwischen diesen beiden Gleichungen x eliminiren, wodurch wir die Differentialgleichung der rollenden Curve erhalten.

Aufgabe [238]. Diejenige Curve zu finden, welche, indem sie auf einer Parabel zweiten Grades rollt, eine gerade Linie erzeugt, die auf der Achse der Parabel senkrecht steht.

Bezeichnen wir den Parameter der Parabel durch 4m, so ist ihre Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten

$$\beta^2 = 4m\alpha\,, \quad \text{woraus} \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \sqrt{\frac{m}{\alpha}}\,.$$

Ist nun $x + a = 0$, die Gleichung der zu erzeugenden, auf der Achse der Parabel senkrechten Geraden, so haben wir $\frac{dx}{dy} = 0$ oder $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{0}$. Sub-

stituiren wir dieſen Werth in die Gleichung (7) des vorigen §., ſo ergiebt §. 129.
ſich $y-\beta=0$, alſo $y=\beta$. Setzen wir dieſen Werth von y und den Werth $-a$ von x in die Gleichung (6) des vorigen §., ſo erhalten wir

$$a+\alpha=\pm u\,,\quad \text{alſo}\quad \alpha=\pm u-a\,.$$

Da aber $\frac{d\beta}{d\alpha}=\sqrt{\frac{m}{\alpha}}$ iſt; ſo haben wir jetzt $\frac{d\beta}{d\alpha}=\sqrt{\frac{m}{\pm u-a}}$.
Durch Subſtitution aller dieſer Ausdrücke in die Gleichung (8) ergiebt ſich

$$\sqrt{u^2+\frac{du^2}{dt^2}}=\sqrt{1+\frac{m}{\pm u-a}}\cdot\frac{du}{dt}\,,$$

woraus wir

$$\frac{dt}{du}=\frac{\sqrt{m}}{u\sqrt{\pm u-a}}$$

erhalten.

Bei der Integration dieſer Gleichung unterſcheiden wir drei Fälle. Nämlich: 1ſtens, wenn a poſitiv iſt, erhalten wir durch Integration

$$t+C=\sqrt{\frac{m}{a}}\cdot arc\left(cos=\frac{\pm 2a-u}{u}\right);$$

2tens, wenn a negativ iſt, giebt die Integration, indem wir $-a'$ für a ſetzen,

$$t+C=\sqrt{\frac{m}{a'}}\cdot log\frac{(\sqrt{a'\pm u}-\sqrt{a'})^2}{\pm u}\,;$$

3tens, wenn $a=0$ iſt, bekommen wir durch Integration

$$t+C=2\sqrt{\frac{m}{u}}\,.$$

In dem erſten Falle, in welchem die zu erzeugende Gerade, $x+a=0$, offenbar gänzlich außerhalb der Parabel liegt, ſo daß ſie dieſe Curve nicht ſchneidet, haben wir alſo, wenn wir die Conſtante C, welche ſich nur auf die Lage der Achſe bezieht, von welcher die t angerechnet werden, gleich Null ſetzen,

$$\pm 2a-u=u\,cos\sqrt{\frac{a}{m}}\cdot t\,,$$

woraus ſich

$$u=\frac{\pm 2a}{1+cos\sqrt{\frac{a}{m}}\cdot t}$$

§. 129. ergiebt, eine Gleichung, die transſcendent iſt, wenn $\sqrt{\frac{a}{m}}$ eine Irrationalzahl. In dem beſondern Falle, in welchem $a = m$, der Abſtand der gegebenen Geraden vom Scheitel der Parabel alſo dem vierten Theile des Parameters gleich, und dieſe zu erzeugende Gerade folglich die Directrix der Parabel iſt (§. 33. Aufg. 49.), geht die zuletzt aufgeſtellte Gleichung in

$$u = \frac{\pm 2m}{1 + \cos t} .$$

über, und drückt dann eine Parabel aus, deren Parameter gleich 4m (§. 33. S. 10), und die alſo der gegebenen gleich iſt. Wenn daher eine Parabel auf einer ihr gleichen Parabel rollt, ſo beſchreibt der Brennpunkt der rollenden die Directrix der feſten Parabel, was ſich auch auf andern Wegen leicht finden läßt.

In dem zweiten Falle, in welchem die gegebene Parabel von der zu erzeugenden Geraden, $x + a = 0$ oder $x = a'$, geſchnitten wird, haben wir, die Conſtante $C = 0$ ſetzend,

$$\frac{(\sqrt{a' \pm u} - \sqrt{a'})^2}{\pm u} = e^{\sqrt{\frac{a'}{m}} \cdot t} ,$$

oder auch, durch Entwickelung von u,

$$u = \frac{\pm 4a'}{\left\{ e^{\sqrt{\frac{a'}{m}} \cdot \frac{1}{2}t} - e^{-\sqrt{\frac{a'}{m}} \cdot \frac{1}{2}t} \right\}^2} .$$

In dem dritten Falle endlich, in welchem die Parabel von der zu erzeugenden Geraden in ihrem Scheitel berührt wird, haben wir, wenn die auf die Lage der t ſich beziehende Conſtante C gleich Null geſetzt wird,

$$ut^2 = 4m .$$

Dieſe Curve iſt der Ort des Endpunktes der Polarſubnormale einer hyperboliſchen Spirale (§. 74. Aufg. 122. II.).

§. 130.

Aufgabe [239]. Eine Roulette, die ſie erzeugende rollende Curve und der beſchreibende Punkt in der Ebene der letztern iſt gegeben; es ſoll die Baſis gefunden werden.

I. Auch die Löſung dieſer Aufgabe iſt in den Gleichungen (6, 7 u. 8)

des §. 128. enthalten. Da nämlich die Gleichungen der Roulette und der §. 130.
rollenden Curve gegeben sind, so können wir y u. $\frac{dy}{dx}$ durch x, und u u. $\frac{du}{dt}$ durch t ausdrücken. Die genannten drei Gleichungen enthalten alsdann außer β und α nur noch die Veränderlichen x u. t, und eliminiren wir diese, so gelangen wir zu der Differentialgleichung der Basis, welche sodann zu integriren ist.

II. Wenn die gegebene Roulette eine gerade Linie ist, und diese zur Achse der x genommen wird, so haben wir $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$. Es reducirt sich alsdann die Gleichung (7) des §. 128. auf

$$x - \alpha = 0 ;$$

und demnach die Gleichungen (6) u. (8) auf

$$\beta = \pm u , \quad \text{und} \quad \beta\frac{d\beta}{d\alpha}\sqrt{u^2+\frac{du^2}{dt^2}} = u\frac{du}{dt}\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}} .$$

Die erste dieser Gleichungen reducirt die zweite auf:

$$\beta\frac{d\beta}{d\alpha} = \pm\frac{du}{dt} . \qquad (15)$$

Setzen wir in diese Gleichung für $\frac{du}{dt}$ den Ausdruck, der sich aus der gegebenen Polargleichung der rollenden Curve als Function von u darstellen läßt, und alsdann $u = \pm\beta$, so haben wir die Differentialgleichung der gesuchten Basis.

Aufgabe [240]. Auf welcher Curve muß eine gegebene Ellipse rollen, wenn ein Brennpunkt derselben eine gerade Linie beschreiben soll?

Aus der Polargleichung der Ellipse (§. 33., S. 11)

$$(a - e\cos t)u = b^2$$

erhalten wir $t = arc\left(\cos = \frac{au-b^2}{eu}\right)$, und demnach

$$\frac{dt}{du} = \frac{b^2}{u\sqrt{e^2u^2-(au-b^2)^2}} .$$

Die Gleichung (15) giebt uns daher

$$\beta\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\pm u\sqrt{e^2u^2-(au-b^2)^2}}{b^2} .$$

§. 130. Setzen wir darin $u = \pm\beta$, so ergiebt sich, da $e^2 = a^2 - b^2$ ist,

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{b}{\sqrt{-b^2+2a\beta-\beta^2}},$$

und durch Integration

$$\alpha + C = b.arc\left(sin = \frac{\beta-a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right),$$

oder wenn wir die auf die Lage des Anfangspunktes der α sich beziehende Constante $C = 0$, und wieder $\sqrt{a^2-b^2} = e$ setzen,

$$\alpha = b.arc\left(sin = \frac{\beta-a}{e}\right),$$

oder auch

$$\beta - a = e.sin\frac{\alpha}{b}$$

als Gleichung der gesuchten Basis. Man sieht leicht ein, daß diese Curve mit der Quadratrix des Tschirnhausen (§. 65. S. 2) in der Verwandtschaft der Affinität steht, und daß sie diese Quadratrix selbst ist, wenn $e = \frac{1}{2}\pi b$ oder $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} = \frac{1}{2}\pi$ ist.

Aufgabe [241]. Auf welcher Curve muß eine Cardioide rollen, wenn der Rückkehrpunkt dieser Cardioide eine gerade Linie beschreiben soll?

Die Polargleichung der Cardioide ist (§. 61. S. 6)

$$u = 2r + 2r\cos t,$$

aus der wir

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{4ru - u^2}$$

erhalten. Setzen wir diesen Ausdruck in die Gleichung (15) und sodann $\pm\beta$ für u, so kommt

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \pm\frac{\beta}{\sqrt{4r\beta-\beta^2}}$$

und durch Integration

$$\alpha + C = \pm\left\{2r.arc\left(cos = \frac{2r-\beta}{2r}\right) - \sqrt{4r\beta-\beta^2}\right\}$$

als Gleichung der gesuchten Basis, die folglich eine Cycloide ist (§. 66. S. 4).

§. 131. §. 131.

Aufgabe [242]. Es ist eine Roulette gegeben; man soll die Basis und die rollende Curve finden, unter der Bedingung, daß diese beiden gesuchten Curven gleich seyen, und daß ihre homologen Punkte beim Rollen auf einander fallen.

I. Wenn wir, wie in den beiden vorigen §§. verfahren wollen, so können wir, vermittelst der Gleichungen

$$y^2+x^2-2\beta y-2\alpha x = 0\,, \qquad (9)$$

$$y\frac{d\beta}{d\alpha}+x = 0\,, \qquad (10)$$

in §. 128., die Differentialgleichung der verlangten Curve aufsuchen. Wir können nämlich zwischen diesen Gleichungen (9 u. 10) und der Gleichung der gegebenen Roulette x und y elimininen, und dadurch eine Differentialgleichung erhalten, in welcher keine Veränderlichen als α u. β vorkommen. Diese Elimination können wir dadurch bewerkstelligen, daß wir die Ausdrücke von x und y, welche sich aus den Gleichungen (9) u. (10) ergeben, nämlich

$$x = -\frac{2(\beta-\alpha p)p}{1+p^2}\;;\quad y = \frac{2(\beta-\alpha p)}{1+p^2}\,, \qquad (16)$$

wo p für $\frac{d\beta}{d\alpha}$ gesetzt ist, in die gegebene Gleichung der Roulette substituiren. Nun ist klar, daß, welches auch diese gegebene Gleichung der Roulette seyn mag, nach jener Substitution, $(\beta-\alpha p)$, aus dieser Gleichung entwickelt, einen Ausdruck geben wird, der aus den Constanten, welche in der Gleichung vorkommen und aus p zusammengesetzt seyn wird, so daß wir

$$\beta-\alpha p = \varphi(p) \quad \text{oder} \quad \beta = \alpha p+\varphi(p)$$

haben, wo $\varphi(p)$ eine bestimmte Function von p bedeutet. Diese Differentialgleichung kann dadurch integrirt werden, daß wir sie wieder nach α differentiiren, wodurch sich $p = p+\{\alpha+\varphi'(p)\}\frac{dp}{d\alpha}$ ergiebt, eine Gleichung, die sich von selbst auf

$$\{\alpha+\varphi'(p)\}\frac{dp}{d\alpha} = 0$$

reducirt, und also entweder $\frac{dp}{d\alpha} = 0$ oder $\alpha+\varphi'(p) = 0$ giebt.

§. 131. Der erste Factor, $\frac{dp}{d\alpha} = 0$, hat zum Integral $p = C$, und, wenn wir diese Constante in die Gleichung $\beta = \alpha p + \varphi(p)$ substituiren, erhalten wir

$$\beta = C\alpha + \varphi(C) \qquad (17)$$

als vollständiges Integral der so eben genannten Differentialgleichung.

Der zweite Factor $\alpha + \varphi'(p) = 0$ giebt für p einen gewissen Ausdruck in α, und substituiren wir diesen in die Differentialgleichung $\beta = \alpha p + \varphi(p)$, so erhalten wir zwar eine primitive Gleichung in α u. β, die aber, da sie keine willkürliche Constante enthält, nur eine particuläre Solution jener Differentialgleichung ist.

Die Gleichung (17) drückt offenbar eine gerade Linie aus. Suchen wir, nach §. 94., die einhüllende Curve dieser Geraden auf, indem wir die Gleichung (17) nach C differentiiren, wodurch sich $\alpha + \varphi'(C) = 0$ ergiebt, und eliminiren C, so kommen wir augenscheinlich zu derjenigen Gleichung, welche, nach Dem, was so eben bemerkt worden, die particuläre Solution ist.

II. Da die Gleichungen (9 u. 10) sich darauf beziehen, daß der Anfangspunkt der Coordinaten der die Roulette beschreibende Punkt ist, so erhalten wir nach dem vorher angegebenen Verfahren auch nur diejenige Curve als Basis und als rollende Curve, in welcher der Anfangspunkt der x, y der beschreibende Punkt ist. Wollen wir daher alle Curven finden, welche der Aufgabe genügen, so müssen wir den Anfangspunkt unbestimmt lassen, d. i. $x + a$ und $y + b$ für x und y in die gegebene Gleichung der Roulette setzen, wo denn a und b zwei willkürliche Constanten bedeuten; oder wir müssen statt der Gleichungen (16) die Gleichungen

$$x = a - \frac{2(\beta - \alpha p)p}{1 + p^2} \quad ; \quad y = b + \frac{2(\beta - \alpha p)}{1 + p^2} \qquad (18)$$

in Anwendung bringen.

III. Wir können aber auch auf folgende Weise verfahren.

Die Gleichung (9) vollständig differentiirt giebt

$$(y - \beta)\frac{dy}{dx} + (x - \alpha) = \left\{y\frac{d\beta}{d\alpha} + x\right\}\frac{d\alpha}{dx},$$

und da der zweite Theil dieser Gleichung, in Folge der Gleichung (10), verschwindet, so haben wir die Gleichung

$$(y - \beta)\frac{dy}{dx} + (x - \alpha) = 0, \qquad (19)$$

welche wir ſtatt der Gleichung (10) benutzen können. Die beiden Gleichungen (9) u. (19) enthalten aber den Differentialcoefficienten $\frac{d\beta}{d\alpha}$ nicht, und wenn wir zwiſchen ihnen, der gegebenen Gleichung der Roulette und deren Differentialgleichung x, y u. $\frac{dy}{dx}$ eliminiren, ſo erhalten wir, ohne Integration, die primitive Gleichung der geſuchten Curve. §. 131.

Soll dieſe Gleichung aber alle Curven ausdrücken, welche der Aufgabe genügen, ſo müſſen wir vor der Elimination in die Gleichung der Roulette $x+a$ und $y+b$ für x und y ſetzen.

Aufgabe [243]. Die Curve zu finden, welche ſo beſchaffen iſt, daß, wenn auf ihr eine ihr gleiche Curve rollt, ein mit der letztern feſt verbundener Punkt eine gegebene gerade Linie beſchreiben kann.

Es ſey die gegebene Gerade die Ordinatenachſe, deren Gleichung alſo $x = 0$.

I. Verfahren wir nach der in der vorigen Aufgabe zuerſt angegebenen Art, ſo haben wir in die Gleichung der gegebenen Geraden die Ausdrücke (18) zu ſubſtituiren, und erhalten dadurch die Differentialgleichung

$$a - \frac{2(\beta - \alpha p)p}{1+p^2} = 0 ,$$

deren complettes Integral, nach Demjenigen, was in der vorigen Aufgabe ſich ergeben hat,

$$a - \frac{2(\beta - \alpha C)C}{1+C^2} = 0$$

oder

$$a(1+C^2) - 2(\beta - \alpha C)C = 0$$

iſt. Differentiiren wir dieſe Gleichung nach C, ſo kommt

$$(a+2\alpha)C - \beta = 0 ,$$

und, wenn wir C eliminiren,

$$\beta^2 = 2a(\alpha + \tfrac{1}{2}a) .$$

Die geſuchte Baſis iſt alſo eine Parabel, deren Brennpunkt im Anfangspunkte der α, β liegt, und deren Directrix die gegebene Gerade iſt; der Brennpunkt einer gleichen Parabel beſchreibt alſo während des Rollens auf dieſer Baſis die gegebene Gerade; was mit einem Reſultate in der Aufgabe [238] übereinſtimmt (§. 129.).

§. 131. II. Verfahren wir nach der in der vorigen Aufgabe angegebenen zweiten Art, so haben wir in die gegebene Gleichung $x = 0$ die Substitution $x+a$ für x zu machen, wodurch wir

$$x+a = 0\,,$$

und durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{0}$$

erhalten. In Folge dieser Gleichungen haben wir $x = -a$, und, vermittelst der Gleichung (19), $y = \beta$. Diese Werthe, in die Gleichung

$$y^2+x^2-2\beta y-2\alpha x = 0 \qquad (9)$$

substituirt, geben

$$\beta^2 = 2a(\alpha+\tfrac{1}{2}a)$$

wie vorher.

§. 132.

Aufgabe [244]. Die Evolvente einer gegebenen Curve zu finden.

Es seyen α, β die rechtwinkligen Coordinaten der gegebenen Curve und x, y die auf dieselben Achsen bezogenen Coordinaten der gesuchten Evolvente.

I. Wir gehen von der zu Ende des §. 87. angegebenen Eigenschaft der Evolvente aus, daß ihre Normalen Tangenten der Evolute sind.

Die Gleichung der Tangente an der gegebenen Curve in einem Punkte $\alpha\beta$ derselben ist, wenn t, u die laufenden Coordinaten dieser Geraden bedeuten,

$$u-\beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(t-\alpha)\,.$$

Da nun der Punkt xy der Evolvente, welcher dem Punkte $\alpha\beta$ entspricht, in dieser Tangente liegen muß, so haben wir

$$y-\beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha)\,. \qquad (1)$$

Die Gleichung der Normale an der gesuchten Curve in dem Punkte xy ist $(u-y)\frac{dy}{dx}+(t-x) = 0$, oder auch

$$(y-u)\frac{dy}{dx}+(x-t) = 0\,;$$

und da der, dem Punkte xy entsprechende, Punkt $\alpha\beta$ in dieser Normale

liegen muß, so haben wir auch §. 132.

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx}+(x-\alpha)=0\,. \qquad (2)$$

Die beiden Gleichungen (1) u. (2) enthalten die Lösung der Aufgabe. Eliminiren wir nämlich zwischen diesen beiden Gleichungen, der Gleichung der gegebenen Curve und ihrer Differentialgleichung die drei Größen α, β, $\frac{d\beta}{d\alpha}$, so erhalten wir eine Gleichung in x, y u. $\frac{dy}{dx}$, welche die Differentialgleichung der gesuchten Evolvente ist.

Statt einer der beiden Gleichungen (1) u. (2) können wir auch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx}\frac{d\beta}{d\alpha}+1=0 \qquad (3)$$

in Anwendung bringen, welche sich ergiebt, wenn wir $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$ zwischen jenen eliminiren.

II. Wir können aber auch davon ausgehen, daß die Evolvente die orthogonale Trajectorie aller Tangenten der gegebenen Evolute ist. Alsdann müssen wir, um die Differentialgleichung jener Curve aufzufinden, zufolge der 220ten Aufgabe (§. 125.), zwischen der Gleichung der Tangente

$$y-\beta=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha)\,, \qquad (1)$$

der Gleichung

$$\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{dy}{dx}+1\,, \qquad (3)$$

der Gleichung der gegebenen Curve und ihrer Differentialgleichung, α, β u. $\frac{d\beta}{d\alpha}$ eliminiren, was mit dem vorher Gesagten übereinstimmt.

III. Wir können endlich auch die Evolvente als die Roulette ansehen, welche von einem, auf der Tangente der gegebenen Evolute liegenden Punkte beschrieben wird, während diese Tangente sich auf der Evolute wälzt. Nun ist aber die Polargleichung einer geraden Linie, wenn der Anfangspunkt auf ihr selbst angenommen wird, $t = a$, wo a eine constante Größe und zwar der Winkel ist, den diese Gerade mit der Abscissenachse bildet. Es ist demnach $\frac{dt}{du}=0$ oder $\frac{du}{dt}=\frac{1}{0}$, und die Gleichung (8) des §. 128. reducirt

§. 132. ſich, nach Subſtitution dieſes Werthes, auf

$$(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}+(x-\alpha)+u\sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}=0\,.$$

Eliminiren wir zwiſchen dieſer Gleichung und der Gleichung (6) des §. 128. das u, ſo kommt

$$y-\beta=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha)\,,$$

und wir haben, zur Auffindung der Differentialgleichung der Roulette, d. i. der Evolvente, zwiſchen dieſer letzten Gleichung, der Gleichung (7) des §. 128. und der gegebenen Gleichung der Baſis oder Evolute, die Größen α, β u. $\frac{d\beta}{d\alpha}$ zu eliminiren, was mit dem angegebenen Verfahren völlig übereinſtimmt, da die ſo eben genannten Gleichungen mit den Gleichungen (1) u. (2) identiſch ſind.

IV. Wir können uns aber auch, wenn wir die Evolvente als eine Roulette betrachten, der Gleichungen (3) u. (4) des §. 128. bedienen. Da nämlich hier die Länge der Tangente, von dem Berührungspunkte an bis zu dem beſchreibenden Punkte, an die Stelle des Bogens s der rollenden Curve tritt, und jene Länge offenbar gleich u iſt, ſo haben wir $u=s$; daher auch $\frac{du}{d\alpha}=\frac{ds}{d\alpha}$, wodurch die erwähnten Gleichungen (3) u. (4) ſich auf

$$x=\alpha-s\frac{d\alpha}{ds}\quad\text{und}\quad y=\beta-s\frac{d\beta}{ds}\qquad(4)$$

reduciren. Drücken wir nun β und auch s, oder den Bogen der gegebenen Curve, durch α aus, ſo bilden die Gleichungen (4) ein Gleichungsſyſtem, durch welches die geſuchte Evolvente dargeſtellt wird, und woraus noch α eliminirt werden muß, wenn dieſe Curve durch eine einzige Gleichung ausgedrückt werden ſoll.

V. Welches Verfahren man auch wählen mag, ſo iſt klar, daß die Gleichung der Evolvente eine durch Integration hineingekommene willkürliche Conſtante enthalten wird, der man unbegrenzt viele Werthe beilegen kann. Zu einer gegebenen Evolute gehören demnach unzählig viele Evolventen, welche aber ſämmtlich einander parallel ſind (§. 92. u. 93.).

Aufgabe [245]. Die Evolvente einer Parabel zweiten Grades zu finden.

Es

Es sey der Parameter der Parabel gleich k, dann ist die Gleichung §. 132. dieser Curve

$$\beta = \frac{1}{k}\alpha^2$$

und $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{2\alpha}{k}$. Die Gleichungen (2) u. (3) sind daher im gegenwärtigen Falle, wenn wir $\frac{dy}{dx}$ durch p bezeichnen,

$$(ky-\alpha^2)p+k(x-\alpha) = 0\,,$$
$$2\alpha p+k = 0\,,$$

und die Elimination von α giebt

$$4p^2y+4px+k = 0\,.$$

Um diese Differentialgleichung zu integriren, lösen wir sie nach y auf, und erhalten

$$y = -\frac{x}{p}-\frac{k}{4p^2}\,.$$

Differentiiren wir nun nach x, so kommt

$$p = -\frac{1}{p}+\left(\frac{x}{p^2}+\frac{k}{2p^3}\right)\frac{dp}{dx}$$

oder

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{p(1+p^2)}x+\frac{k}{2p^2(1+p^2)}\,.$$

Diese Differentialgleichung kann wie diejenige in §. 122. (Aufg. 212.) integrirt werden. Wir können aber auch auf folgende etwas abgeänderte Weise verfahren. Wir setzen nämlich $x = Pv$ und bestimmen v so, daß, wenn P als constant angesehen wird, der Ausdruck Pv die Gleichung $\frac{dx}{dp} = \frac{x}{p(1+p^2)}$ befriedige. Führen wir diese Substitution aus, indem wir zugleich $\frac{dx}{dp} = P\frac{dv}{dp}$ setzen, so kommt $P\frac{dv}{dp} = \frac{Pv}{p(1+p^2)}$ oder $\frac{1}{v}\frac{dv}{dp} = \frac{1}{p(1+p^2)}$, und nun durch Integration $log\,v = log\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ oder $v = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$. Wir haben also $x = \frac{Pp}{\sqrt{1+p^2}}$, und jetzt betrachten wir P als

§. 132. eine Function von p, die wir so bestimmen, daß der eben angegebene Ausdruck von x, die zu integrirende Gleichung befriedige. Zu dem Ende setzen wir $x = Pv$ und demgemäß $\frac{dx}{dp} = P\frac{dv}{dp} + v\frac{dP}{dp}$ in jene Gleichung, und erhalten

$$P\frac{dv}{dp} + v\frac{dP}{dp} = \frac{Pv}{p(1+p^2)} + \frac{k}{2p^2(1+p^2)}.$$

Das erste Glied des ersten Theils dieser Gleichung hebt sich aber mit dem ersten Gliede des zweiten Theils, wenn wir für v den vorher gefundenen Ausdruck setzen, und daher reducirt sich die Gleichung auf $v\frac{dP}{dp} = \frac{k}{2p^2(1+p^2)}$, oder, nach jener Substitution, auf

$$\frac{dP}{dp} = \frac{k}{2p^3\sqrt{1+p^2}},$$

woraus sich durch Integration

$$P = -\frac{k\sqrt{1+p^2}}{4p^2} - \tfrac{1}{4}k\,log\frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p} - \tfrac{1}{4}C,$$

ergiebt. Wir haben also, da $x = v.P$,

$$x = -\frac{k}{4p} - \frac{kp}{4\sqrt{1+p^2}}\left\{log\frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p} + C\right\}$$

und

$$4p^2y + 4px + k = 0,$$

zwei Gleichungen, welche durch Elimination von p die Gleichung der gesuchten Evolvente geben.

Wir wollen uns noch überzeugen, daß die Gleichungen (4) zu denselben Resultate führen.

Da $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{2\alpha}{k}$, so ist $\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}} = \frac{\sqrt{k^2+4\alpha^2}}{k}$ und $\frac{ds}{d\beta} = \frac{ds}{d\alpha}\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\sqrt{k^2+4\alpha^2}}{2\alpha}$; ferner ist, zufolge der Aufgabe [191] in §. 116., wenn wir α u. k für das dortige x u. p setzen,

$$s = \frac{\alpha}{2k}\sqrt{k^2+4\alpha^2} + \tfrac{1}{4}k\,log\frac{2\alpha+\sqrt{k^2+4\alpha^2}}{k} + C.$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen (4) giebt

§. 132.

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{k^2}{4\sqrt{k^2+4\alpha^2}}\left\{log\frac{2\alpha+\sqrt{k^2+4\alpha^2}}{k}+\frac{4C}{k}\right\},$$

$$y = -\frac{k\alpha}{2\sqrt{k^2+4\alpha^2}}\left\{log\frac{2\alpha+\sqrt{k^2+4\alpha^2}}{k}+\frac{4C}{k}\right\},$$

und das Syſtem dieſer beiden Gleichungen drückt die geſuchte Evolvente aus. Daß aber die Elimination von α zwiſchen dieſen beiden Gleichungen dieſelbe Gleichung in x u. y giebt als die Elimination von p zwiſchen den beiden vorher gefundenen, erhellet auf folgende Weiſe. Eliminiren wir den in den Parentheſen eingeſchloſſenen Ausdruck, ſo ergiebt ſich

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{ky}{2\alpha},$$

und ſetzen wir hierin und in der erſten Gleichung des Syſtems $\alpha = -\frac{k}{2p}$, ſo finden wir

$$4p^2y + 4px + k = 0,$$

$$x = -\frac{k}{4p} - \frac{kp}{4\sqrt{1+p^2}}\left\{log\frac{\sqrt{1+p^2}-1}{p}+\frac{4C}{k}\right\},$$

zwei Gleichungen, welche mit den oben angegebenen übereinſtimmen, wenn wir die willkürliche Conſtante $\frac{4C}{k}$ in C verwandeln.

Aufgabe [246]. Die Evolvente einer Neilſchen Parabel zu finden.

Aus der Gleichung dieſer Curve $\beta = k\alpha^{\frac{3}{2}}$ (§. 58. S. 6) finden wir $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{3}{2}k\alpha^{\frac{1}{2}}$; $\frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{4+9k^2\alpha}$; $\frac{ds}{d\beta} = \frac{\sqrt{4+9k^2\alpha}}{3k\alpha^{\frac{1}{2}}}$; ferner iſt, zufolge der Aufgabe [191] in §. 116., wenn wir α u. k für das dortige x u. p ſetzen, $s = \frac{1}{27k^2}(4+9k^2\alpha)^{\frac{3}{2}} + C$. Durch Subſtitution dieſer Ausdrücke in die Gleichungen (4) ergiebt ſich

$$x = \tfrac{1}{3}\alpha - \frac{8}{27k^2} + \frac{2C}{\sqrt{4+9k^2\alpha}},$$

$$y = -\frac{4\alpha^{\frac{3}{2}}}{9k} + \frac{3Ck\alpha^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4+9k^2\alpha}};$$

und das Syſtem dieſer beiden Gleichungen drückt die geſuchte Evolvente aus.

§. 132. Die Elimination von α ist in dem besondern Falle, in welchem $C = 0$ gesetzt wird, sehr leicht und giebt

$$y^2 = \frac{16}{27k^2}\left(x + \frac{8}{27k^2}\right),$$

also eine Parabel zweiten Grades, was mit dem Resultate in §. 88. (Aufgabe 145. I.) übereinstimmt.

Aufgaben, welche auf Differentialgleichungen höherer Ordnungen führen.

§. 133.

Aufgabe [247]. Es soll diejenige Curve gefunden werden, an welcher die von einem bestimmten Punkte anfangenden Bogen mit den Stücken der Ordinatenachse, welche durch die Tangenten in den Endpunkten dieser Bogen abgeschnitten werden, in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Es seyen x, y die rechtwinkligen Coordinaten der gesuchten Curve, und $\frac{dy}{dx} = p$. Die Tangente in einem Punkte xy dieser Curve schneidet von der Ordinatenachse ein Stück ab, welches $= y - px$ ist (§. 71. Aufg. 114., wo, in dem Ausdrucke von AT, x u. y mit einander zu vertauschen sind). Da nun der Bogen $s = \int \sqrt{1+p^2}.dx + C$, so haben wir, wenn $1 : n$ das gegebene Verhältniß ist,

$$n\left\{\int \sqrt{1+p^2}.dx + C\right\} = y - px .$$

Differentiiren wir diese Gleichung, um sie von dem Integralzeichen zu befreien, so haben wir

$$n\sqrt{1+p^2} = -x\frac{dp}{dx} \qquad (1)$$

als zweite Differentialgleichung der gesuchten Curve. Dieser geben wir die Form

$$\frac{n}{x}\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{\sqrt{1+p^2}},$$

und finden dann durch Integration §. 133.

$$n \log \frac{x}{C_1} = -\log \{p + \sqrt{1+p^2}\} ,$$

also

$$\frac{x^{-n}}{C_1^{-n}} = p + \sqrt{1+p^2} ,$$

woraus sich

$$p = \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{x^n}{C_1^n} - \frac{x^{-n}}{C_1^{-n}}\right\} \qquad (2)$$

ergiebt. Integriren wir diese Gleichung, so kommt

$$y + C_2 = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{x^{1+n}}{(1+n)C_1^n} - \frac{x^{1-n}}{(1-n)C_1^{-n}}\right\} , \qquad (3)$$

welches die Gleichung der gesuchten Curve ist.

Zur Bestimmung der beiden Constanten dient die Bedingung, daß die Curve durch den gegebenen Punkt gehen soll, und daß sich die Bogen in diesem Punkte anfangen sollen. Bezeichnen wir die Coordinaten desselben durch a und b, so haben wir, zufolge der gefundenen Gleichung (3), erstens

$$b + C_2 = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{a^{1+n}}{(1+n)C_1^n} - \frac{a^{1-n}}{(1-n)C_1^{-n}}\right\} ; \qquad (4)$$

und, da die Tangente im Anfangspunkte ab der Bogen durch den Anfangspunkt der Ordinatenachse gehen, also, für $x = a$ und $y = b$, der Ausdruck $y - px = 0$ seyn muß, in Folge der Gleichung (2),

$$b - \tfrac{1}{2}\left\{\frac{a^{1+n}}{C_1^n} - \frac{a^{1-n}}{C_1^{-n}}\right\} = 0 . \qquad (5)$$

Die beiden Gleichungen (4) u. (5) reichen hin, C_1 und C_2 zu bestimmen. Liegt z. B. der Anfangspunkt der Bogen auf der Abscissenachse und ist also $b = 0$, so reducirt sich die Gleichung (5) auf $\frac{a^{1+n}}{C_1^n} - \frac{a^{1-n}}{C_1^{-n}} = 0$ und giebt $C_1 = a$, vermittelst welchen Werthes wir aus der Gleichung (4) $C_2 = \frac{an}{n^2-1}$ erhalten. Die Gleichung (3) ist also in diesem Falle

$$y + \frac{an}{n^2-1} = \tfrac{1}{2}a\left\{\frac{1}{1+n}\left(\frac{x}{a}\right)^{1+n} - \frac{1}{1-n}\left(\frac{x}{a}\right)^{1-n}\right\} .$$

§. 133 Wenn $n = \pm 1$ ist, geht die Gleichung (3) in

$$y + C_2 = \pm\tfrac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{2C_1} - C_1 \log x\right\}$$

über.

Aufgabe [248]. Es soll die Curve gefunden werden, an welcher die Flächenstücke, welche von den, in einem gegebenen Punkte anfangenden Bogen, von der senkrechten Ordinate dieses Anfangspunktes der Bogen, von derjenigen ihres Endpunktes und von der Abscissenachse begrenzt werden, zu den Dreiecken, welche die Ordinate, die Tangente und die Subtangente des Endpunktes jener Bogen bilden, in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Wenn x, y die rechtwinkligen Coordinaten der gesuchten Curve und $\frac{dy}{dx} = p$ ist, so wird das genannte Flächenstück allgemein durch $S = \int y dx + C$, die Subtangente durch $\frac{y}{p}$, und daher das genannte Dreieck durch $\frac{y^2}{2p}$ ausgedrückt. Ist nun $1 : n$ das gegebene Verhältniß, so haben wir

$$n\{\int y dx + C\} = \frac{y^2}{2p}. \qquad (6)$$

Um diese Gleichung von dem Integrationszeichen zu befreien, differentiiren wir sie, und erhalten

$$ny = y - \frac{y^2}{2p^2}\frac{dp}{dx},$$

oder

$$\frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dx} = 1 - n$$

als zweite Differentialgleichung der gesuchten Curve. Um diese zu integriren, setzen wir $\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{dp}{dy}p$ für $\frac{dp}{dx}$, woraus sich

$$\frac{y}{2p}\frac{dp}{dy} = 1 - n \quad \text{oder} \quad \frac{1}{p}\frac{dp}{dy} = \frac{2(1-n)}{y}$$

ergiebt, und erhalten nunmehr

$$\log Cp = 2(1-n)\log y \quad \text{oder} \quad Cp = y^{2(1-n)}. \qquad (7)$$

Es ist also $p = \frac{y^{2(1-n)}}{C} = \frac{dy}{dx}$ folglich $\frac{dx}{dy} = Cy^{2(n-1)}$, woraus wie- §. 133.
derum durch Integration

$$x + C_2 = \frac{Cy^{2n-1}}{2n-1},$$

oder wenn wir die Constante C_1 für $\frac{C}{2n-1}$ setzen,

$$x + C_2 = C_1 y^{2n-1}, \qquad (8)$$

als Gleichung der gesuchten Curve folgt.

Was nun die Bestimmung der beiden Constanten C_1 u. C_2 betrifft, so erhalten wir aus der Bedingung, daß die Curve durch den gegebenen Punkt gehen soll, wenn a, b dessen Coordinaten sind, die Bedingungsgleichung

$$a + C_2 = C_1 b^{2n-1}; \qquad (9)$$

und da der Ausdruck $\int y dx + C$ für $x = a$ verschwinden muß, indem die von der Curve begrenzten Flächenstücke, sich bei der Ordinate des Punktes ab anfangen sollen, so muß auch, zufolge der Gleichung (6), der Ausdruck $\frac{y^2}{2p}$ für $x = a$ und $y = b$ verschwinden, so daß, weil $p = \frac{y^{2(1-n)}}{C}$ (7)
ist, auch $\frac{Cb^2}{b^{2(1-n)}} = 0$ oder

$$(2n-1)C_1 b^{2n} = 0 \qquad (10)$$

seyn muß. Die beiden Constanten C_1 und C_2 wären nun aus den Gleichungen (9) u. (10) zu bestimmen. Es giebt aber die Gleichung (10) entweder $C_1 = 0$ oder $b = 0$, und wollten wir $C_1 = 0$ setzen, so würde die Gleichung (8) der Curve $x + C_2 = 0$ seyn, wodurch eine der Ordinatenachse parallele Gerade ausgedrückt wird, an welcher solche Flächenstücke und Dreiecke, als in der Aufgabe vorausgesetzt worden, im eigentlichen Sinne nicht existiren. Ist aber $b = 0$, das heißt, liegt der gegebene Punkt in der Abscissenachse, so bleibt C_1 unbestimmt (wenn nicht etwa noch eine Bedingung hinzugefügt wird, als z. B. daß die Curve durch einen zweiten gegebenen Punkt gehe). Die Gleichung (9) aber reducirt sich in diesem Falle auf

$$a + C_2 = 0 \quad \text{oder} \quad a + C_2 = \infty,$$

je nachdem $(2n-1)$ positiv oder negativ ist, d. i., je nachdem $n > \frac{1}{2}$ oder

§. 133. $n<\frac{1}{2}$ ist. In dem ersten Falle, wenn nämlich $n>\frac{1}{2}$, ist also $C_2=-a$, und die Gleichung der gesuchten Curve für einen gegebenen, in der Abscissenachse liegenden, Punkt, dessen Abscisse gleich a,

$$x = a+C_1y^{2n-1},$$

wodurch eine Parabel ausgedrückt wird. In dem zweiten Falle, wenn nämlich $n<\frac{1}{2}$, ist aber $C_2=\infty$, und da dieser Werth nicht in die Gleichung (8) substituirt werden kann, so giebt es für $n<\frac{1}{2}$ keine Curve, welche den Bedingungen der Aufgabe genügt. Legen wir aber der Constanten C_2 einen beliebigen Werth, z. B. k bei, so ist

$$x+k = C_1y^{2n-1}$$

die Gleichung der Curve, und diese hat, wie man leicht findet, die Abscissenachse zur Asymptote, sobald $n<\frac{1}{2}$ ist; die Flächenräume nun, welche zwischen der Curve, ihrer Asymptote und irgend einer Ordinate liegen, stehen zu den von derselben Ordinate und der zugehörigen Tangente und Subtangente gebildeten Dreiecken in dem gegebenen Verhältnisse $1:n$.

Wenn $n=\frac{1}{2}$ ist, erhalten wir durch Integration, statt der Gleichung (8),

$$x+C_2 = C\log y,$$

also eine logarithmische Linie (vergl. §. 110. S. 511.).

§. 134.

Aufgabe [249]. Die Curve zu finden, deren Krümmungsradius constant ist.

Es sey a die constante Länge des Krümmungsradius, x, y die rechtwinkligen Coordinaten der gesuchten Curve und $\frac{dy}{dx}=p$, so haben wir, zufolge des §. 83. (F. 10.),

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = a, \quad \text{woraus} \quad \frac{dx}{dp} = \frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und, da $\frac{dy}{dp}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dp}=p\frac{dx}{dp}$,

$$\frac{dy}{dp} = \frac{ap}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

folgt. Durch Integration dieser beiden letzten Gleichungen finden wir nun

$$x = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} + C_1 \quad \text{und} \quad y = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + C_2 ,$$

und durch Elimination von p,

$$(y - C_2)^2 + (x - C_1)^2 = a^2 .$$

Die gesuchte Curve ist demnach ein Kreis, dessen Radius gleich a ist.

Aufgabe [250]. Die Curve zu finden, an welcher der Krümmungsradius eines jeden Punktes mit der Normale desselben Punktes in einem gegebenen constanten Verhältnisse steht.

Wir erhalten, wenn n : 1 das gegebene Verhältniß ist, die Bezeichnung in der vorigen Aufgabe beibehaltend, aus der gegebenen Bedingung unmittelbar die Gleichung

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = ny\sqrt{1+p^2} ,$$

welche sich von selbst auf

$$ny\frac{dp}{dx} = 1+p^2$$

reducirt. Da nun $\frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy} = p\frac{dp}{dy}$ ist, so haben wir

$$nyp\frac{dp}{dy} = 1+p^2 ,$$

woraus sich

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dp} = \frac{np}{1+p^2} ,$$

und durch Integration

$$\log y = \tfrac{1}{2}n \log \frac{1+p^2}{C_1}$$

oder

$$C_1 y^{\frac{2}{n}} = 1+p^2$$

ergiebt, welches die erste Differentialgleichung der gesuchten Curve ist. Hieraus erhalten wir $p = \sqrt{C_1 y^{\frac{2}{n}} - 1}$ oder

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{n}} - 1}} .$$

§. 134. Für $n = -1$ haben wir also

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{C_1 - y^2}},$$

und durch Integration $x = \sqrt{C_1 - y^2} + C_2$ oder

$$y^2 + (x - C_2)^2 = C_1 .$$

Die gesuchte Curve ist also, für $n = -1$, ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Abscissenachse liegt.

Für $n = +1$ haben wir

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}},$$

und durch Integration, nachdem wir $\frac{1}{C_1^2}$ für C_1 gesetzt haben,

$$x = C_1 \log\{y + \sqrt{y^2 - C_1^2}\} + C_2 ,$$

oder auch

$$y = \tfrac{1}{2} C_1 \left\{ e^{\frac{x - C_2}{C_1}} + e^{-\frac{x - C_2}{C_1}} \right\} .$$

Die gesuchte Curve ist also, für $n = +1$, eine Kettenlinie (§. 64. S. 5).

Für $n = -2$ haben wir

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{C_1 - y}} = \frac{y}{\sqrt{C_1 y - y^2}},$$

und durch Integration, nachdem wir C_1 in $2C_1$ verwandelt haben,

$$x - C_2 = C_1 \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{C_1 - y}{C_1}\right) - \sqrt{2C_1 y - y^2} .$$

Die gesuchte Curve ist also, für $n = -2$, eine Cycloide (§. 66. S. 4).

Für $n = +2$ haben wir

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{C_1 y - 1}},$$

und durch Integration

$$x = \frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} + C_2 ,$$

oder wenn wir $\frac{1}{C_1}$ für C_1 setzen und rational machen,

$$(x - C_2)^2 = 4C_1(y - C_1) .$$

Die gesuchte Curve ist also, für $n = +2$, eine Parabel zweiten Grades, in welcher die Leitlinie zur Abscissenachse genommen ist. §. 134.

Aufgabe [251]. Es soll die Curve gefunden werden, an welcher der Krümmungsradius eines jeden Punktes zu demjenigen Stücke der Normale desselben Punktes, welches von ihm und seiner Polarsubnormale begrenzt wird, in einem gegebenen constanten Verhältnisse steht.

Es sey $n:1$ das gegebene Verhältniß, t u. u die Polarcoordinaten der gesuchten Curve und, der Kürze wegen, $\frac{du}{dt} = p$, so ist, zufolge der Formeln (16 in §. 71.) und (15 in §. 83.) und in Folge der Bedingung der Aufgabe,

$$\frac{(u^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{u^2+2p^2-u\frac{dp}{dt}} = n\sqrt{u^2+p^2},$$

woraus sich, wenn wir, da $\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{du}\frac{du}{dt}$ ist, $p\frac{dp}{du}$ für $\frac{dp}{dt}$ setzen,

$$(1-n)u^2+(1-2n)p^2+nup\frac{dp}{du} = 0 \qquad (1)$$

ergiebt. Um diese Differentialgleichung zweiter Ordnung zu integriren, setzen wir $p = uz$ und demgemäß $\frac{dp}{du} = z+u\frac{dz}{du}$, und erhalten

$$(1-n)(1+z^2)+nuz\frac{dz}{du} = 0 \qquad (2)$$

oder

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dz} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{z}{1+z^2},$$

also durch Integration

$$log\,u = \frac{n}{2(n-1)}log\frac{1+z^2}{C_1} \quad \text{oder} \quad 1+z^2 = C_1u^{\frac{2(n-1)}{n}}. \qquad (3)$$

Dieselbe Gleichung (2) verwandelt sich aber, wenn wir für uz wieder p, und, da $\frac{dz}{du} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{du} = \frac{dz}{dt}\cdot\frac{1}{p}$, für $uz\frac{dz}{du}$ also $\frac{dz}{dt}$ setzen, in

$$(1-n)(1+z^2)+n\frac{dz}{dt} = 0,$$

eine Gleichung, der wir die Form

§. 134.

$$\frac{dt}{dz} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{1+z^2}$$

geben, und nun durch Integration

$$t+C_2 = \frac{n}{n-1} arc(tang = z)$$

finden, woraus

$$z = tang\frac{(n-1)(t+C_2)}{n} \quad \text{und} \quad 1+z^2 = \frac{1}{cos^2\frac{(n-1)(t+C_2)}{n}} \qquad (4)$$

folgt. Eliminiren wir $1+z^2$ zwischen den Gleichungen (3) u. (4), so ergiebt sich, wenn wir C_1 in $\frac{1}{C_1^2}$ verwandeln,

$$u^{\frac{n-1}{n}} . cos\frac{(n-1)(t+C_2)}{n} = C_1 \qquad (5)$$

als die Gleichung der gesuchten Curve.

Wenn $n = +1$ ist, reducirt sich die Gleichung (1) auf

$$u\frac{dp}{du} = p \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{p}\frac{dp}{du} = \frac{1}{u},$$

woraus durch Integration unmittelbar

$$log\, p = log\frac{u}{C_1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{du}{dt} = \frac{u}{C_1}$$

folgt; und geben wir dieser Differentialgleichung die Form $\frac{1}{u}\frac{du}{dt} = \frac{1}{C_1}$, so erhalten wir durch abermalige Integration $log\frac{u}{C_2} = \frac{t}{C_1}$ oder

$$u = C_2 e^{\frac{t}{C_1}}.$$

Die gesuchte Curve ist also, für $n = +1$, eine logarithmische Spirale. (Vergl. §. 85. Aufg. 142. VIII.)

Für $n = -1$ haben wir aus der Gleichung (5), und wenn wir die Achse, von welcher die t angerechnet werden, so legen, daß $C_2 = 0$ ist,

$$u^2 cos 2t = C_1,$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten

$$y^2 - x^2 = -C_1,$$

und die gesuchte Curve ist also eine gleichseitige Hyperbel.

Für $n = +2$ haben wir aus der Gleichung (5) §. 134.

$$u^{\frac{1}{2}} \cos\tfrac{1}{2}t = C_1 \quad \text{oder} \quad u\cos^2\tfrac{1}{2}t = \tfrac{1}{2}u(1+\cos t) = C_1^2 ,$$

welches die Polargleichung der Parabel ist (§. 33. S. 10).

Für $n = -2$ haben wir aus (5)

$$u^{\frac{3}{2}} \cos\tfrac{3}{2}t = C_1 .$$

Für $n = \frac{1}{2}$ haben wir aus (5)

$$u^{-1} \cos t = C_1 \quad \text{oder} \quad u = 2r\cos t ,$$

wenn wir $C_1 = \frac{1}{2r}$ setzen, welches die Polargleichung eines Kreises ist, für welche der Pol in der Peripherie dieses Kreises liegt.

Für $n = -\frac{1}{2}$ haben wir aus (5)

$$u^3 \cos 3t = C_1 .$$

Für $n = \frac{1}{3}$ haben wir aus (5).

$$u^{-2} \cos 2t = C_1 \quad \text{oder} \quad u^2 = a^2 \cos 2t ,$$

wenn wir $C_1 = \frac{1}{a^2}$ setzen, welches die Polargleichung der Lemniscate ist (§. 62. S. 3).

Für $n = -\frac{1}{3}$ haben wir aus (5)

$$u^4 \cos 4t = C_1 .$$

Für $n = +\frac{2}{3}$ haben wir aus (5)

$$u^{-\frac{1}{2}} \cos\tfrac{1}{2}t = C_1 \quad \text{oder} \quad u = 2r(1+\cos t) ,$$

wenn wir $C_1^2 = \frac{1}{2r}$ setzen, welches die Polargleichung der Cardioide ist (§. 61. S. 6).

§. 135.

Aufgabe [252]. Es soll die Curve gefunden werden, an welcher der Krümmungsradius eines jeden Punktes eine gegebene Function des Winkels ist, welchen dieser Krümmungsradius mit der Ordinatenachse bildet.

Wir bezeichnen den Krümmungsradius durch ϱ, den Winkel, den er mit der Ordinatenachse bildet, durch v, und es sey $\varphi(v)$ die gegebene Function, so daß wir haben

$$\varrho = \varphi(v) .$$

Da der Krümmungsradius eines Punktes mit dessen Normalen zusammen-

§. 135. fällt, und dieſe mit der Ordinatenachſe einen Winkel bildet, deſſen trigonometriſche Tangente gleich $\frac{dy}{dx} = p$ iſt, ſo haben wir

$$tang\, v = p\ ;$$

daher

$$sin\, v = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \quad ; \quad cos\, v = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\ ,$$

und durch Differentiation

$$cos\, v \frac{dv}{dx} = \frac{\frac{dp}{dx}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad sin\, v \frac{dv}{dy} = \frac{p\frac{dp}{dx}\frac{dx}{dy}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{dp}{dx}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\ .$$

Hieraus erhalten wir

$$\frac{1}{cos\, v}\frac{dx}{dv} = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} \quad ; \quad \frac{1}{sin\, v}\frac{dy}{dv} = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}}\ ,$$

oder, weil $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = \varrho$ iſt,

$$\frac{dx}{dv} = \varrho\, cos\, v \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dv} = \varrho\, sin\, v\ . \qquad (1)$$

Subſtituiren wir, aus der gegebenen Gleichung, $\varphi(v)$ für ϱ, ſo kommt

$$\frac{dx}{dv} = \varphi(v).cos\, v \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dv} = \varphi(v).sin\, v\ ,$$

und endlich durch Integration

$$x + C_1 = \int \varphi(v).cos\, v.dv \quad \text{und} \quad y + C_2 = \int \varphi(v).sin\, v.dv\ ,$$

ein Syſtem zweier Gleichungen, welches die Curve ausdrückt, und aus welchem wir, durch Elimination von v, die geſuchte Gleichung der Curve herſtellen können.

I. Es ſoll die Curve gefunden werden, an welcher der Krümmungsradius ϱ dem Winkel v proportional, und für welche daher

$$\varrho = av$$

iſt.

Hier haben wir $\varphi(v) = av$, und daher

$$x + C_1 = a\int v.cos\, v.dv \quad ; \quad y + C_2 = a\int v.sin\, v.dv\ ,$$

d. i. § 135.

$$x+C_1 = a(\cos v+v.\sin v) \quad ; \quad y+C_2 = a(\sin v-v.\cos v) .$$

Das System dieser beiden Gleichungen drückt die gesuchte Curve aus. Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten, indem wir x u. y respective für $x+C_1$ und $y+C_2$ setzen, und gehen dann zu Polarcoordinaten über, so erhalten wir durch Division

$$\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin v-v.\cos v}{\cos v+v.\sin v} ,$$

woraus

$$v(\sin v.\sin t+\cos v.\cos t) = \sin v.\cos t-\cos v.\sin t$$

oder $\sin(v-t) = v.\cos(v-t)$, daher $tang(v-t) = v$, und

$$v-t = arc(tang = v) \quad \text{oder} \quad t = v-arc(tang = v) .$$

Nehmen wir aber die Quadratsumme jener Gleichungen, so kommt

$$u^2 = a^2+a^2v^2 , \quad \text{woraus} \quad v = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a} ;$$

und setzen wir diesen Ausdruck in den so eben für t erhaltenen, so ergiebt sich

$$t = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a}-arc\left(tang = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a}\right)$$

als Gleichung der gesuchten Curve, welche demnach eine Kreisevolvente ist (§. 66. G. 2), was sich leicht hätte vorhersehen lassen.

II. Es soll die Curve gefunden werden, für welche

$$\varrho = a\cos v$$

ist.

Da hier $\varphi(v) = a\cos v$ ist, so haben wir, wenn wir den Anfangspunkt der x, y gehörig verlegen, oder, was auf dasselbe hinausläuft, C_1 und C_2 gleich Null setzen,

$$x = a\int\cos^2 v.dv \quad ; \quad y = a\int\sin v.\cos v.dv ,$$

d. i.

$$x = \tfrac{1}{4}a\{2v+\sin 2v\} \quad ; \quad y = \tfrac{1}{4}a\{1-\cos 2v\} ,$$

ein System zweier Gleichungen, welches mit dem System der Gleichungen (3) des §. 66. übereinstimmt, wenn wir t für 2v setzen, und welches daher eine Cycloide ausdrückt, deren erzeugender Kreis $\frac{1}{4}a$ zum Radius hat.

III. Es soll die Curve gefunden werden, für welche

§. 135.

$$\varrho . \cos v = a$$

ist.

Wir erhalten, da $\varphi(v) = \frac{a}{\cos v}$ ist, und indem wir $C_1 = C_2 = 0$ setzen,

$$x = a \int dv \quad ; \quad y = a \int tang\, v . dv ,$$

d. i.

$$x = av \quad ; \quad y = -a \log \cos v ,$$

und durch Elimination von v,

$$y = -a \log \cos \frac{x}{a} .$$

IV. Es soll die Curve gefunden werden, für welche

$$\varrho = a\, tang\, v$$

ist.

Wir erhalten

$$x = a \int sin\, v . dv \quad ; \quad y = a \int \frac{sin^2 v}{\cos v} . dv ,$$

d. i.

$$x = -a \cos v \quad ; \quad y = -a \sin v + a \log \frac{1 + \sin v}{\cos v} ,$$

und durch Elimination von v,

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} + a . \log \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} .$$

Die gesuchte Curve ist also die in §. 120. betrachtete Tractorie (§. 120. S. 2).

Aufgabe [253]. Es soll die Curve gefunden werden, an welcher die in einem und demselben Punkte sich anfangenden Bogen eine gegebene Function des Winkels sind, welchen die Normalen in den Endpunkten dieser Bogen mit einer und derselben Normale bilden.

Wir bezeichnen die Bogen durch s und die genannten Winkel durch v, und es sey $\varphi(v)$ die gegebene Function, so daß

$$s = \varphi(v)$$

ist.

Nehmen wir den einen unveränderlichen Schenkel der Winkel v zur Ordinatenachse, so ist, wie in der vorigen Aufgabe,

cos v

§. 135.

$$\cos v = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \quad ; \quad \sin v = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} .$$

Wir haben aber auch $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+p^2}$; $\frac{ds}{dy} = \sqrt{1+p^2}\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$; folglich

$$\frac{dx}{ds} = \cos v \quad ; \quad \frac{dy}{ds} = \sin v ,$$

und, wenn wir mit $\frac{ds}{dv}$ multipliciren,

$$\frac{dx}{dv} = \cos v . \frac{ds}{dv} \quad ; \quad \frac{dy}{dv} = \sin v . \frac{ds}{dv} . \qquad (2)$$

Nun können wir aus der gegebenen Gleichung $\frac{ds}{dv} = \frac{d\varphi(v)}{dv} = \varphi'(v)$ ableiten, und dieſen Ausdruck ſubſtituiren, wodurch ſich

$$\frac{dx}{dv} = \varphi'(v) . \cos v \quad ; \quad \frac{dy}{dv} = \varphi'(v) . \sin v ,$$

und durch Integration

$$x + C_1 = \int \varphi'(v) . \cos v . dv \quad ; \quad y + C_2 = \int \varphi'(v) . \sin v . dv$$

als das Gleichungsſyſtem ergiebt, welches die Curve ausdrückt.

I. Es ſoll die Curve gefunden werden, an welcher die Bogen s den Winkeln v proportional ſind, und für welche daher

$$s = av$$

iſt.

Da hier $\varphi(v) = av$, folglich $\varphi'(v) = a$, ſo haben wir, die Conſtanten $C_1 = C_2 = 0$ ſetzend,

$$x = a \int \cos v . dv \quad ; \quad y = a \int \sin v : dv$$

oder

$$x = a \sin v \quad ; \quad y = -a \cos v ,$$

und durch Elimination von v

$$y^2 + x^2 = a^2 .$$

Es kommt alſo nur dem Kreiſe die Eigenſchaft zu, daß die Bogen s den Winkeln v proportional ſind.

II. Es ſoll die Curve gefunden werden, für welche die Gleichung

$$s = av^2$$

Statt findet.

§. 135. Da hier $\varphi(v) = av^2$, folglich $\varphi'(v) = 2av$, so ist

$$x = 2a\int v.\cos v.dv \quad ; \quad y = 2a\int v.\sin v.dv ,$$

und daher, wie in (I) der vorigen Aufgabe, die gesuchte Curve die Evolvente des Kreises, dessen Radius gleich 2a ist.

III. Es soll die Curve gefunden werden, für welche

$$s = a\sin v$$

ist.

Wir haben hier $\varphi(v) = a\sin v$, folglich ist $\varphi'(v) = a\cos v$, daher

$$x = a\int \cos^2 v.dv \quad ; \quad y = a\int \sin v.\cos v dv .$$

Die Curve ist also, wie in (II.) der vorigen Aufgabe, eine Cycloide, deren erzeugender Kreis den Radius $\frac{1}{4}a$ hat.

IV. Es soll die Curve gefunden werden, für welche

$$s = a\,tang\, v$$

ist.

Da hier $\varphi(v) = a\,tang\, v$, also $\varphi'(v) = \frac{a}{\cos^2 v}$, so ist

$$x = a\int \frac{1}{\cos v}.dv \quad ; \quad y = a\int \frac{\sin v}{\cos^2 v}.dv ,$$

d. i.

$$x = a\log\frac{1+\sin v}{\cos v} \quad ; \quad y = \frac{a}{\cos v} .$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\frac{1}{\cos v} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) ,$$

und dieser Ausdruck, in die zweite Gleichung gesetzt, giebt

$$y = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) .$$

Die Curve ist also eine Kettenlinie (§. 64. S. 5).

Aufgabe [254]. Es soll die Curve gefunden werden, an welcher der Krümmungsradius eines jeden Punktes eine gegebene Function des Bogens ist, der von diesem Punkte und einem festen Anfangspunkte begrenzt wird.

Wir bezeichnen die Krümmungsradien durch ϱ, die Winkel, welche sie mit der Ordinatenachse bilden, durch v, und die Bogen durch s. Es sey

nun $\psi(s)$ die gegebene Function, so daß §. 135.

$$\varrho = \psi(s)$$

die gegebene Gleichung zwiſchen ϱ u. s iſt.

Zufolge der in der Aufgabe [252] gefundenen Gleichungen (1) iſt

$$\frac{dx}{dv} = \varrho.\cos v \quad ; \quad \frac{dy}{dv} = \varrho.\sin v \,.$$

Dieſe Ausdrücke ſetzen wir den Ausdrücken (2) in der vorigen Aufgabe

$$\frac{dx}{dv} = \frac{ds}{dv}.\cos v \quad ; \quad \frac{dy}{dv} = \frac{ds}{dv}.\sin v$$

gleich, und erhalten dadurch

$$\varrho = \frac{ds}{dv} \,. \qquad (3)$$

In Folge der gegebenen Gleichung haben wir daher

$$\frac{ds}{dv} = \psi(s) \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\psi(s)} \,,$$

woraus wir durch Integration

$$v = \int \frac{1}{\psi(s)}.ds + C$$

erhalten. Entwickeln wir, nach vollzogener Integration, aus dieſer Gleichung das s, ſo ergiebt ſich eine Gleichung von der Form $s = \varphi(v)$, welche wir nach der vorigen Aufgabe behandeln, und dadurch die vollſtändige Löſung der gegenwärtigen erhalten können.

I. Es ſoll die Curve gefunden werden, an welcher die Krümmungsradien den Bogen proportional ſind, und für welche daher

$$\varrho = ns$$

iſt.

Hier iſt $\psi(s) = ns$; folglich

$$v = \frac{1}{n}\int \frac{1}{s} ds + C \,,$$

d. i.

$$v = \frac{1}{n} log \frac{s}{C} \,, \quad \text{woraus} \quad s = Ce^{nv} = \varphi(v) \,.$$

Es iſt demnach $\varphi'(v) = nCe^{nv}$, und ſomit

$$x + C_1 = nC\int e^{nv}.\cos v.dv \quad ; \quad y + C_2 = nC\int e^{nv}.\sin v.dv \,,$$

§. 135. d. i., wenn wir die auf den Anfangspunkt ſich beziehenden Conſtanten $C_1 = C_2 = 0$ ſetzen,

$$x = \frac{nC(n\cos v + \sin v)e^{nv}}{n^2+1} \quad ; \quad y = \frac{nC(n\sin v - \cos v)e^{nv}}{n^2+1} .$$

Transformiren wir x u. y in Polarcoordinaten, indem wir $x = u\cos t$ und $y = u\sin t$ ſetzen, ſo ergiebt ſich durch Diviſion

$$\operatorname{tang} t = \frac{n\sin v - \cos v}{n\cos v + \sin v} = \operatorname{tang}(v-\mu) ,$$

wenn wir die conſtante Größe $n = \frac{\cos\mu}{\sin\mu}$ ſetzen, und es iſt alsdann

$$t = v - \mu \quad \text{oder} \quad v = t + \mu .$$

Nehmen wir die Summe der transformirten Gleichungen, nachdem wir ihre beiden Theile quadrirt haben, ſo kommt

$$u^2 = n^2C^2e^{2nv} \quad \text{alſo} \quad u = nCe^{nv} ,$$

und ſetzen wir hierin den für t gefundenen Ausdruck; ſo haben wir

$$u = nCe^{n(t+\mu)} .$$

Die geſuchte Curve iſt alſo eine logarithmiſche Spirale (§. 68. S. 5).

II. Es ſoll die Curve gefunden werden, für welche

$$\varrho^2 + s^2 = a^2$$

iſt.

Wir erhalten aus dieſer gegebenen Gleichung $\varrho = \sqrt{a^2 - s^2} = \psi(s)$, und ſomit

$$v = \int \frac{1}{\sqrt{a^2-s^2}} ds + C ,$$

d. i.

$$v = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{s}{a}\right) + C , \quad \text{woraus} \quad s = a\sin(v - C)$$

folgt. Legen wir die Ordinatenachſe der Normale im Anfangspunkte der Bogen parallel, ſo verſchwinden v und s zugleich und dann iſt $C = 0$, wodurch ſich die ſo eben gefundene Gleichung auf $s = a\sin v$ reducirt. Die geſuchte Curve iſt alſo, zufolge (III.) der vorigen Aufgabe, eine Cycloide.

III. Es ſoll die Curve gefunden werden, für welche

$$a\varrho = s^2 + a^2$$

iſt.

Wir haben hier $\psi(s) = \frac{s^2+a^2}{a}$ und daher

$$v = \int \frac{a}{s^2+a^2} . ds + C ,$$

d. i.

$$v = arc\left(tang = \frac{s}{a}\right) + C , \quad \text{woraus} \quad s = a\, tang(v - C) .$$

Die gesuchte Curve ist also, zufolge (IV.) der vorigen Aufgabe, eine Kettenlinie.

§. 136.

Aufgabe [255]. Die Relation, in welcher der Krümmungsradius ϱ einer Curve A mit dem Winkel v steht, unter welchem die Normale die Abscissenachse schneidet, ist gegeben. Es soll eine Relation zwischen dem Krümmungsradius ϱ' der Evolute A' jener Curve und dem Winkel v', unter welchem die Normale der Curve A' die Ordinatenachse schneidet, gefunden werden.

Es sey

$$\varrho = \varphi(v)$$

die Gleichung, welche die gegebene Relation ausdrückt. Wir bezeichnen die Bogen der Curven A und A' durch s und s'; und im Anfangspunkte a der Bogen s sey $\varrho = c$, so ist, wenn wir den Krümmungsmittelpunkt a' des Punktes a zum Anfangspunkte der Bogen s' nehmen (§. 117. G. 7),

$$s' = \varrho - c ,$$

und daher durch Differentiation

$$\frac{ds'}{dv} = \frac{d\varrho}{dv} .$$

Da aber offenbar $v = v'$ ist, wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, so haben wir auch $\frac{dv}{dv'} = 1$; daher $\frac{ds'}{dv'} = \frac{ds'}{dv}\frac{dv}{dv'} = \frac{ds'}{dv}$; also

$$\frac{ds'}{dv'} = \frac{d\varrho}{dv} .$$

Es ist aber auch (§. 135. G. 3)

$$\frac{ds'}{dv'} = \varrho' ;$$

folglich haben wir

§. 136.
$$\varrho' = \frac{d\varrho}{dv} = \frac{d\varphi(v)}{dv} = \varphi'(v) ;$$

und, da $v = v'$ ist, auch

$$\varrho' = \varphi'(v') ,$$

welches die verlangte Relation ist.

Für die Evolute A″ der Curve A′ ergiebt sich hieraus, wenn ϱ'' u. v'' die analogen Bedeutungen an der Curve A″ als ϱ u. v an der Curve A haben, und $\frac{d\varphi'(v)}{dv} = \frac{d^2\varphi(v)}{dv^2}$ durch $\varphi''(v)$ bezeichnet wird,

$$\varrho'' = \varphi''(v'') .$$

Allgemein aber für die nte Evolute $A^{(n)}$, in der nun leicht verständlichen Bezeichnung,

$$\varrho^{(n)} = \varphi^{(n)}(v^{(n)}) .$$

Ist z. B. die Relation

$$\varrho = a\,tang\,v$$

zwischen ϱ u. v an der Tractorie gegeben (§. 135. Aufg. 252. IV.), so erhalten wir für die Evolute A′ dieser Curve, welche eine Kettenlinie ist (§. 120. Aufg. 205.), die Relation

$$\varrho' = \frac{a}{cos^2 v'} ;$$

für die Evolute A″ der Kettenlinie aber hieraus

$$\varrho'' = \frac{2a\,sin\,v''}{cos^3 v''} ;$$

u. s. f.

Aufgabe [256]. Die Relation, in welcher der Krümmungsradius ϱ einer Curve A mit dem Winkel v steht, welchen dieser mit der Ordinatenachse bildet, ist gegeben. Es soll eine Relation zwischen dem Krümmungsradius ϱ_1 der Evolvente A_1 jener Curve und dem Winkel v_1, unter welchem dieser Krümmungsradius die Abscissenachse schneidet, gefunden werden.

Es sey

$$\varrho = \psi(v)$$

die Gleichung, welche die gegebene Relation ausdrückt. Bezeichnen wir die gesuchte Relation durch $\varrho_1 = \varphi(v_1)$, so erhalten wir aus ihr, zufolge der vorigen Aufgabe, $\varrho = \varphi'(v)$. Setzen wir diesen Ausdruck von ϱ in die

gegebene Gleichung, so haben $\varphi'(v) = \psi(v)$, also auch $\varphi'(v_1) = \psi(v_1)$ §. 136.
oder, was dasselbe ist, $\frac{d\varphi(v_1)}{dv_1} = \psi(v_1)$, woraus durch Integration

$$\varrho_1 = \int \psi(v_1).dv_1 + C_1$$

folgt, welche Gleichung die gesuchte Relation ausdrückt.

Für die Evolvente A_2 der Curve A_1 ergiebt sich hieraus, wenn ϱ_2, v_2 die analogen Bedeutungen wie ϱ, v haben,

$$\varrho_2 = \int \{ \int \psi(v_1).dv + C_1 \} + C_2 ,$$

u. s. f.

Es sollen z. B. die Relationen der Krümmungsradien ϱ und der Winkel v, an den auf einander folgenden Evolventen des Kreises gefunden werden.

Wenn die Curve A ein Kreis, dessen Radius $= a$ ist, so haben wir offenbar

$$\varrho = a .$$

Daraus ergiebt sich nun, zufolge des Obigen, nacheinander

für die Evolvente A_1 des Kreises A: $\varrho_1 = av_1 + C_1$,
für die Evolvente A_2 der Curve A_1: $\varrho_2 = \frac{1}{2}av_2^2 + C_1v_2 + C_2$,
für die Evolvente A_3 der Curve A_2: $\varrho_3 = \frac{1}{6}av_3^3 + \frac{1}{2}C_1v_3^2 + C_2v_3 + C_3$,
u. s. f.

Bestimmen wir die Constanten so, daß die Krümmungsradien und die Bogen zugleich verschwinden, so haben wir für die genannten Evolventen die einfachen Relationen

$$\varrho_1 = av_1 \quad ; \quad \varrho_2 = \tfrac{1}{2}av^2 \quad ; \quad \varrho_3 = \tfrac{1}{6}av^3 \quad ; \quad \text{etc.}$$

§. 137.

Die Form der Gleichung einer Curve in rechtwinkligen, schiefwinkligen oder Polar-Coordinaten hängt nicht von der Gestalt dieser Curve allein, sondern auch von ihrer Lage in Beziehung auf die Coordinatenachsen ab. Daher kann eine und dieselbe Curve, obgleich immer auf dasselbe Coordinaten System bezogen, durch Gleichungen von verschiedener Form ausgedrückt werden. In §. 3. haben wir die Formeln aufgefunden, durch welche die Formveränderung der Gleichung einer Curve bewerkstelligt werden kann. Von den drei Constanten, welche in den Formeln für die Transformation von rechtwinkligen zu rechtwinkligen Coordinaten vorkommen, beziehen sich zwei

§. 137. auf die Lage des Anfangspunktes der Coordinaten und eine auf die Lage der Abſciſſenachſe.

Eine Gleichung $\varrho = \varphi(v)$ zwiſchen dem Krümmungsradius einer Curve und dem Winkel, welchen er mit der Ordinatenachſe bildet, kann als eine Gleichung dieſer Curve betrachtet werden, denn einer ſolchen Gleichung entſpricht eine beſtimmte Curve (§. 135. Aufg. 252.), und umgekehrt gehört zu jeder Curve eine beſtimmte Gleichung zwiſchen ϱ und v. Die Form einer ſolchen Gleichung einer Curve hängt aber ebenfalls nicht von der Geſtalt der Curve allein, ſondern auch von ihrer Lage in Beziehung auf die Ordinatenachſe ab, und es iſt, wie man leicht einſieht, eine Conſtante vorhanden, welche dieſe Lage beſtimmt.

Auf ähnliche Weiſe verhält es ſich mit der Gleichung $\varrho = \psi(s)$ einer Curve, welche die Relation des Krümmungshalbmeſſers ϱ zu dem Bogen s dieſer Curve ausdrückt.

Es läßt ſich aber für jede Curve eine Gleichung aufſtellen, welche dieſe Curve völlig unabhängig von ihrer Lage in der Ebene ausdrückt, und zwar kann dies auf verſchiedene Weiſe geſchehen. Wir wollen hier nur eine dieſer Arten in Betrachtung ziehen.

Zu einem jeden Punkte a einer gegebenen Curve gehört ein beſtimmter Krümmungsradius ϱ, deſſen Endpunkt a′ ein Punkt ihrer Evolute iſt, und dieſer Punkt a′ der Evolute hat wiederum einen ebenfalls beſtimmten Krümmungsradius ϱ'. Da nun dieſe Krümmungsradien ϱ u. ϱ' immer dieſelben ſind, welche Lage die Curve auch haben mag, ſo wird eine Gleichung zwiſchen ϱ und ϱ' die Curve völlig unabhängig von ihrer Lage ausdrücken *).

Wir werden hierdurch zu den beiden folgenden Aufgaben geführt.

Aufgabe [257]. Die Gleichung einer Curve in rechtwinkligen Coordinaten iſt gegeben. Es ſoll die Gleichung derſelben Curve zwiſchen ihrem Krümmungsradius ϱ und dem Krümmungsradius ϱ' ihrer Evolute gefunden werden.

Es ſeyen x, y die rechtwinkligen Coordinaten der Curve, deren Gleichung gegeben iſt, α, β die auf dieſelben Achſen bezogenen Coordinaten ihrer Evolute. Wir bezeichnen, der Kürze wegen, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ reſpective durch p, q, r.

*) Dieſe Beſtimmungsart der Curven iſt zuerſt von H. Gergonne in den Annales de math. p. et a., T. IV., gegeben worden.

Die Größen α, β und ϱ sind, zufolge des §. 83. (S. 5, 6, 7), durch die Gleichungen §. 137.

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = \varrho^2 , \quad (1)$$

$$(y-\beta)p+(x-\alpha) = 0 , \quad (2)$$

$$(y-\beta)q+1+p^2 = 0 , \quad (3)$$

gegeben, und zwar ist hieraus (§. 83. F. 10)

$$\varrho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} . \quad (4)$$

Ferner ist ähnlicherweise

$$\varrho' = \frac{\left(1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}} . \quad (5)$$

In Folge der gegebenen Gleichung der Curve und der Gleichungen (1, 2, 3) sind von den fünf Größen ϱ, x, y, α, β je vier Functionen der fünften unabhängigen. Wählen wir x zu dieser unabhängigen Größe, und differentiiren die Gleichung (2) nach x, so kommt

$$\{(y-\beta)q+1+p^2\}-\{p\frac{d\beta}{d\alpha}+1\}\frac{d\alpha}{dx} = 0 ,$$

welche Gleichung sich, in Folge von (3), auf

$$p\frac{d\beta}{d\alpha}+1 = 0 \quad (6)$$

reducirt, woraus sich

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{p} \quad (7)$$

ergiebt (vergl. §. 87.). Differentiiren wir die Gleichung (3) nach x, so erhalten wir

$$\{(y-\beta)r+3pq\}-q\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = 0 , \quad (8)$$

und, wenn wir zwischen (3) und (8) $(y-\beta)$ eliminiren,

$$\{3pq^2-(1+p^2)r\}-q^2\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = 0 . \quad (9)$$

Aus der Gleichung (7) aber erhalten wir durch Differentiation

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\frac{d\alpha}{dx} = \frac{q}{p^2} , \quad \text{also} \quad \frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{q}{p^2}\cdot\frac{1}{\frac{d\alpha}{dx}} . \quad (10)$$

§. 137. Setzen wir den Ausdruck von $\frac{d\alpha}{dx}$, welcher sich aus (9) ergiebt, und, zufolge (7), $-\frac{1}{p}$ für $\frac{d\beta}{d\alpha}$ in die Gleichung (10), so kommt

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = -\frac{q^3}{\{3pq^2-(1+p^2)r\}p^3}. \qquad (11)$$

Die Substitution der Ausdrücke (7) u. (11) in die Formel (5) giebt uns endlich

$$\varrho' = \frac{\{3pq^2-(1+p^2)r\}\{1+p^2\}^{\frac{3}{2}}}{q^3}. \qquad (12)$$

Da nun die Gleichung der Curve in x u. y gegeben ist, so lassen sich p, q u. r, also auch, vermittelst der Formeln (4) u. (12), ϱ u. ϱ' durch x ausdrücken, und durch Elimination von x läßt sich dann eine Gleichung zwischen ϱ und ϱ' darstellen, welche die verlangte ist.

Es ist noch zu bemerken, daß statt der Gleichung (12) auch die Gleichung

$$\varrho' = \frac{3pq^2-(1+p^2)r}{q^2}.\varrho \qquad (13)$$

angewendet werden kann, welche aus den Gleichungen (4) u. (12) folgt.

Aufgabe [258]. Die Gleichung einer Curve zwischen ihrem Krümmungsradius ϱ und demjenigen ihrer Evolute ϱ' ist gegeben. Es soll die Gleichung dieser Curve in rechtwinkligen Coordinaten gefunden werden.

Es sey $\psi(\varrho,\varrho')=0$ die gegebene Gleichung zwischen den Krümmungsradien. Setzen wir in diese Gleichung die in der vorigen Aufgabe angegebenen Ausdrücke (4) u. (12) für ϱ und ϱ', so erhalten wir eine Differentialgleichung dritter Ordnung in p, q, r, welche integrirt die verlangte Gleichung der Curve in rechtwinkligen Coordinaten giebt. Die drei in die gesuchte Gleichung eintretenden Constanten beziehen sich auf die Lage der Curve oder, was dasselbe ist, auf die Lage der Coordinatenachsen.

In Betreff dieser Integration bemerken wir im Allgemeinen Folgendes.

Wenn ϱ' sich aus der gegebenen Gleichung leicht entwickeln läßt, so daß wir

$$\varrho' = f(\varrho)$$

haben, so können wir folgendermaßen verfahren. Es ist, zufolge der Gleichung (4),

$$\varrho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} ,$$ §. 137.

und hieraus ergiebt sich, durch Differentiation,

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{3pq^2(1+p^2)^{\frac{1}{2}} - (1+p^2)^{\frac{3}{2}}r}{q^2} = \left\{\frac{3pq^2-(1+p^2)r}{q^2}\right\}.(1+p^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Eliminiren wir den zwischen den Klammern stehenden Ausdruck vermittelst der Gleichung (13), so erhalten wir

$$\sqrt{1+p^2}\frac{dx}{d\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho'} ,$$

oder, weil $\varrho' = f(\varrho)$,

$$\sqrt{1+p^2}\frac{dx}{d\varrho} = \frac{\varrho}{f(\varrho)} ,$$

und, wenn wir integriren, und bemerken, daß $\int\sqrt{1+p^2}.dx = s$,

$$s = \int\frac{\varrho}{f(\varrho)}d\varrho + C ,$$

eine Gleichung, welche den Bogen der gesuchten Curve durch ihren Krümmungsradius ausdrückt. Hierdurch ist die Aufgabe auf die schon gelöste Aufgabe [254] in §. 135. zurückgeführt.

Zu demselben Resultate können wir auch, ohne uns auf die vorige Aufgabe zu stützen, auf folgende einfache Weise gelangen.

Zufolge §. 135. (S. 3) ist, wenn wir die dort erklärte Bezeichnung beibehalten,

$$\varrho = \frac{ds}{dv} \quad \text{und} \quad \varrho' = \frac{ds'}{dv'} ;$$

auch ist $\frac{dv'}{dv} = 1$, und, nach (§. 117. S. 6) $\frac{d\varrho}{d\alpha} = \sqrt{1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}} = \frac{ds'}{d\alpha}$, woraus $\frac{d\varrho}{ds'} = 1$ folgt. Nun giebt die Division der zuerst angegebenen Gleichungen

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{ds}{dv}\frac{dv'}{ds'} = \frac{ds}{ds'}\frac{dv'}{dv} .$$

Folglich ist

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{ds}{ds'} = \frac{ds}{d\varrho}\frac{d\varrho}{ds'} ,$$

und somit

§. 137.

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{ds}{d\varrho},$$

oder, in Folge der gegebenen Gleichung, $\varrho' = f(\varrho)$, $\frac{ds}{d\varrho} = \frac{\varrho}{f(\varrho)}$, woraus

$$s = \int \frac{\varrho}{f(\varrho)} d\varrho + C$$

wie oben.

§. 138.

Die folgenden Aufgaben enthalten einige Beispiele zu den vorhergehenden.

Aufgabe [259]. Die Gleichung der Kettenlinie zwischen den Krümmungsradien ϱ und ϱ' zu finden.

Aus der Gleichung dieser Curve (§. 64. S. 5)

$$y = \tfrac{1}{2}m\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

erhalten wir nach einander

$$p = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) \quad ; \quad q = \frac{1}{2m}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right);$$

$$r = \frac{1}{2m^2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right).$$

Daraus folgt $q = \frac{y}{m^2}$, $r = \frac{p}{m^2}$ und $1 + p^2 = \frac{y^2}{m^2}$, und wenn wir diese Ausdrücke in die Gleichungen (4 u. 13) des vorigen §. setzen,

$$\varrho = \frac{y^2}{m} \quad ; \quad \varrho' = 2p\varrho.$$

Hieraus ergiebt sich wieder

$$y^2 = m\varrho \quad ; \quad p = \frac{\varrho'}{2\varrho},$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in $1 + p^2 = \frac{y^2}{m^2}$,

$$4\varrho^3 = m\{4\varrho^2 + \varrho'^2\},$$

welches die verlangte Gleichung ist.

Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn wir in den zu Ende der 255sten Aufgabe angegebenen Gleichungen, welche die Relation der Krüm-

mungsradien ϱ' u. ϱ'' der Kettenlinie und ihrer Evolute zu den Winkeln v' §. 138.
u. v'' ausdrücken, $\varrho' = \varrho$, $\varrho'' = \varrho'$ und $v'' = v' = v$ setzen, und diese Größe v eliminiren.

Aufgabe [260]. Die Gleichungen derjenigen Curven in rechtwinkligen Coordinaten zu finden, welche durch die Gleichungen

$$\varrho' = a\varrho\,, \qquad \text{(I)}$$

$$\varrho'^n = a\varrho^{n-1}\,, \qquad \text{(II)}$$

$$a\varrho' = \varrho^2 + a^2\,, \qquad \text{(III)}$$

$$a^2\varrho'^2 + b^2\varrho^2 = a^2b^2 \qquad \text{(IV)}$$

zwischen den Krümmungsradien ϱ u. ϱ' gegeben sind.

I. Für die erste Gleichung ist $f(\varrho) = a\varrho$, daher zufolge des zu Ende des vorigen §. gefundenen Ausdrucks

$$s = \int \frac{1}{a} d\varrho \quad \text{oder} \quad s = \frac{\varrho}{a} + C\,.$$

Setzen wir die Constante $C = 0$, wodurch die Gestalt der Curve nicht particularisirt, sondern nur der Anfangspunkt der Bogen s so bestimmt wird, daß die Bogen und Krümmungsradien zugleich verschwinden, so haben wir $\varrho = as$. Die Bogen sind also den Krümmungsradien proportional, und die Curve, zufolge der Aufgabe [254, I.] im §. 135., eine logarithmische Spirale.

II. Für die zweite Gleichung ist $f(\varrho) = a^{\frac{1}{n}} \varrho^{1-\frac{1}{n}}$, daher

$$s = \int \frac{\varrho^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}} d\varrho = \frac{n.\varrho^{\frac{n+1}{n}}}{(n+1)a^{\frac{1}{n}}}\,,$$

woraus $\varrho = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} a^{\frac{1}{n+1}} s^{\frac{n}{n+1}} = \psi(s)$ folgt.

Nun finden wir, nach §. 135., Aufg. 254.,

$$v = \int \frac{1}{\psi(s)} ds = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{-n}{n+1}} a^{\frac{-1}{n+1}} \int s^{\frac{-n}{n+1}} ds = n^{\frac{n}{n+1}} (n+1)^{\frac{1}{n+1}} a^{\frac{-1}{n+1}} s^{\frac{1}{n+1}}\,,$$

wenn wir, wie bei der ersten Integration, keine Constante hinzufügen, wodurch, wie man leicht einsieht, nur die Lage der Curve gegen die Ordinatenachse particularisirt wird. Entwickeln wir s, so kommt

§. 138. $$s = \frac{a.v^{n+1}}{(n+1)n^n} = \varphi(v) ,$$

und durch Differentiation $\varphi'(v) = \frac{av^n}{n^n}$. Wir haben alſo, zufolge §. 135. (Aufg. 253.),

$$x = \int \varphi'(v).\cos v.dv = \frac{a}{n^n}\int v^n.\cos v.dv ,$$

$$y = \int \varphi'(v).\sin v.dv = \frac{a}{n^n}\int v^n.\sin v.dv ,$$

wenn wir die, den Anfangspunkt der Coordinaten beſtimmenden, Conſtanten C_1 u. C_2 gleich Null ſetzen, und nach vollführter Integration

$$x = M.\sin v + N.\cos v ,$$
$$y = N.\sin v - M.\cos v$$

als dasjenige Gleichungsſyſtem, welches die Curve in rechtwinkligen Coordinaten ausdrückt, und worin

$$M = \frac{a}{n^n}\{v^n - n(n-1)v^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)v^{n-4} - \text{etc.}\} ,$$

$$N = \frac{a}{n^{n-1}}\{v^{n-1} - (n-1)(n-2)v^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)v^{n-5} - \text{etc.}\} ,$$

zwei Ausdrücke, die geſchloſſen ſind, wenn n eine ganze und poſitive Zahl iſt.

Für $n = 1$ iſt z. B. $M = av$ und $N = a$, daher

$$x = a(v.\sin v + \cos v) \quad ; \quad y = a(\sin v - v.\cos v) ,$$

ein Gleichungsſyſtem, welches mit dem in §. 135. (Aufg. 252, I.) gefundenen übereinſtimmt, und die Gleichung $\varrho' = a$ drückt alſo eine Kreisevolvente aus, was auch ohne alle Rechnung von vorn herein klar iſt.

III. Für die dritte Gleichung iſt $f(\varrho) = \frac{\varrho^2 + a^2}{a}$, daher

$$s = \int \frac{a\varrho}{\varrho^2 + a^2} d\varrho = \tfrac{1}{2} a \log(\varrho^2 + a^2) ,$$

wenn wir keine Conſtante hinzufügen, und woraus

$$\varrho = \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - a^2} = \psi(s)$$

folgt. Hieraus finden wir, nach §. 135.,

$$v = \int \frac{1}{\psi(s)} ds = \int \frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - a^2}} ds .$$

Um die Integration zu bewirken, ſetzen wir $e^{\frac{s}{a}} = z$, und erhalten dann §. 138. leicht

$$v = arc\left(cos = ae^{-\frac{s}{a}}\right).$$

Hieraus ziehen wir

$$s = -a\,log\frac{cos\,v}{a} = \varphi(v),$$

und durch Differentiation $\varphi'(v) = a.tang\,v$. Wir haben alſo, zufolge des §. 135.,

$$x = a\int sin\,v.dv \quad ; \quad y = a\int\frac{sin^2 v}{cos\,v}.dv,$$

woraus ſich, wie in §. 135. (Aufg. 252., IV.), ergiebt, daß die durch die Gleichung (III) ausgedrückte Curve die in §. 120. betrachtete Tractorie iſt.

IV. Für die vierte Gleichung iſt $f(\varrho) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varrho^2}$, daher

$$s = \frac{a}{b}\int\frac{\varrho}{\sqrt{a^2-\varrho^2}}.d\varrho = -\frac{a}{b}\sqrt{a^2-\varrho^2}+C,$$

und wenn wir die Conſtante C ſo beſtimmen, daß s und ϱ zugleich verſchwinden, $s = \frac{a^2}{b} - \frac{a}{b}\sqrt{a^2-\varrho^2}$, woraus

$$\varrho = \frac{\sqrt{2a^2bs-b^2s^2}}{a} = \psi(s)$$

folgt. Zufolge des §. 135. iſt nun

$$v = \int\frac{1}{\psi(s)}ds = \int\frac{a}{\sqrt{2a^2bs-b^2s^2}}.ds = \frac{a}{b}arc\left(cos = \left(1-\frac{bs}{a^2}\right)\right),$$

wo keine Conſtante hinzuzufügen iſt, wenn v und s zugleich verſchwinden ſollen. Hieraus ziehen wir

$$s = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{b}cos\frac{b}{a}v = \varphi(v),$$

und durch Differentiation $\varphi'(v) = a\,sin\frac{b}{a}v$. Wir haben alſo, zufolge §. 135., wenn wir die Conſtanten gleich Null ſetzen,

$$x = a\int sin\frac{b}{a}v.cos\,v.dv \quad ; \quad y = a\int sin\frac{b}{a}v.sin\,v.dv,$$

§. 138. oder, was daſſelbe iſt,

$$x = \tfrac{1}{2}a\int\left\{\sin\frac{a+b}{a}v - \sin\frac{a-b}{v}\right\}dv \;;\; y = \tfrac{1}{2}a\int\left\{-\cos\frac{a+b}{a}v + \cos\frac{a-b}{a}v\right\}dv\,,$$

demnach

$$x = \frac{a^2}{2(a-b)}\cos\frac{a-b}{a}v - \frac{a^2}{2(a+b)}\cos\frac{a+b}{a}a\,,$$

$$y = \frac{a^2}{2(a-b)}\sin\frac{a-b}{a}v - \frac{a^2}{2(a+b)}\sin\frac{a+b}{a}v\,,$$

ein Gleichungsſyſtem, durch welches die Curve (IV) in rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückt iſt. Setzen wir zur Vereinfachung

$$a = \frac{4a'(a'+r)}{2a'+r} \quad ; \quad b = \frac{4ra'(a'+r)}{(2a'+r)^2}\,,$$

ſo verwandeln ſich die beiden gefundenen Gleichungen in

$$x = (r+a')\cos\frac{2a'}{2a'+r}v - a'\cos\frac{2(a'+r)}{2a'+r}v\,,$$

$$y = (r+a')\sin\frac{2a'}{2a'+r}v - a'\sin\frac{2(a'+r)}{2a'+r}v\,,$$

oder, wenn wir noch $v = \frac{2a'+r}{2a'}t$ ſetzen, in

$$x = (r+a')\cos t - a'\cos\frac{r+a'}{a'}t\,,$$

$$y = (r+a')\sin t - a'\sin\frac{r+a'}{a'}t\,,$$

Da dieſe Gleichungen mit den Gleichungen (1) des §. 67. übereinſtimmen, ſo folgt, daß die durch die Gleichung

$$a^2\varrho'^2 + b^2\varrho^2 = a^2b^2 \qquad \text{(IV)}$$

ausgedrückte Curve eine Epicycloide iſt, wenn nämlich a und b reelle, alſo a^2 und b^2 poſitive Größen ſind. Der Radius r der Baſis dieſer Epicycloide iſt gleich $\frac{a^2b}{a^2-b^2}$ und der Radius a' des erzeugenden Kreiſes gleich $\frac{a^2}{2(a+b)}$. Wenn $a = b$ iſt, wenn alſo die Gleichung zwiſchen den Krümmungsradien

$$\varrho'^2 + \varrho^2 = a^2 \qquad \text{(V)}$$

heißt, ſo iſt $r = \infty$ und $a' = \frac{1}{4}a$, und die Curve iſt alsdann eine Cycloide.

§. 139.

§. 139.

Aufgabe [261]. Die Gleichung einer Curve A, zwiſchen ihrem Krümmungsradius ϱ und demjenigen ϱ' ihrer Evolute A' iſt gegeben. Es ſoll die Gleichung der Evolute A' zwiſchen ihrem Krümmungsradius ϱ' und demjenigen ϱ'' ihrer Evolute A'' gefunden werden.

Wenn ν' und ν'' die Winkel bedeuten, welche reſpective die Krümmungsradien ϱ' und ϱ'' mit der Ordinatenachſe bilden, und wenn s' und s'' die Bogen der Evoluten A' und A'' bezeichnen, ſo haben wir (§. 135 u. 137.)

$$\varrho'' = \frac{ds''}{d\nu''} \quad ; \quad \varrho' = \frac{ds'}{d\nu'} \quad ; \quad \frac{d\nu'}{d\nu''} = 1 \, ,$$

$$\frac{d\varrho'}{ds''} = 1 \quad ; \quad \frac{d\varrho}{ds'} = 1 \, .$$

Durch Diviſion erhalten wir aus den beiden erſten Gleichungen und vermittelſt der dritten

$$\frac{\varrho''}{\varrho'} = \frac{ds''}{d\nu''} \frac{d\nu'}{ds'} = \frac{ds''}{ds'} \frac{d\nu'}{d\nu''} = \frac{ds''}{ds'} \, ,$$

und aus den beiden letzten Gleichungen folgt unmittelbar

$$\frac{d\varrho'}{ds''} = \frac{d\varrho}{ds'} \, , \quad \text{alſo auch} \quad \frac{d\varrho'}{d\varrho} = \frac{ds''}{ds'} \, ;$$

demnach iſt

$$\frac{\varrho''}{\varrho'} = \frac{d\varrho'}{d\varrho} \quad \text{oder} \quad \varrho'' = \varrho' . \frac{d\varrho'}{d\varrho} \, . \tag{1}$$

Wenn nun $\varrho' = f(\varrho)$ die gegebene Gleichung der Curve A iſt, ſo erhalten wir aus ihr $\frac{d\varrho'}{d\varrho} = \frac{df(\varrho)}{d\varrho} = f'(\varrho)$, und folglich

$$\varrho'' = \varrho' f'(\varrho) \, . \tag{2}$$

Elimininen wir ϱ zwiſchen dieſer Gleichung und der gegebenen, ſo erhalten wir die verlangte Gleichung der Curve A'' zwiſchen ϱ'' u. ϱ'.

Wenn dieſe Gleichung gefunden iſt, ſo läßt ſich aus ihr diejenige der Evolute A''' der Curve A'' auf dieſelbe Weiſe herleiten, u. ſ. f.

Aufgabe [262]. Es ſollen die Gleichungen der Evoluten derjenigen Curven gefunden werden, welche in der 260ſten Aufgabe (§. 138.) genannt worden ſind.

I. Aus der Gleichung

$$\varrho' = a\varrho \tag{1}$$

§. 139. der logarithmiſchen Spirale A finden wir $\frac{d\varrho'}{d\varrho} = a$, und es iſt daher die Gleichung ihrer Evolute A' (vor. Aufg.)

$$\varrho'' = a\varrho' ,$$

und, wie leicht einzuſehen, allgemein die Gleichung der nten Evolute $A^{(n)}$

$$\varrho^{(n+1)} = a\varrho^{(n)} .$$

Alle dieſe Evoluten ſind alſo unter ſich und der Spirale A gleich (vergl. §. 88. Aufg. 146., VII.).

II. Aus der Gleichung

$$\varrho'^n = a\varrho^{n-1} \qquad (II)$$

erhalten wir $\varrho = a^{\frac{-1}{n-1}}\varrho'^{\frac{n}{n-1}}$ und daher $\frac{d\varrho}{d\varrho'} = \frac{n}{n-1}a^{\frac{-n}{n-1}}\varrho'^{\frac{1}{n-1}}$. Es iſt alſo die Gleichung der Evolute A'

$$\varrho'' = \frac{n-1}{n}a^{\frac{1}{n-1}}\varrho'^{\frac{2-n}{1-n}} ,$$

oder

$$n^{n-1}\varrho''^{n-1} = (n-1)^{n-1}a\varrho'^{n-2} .$$

Es iſt leicht einzuſehen, daß der (n—1)ten Evolute $A^{(n-1)}$ die Gleichung $\varrho^{(n)} = C$ zukommen wird, wenn n eine ganze und poſitive Zahl iſt. Dieſe Gleichung drückt aber offenbar eine Kreisevolvente aus; die Gleichung (II) iſt daher diejenige der nten Evolvente des Kreiſes.

III. Aus der Gleichung

$$a\varrho' = \varrho^2 + a^2 , \qquad (III)$$

welche eine Tractorie ausdrückt, erhalten wir $\varrho = \sqrt{a\varrho' - a^2}$, und daraus $\frac{d\varrho}{d\varrho'} = \frac{a}{2\sqrt{a\varrho' - a^2}}$. Es iſt daher die Gleichung der Evolute A': $\varrho'' = \frac{2\sqrt{a\varrho' - a^2}}{a}\cdot\varrho'$ oder

$$4\varrho'^2 = a(4\varrho'^2 + \varrho''^2) ,$$

wodurch alſo die Kettenlinie ausgedrückt wird (§. 120. Aufg. 205.), was mit §. 138. (Aufg. 259.) übereinſtimmt.

IV. Aus der Gleichung

$$a^2\varrho'^2 + b^2\varrho^2 = a^2b^2 , \qquad (IV)$$

welche, unter der Vorausſetzung, daß a und b reelle Größen ſind, eine Epi-

cycloide ausdrückt, ergiebt sich $\varrho = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \varrho'^2}$ und daher $\frac{d\varrho}{d\varrho'} =$ §. 139.
$-\frac{a\varrho'}{b\sqrt{b^2-\varrho'^2}}$. Es ist also die Gleichung der Evolute A':

$$\varrho'' = -\frac{b\sqrt{b^2-\varrho'^2}}{a}$$

oder

$$a^2\varrho''^2 + b^2\varrho'^2 = b^4 ,$$

welcher wir die Form der vorgelegten geben können, indem wir $a = \frac{a'^2}{b'}$ und $b = a'$ setzen, und dadurch

$$a'^2\varrho''^2 + b'^2\varrho'^2 = a'^2b'^2$$

erhalten. Die Evolute A' ist also wiederum eine Epicycloide, und zwar ist sie, wie man leicht einsehen wird, der Epicycloide A ähnlich (vergl. §. 88. Aufg. 146., VI.).

Aufgabe [263]. Die Gleichung einer Curve A zwischen ihrem Krümmungsradius ϱ und demjenigen ϱ' ihrer Evolute A' ist gegeben. Es soll die Gleichung der Evolvente A_1 zwischen ihrem Krümmungsradius ϱ_1 und demjenigen ϱ ihrer Evolute A gefunden werden.

Vertauschen wir in der Gleichung (1) ϱ, ϱ' und ϱ'' respective mit ϱ_1, ϱ und ϱ', so haben wir

$$\frac{d\varrho_1}{d\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho'} .$$

Wenn nun $\varrho' = f(\varrho)$ die gegebene Gleichung der Curve A ist, so erhalten wir $\frac{d\varrho_1}{d\varrho} = \frac{\varrho}{f(\varrho)}$, und demnach durch Integration

$$\varrho_1 = \int \frac{\varrho}{f(\varrho)} d\varrho + C$$

als die Gleichung der Evolvente A_1.

Legen wir der Constante C verschiedene Werthe bei, so drücken die dadurch entstehenden Gleichungen verschiedene Evolventen der Curve A aus. Hieraus folgt, daß zwei Gleichungen

$$F\{(\varrho_1 + C_1), \varrho\} = 0 \quad \text{und} \quad F\{(\varrho_1 + C_2), \varrho\} = 0 ,$$

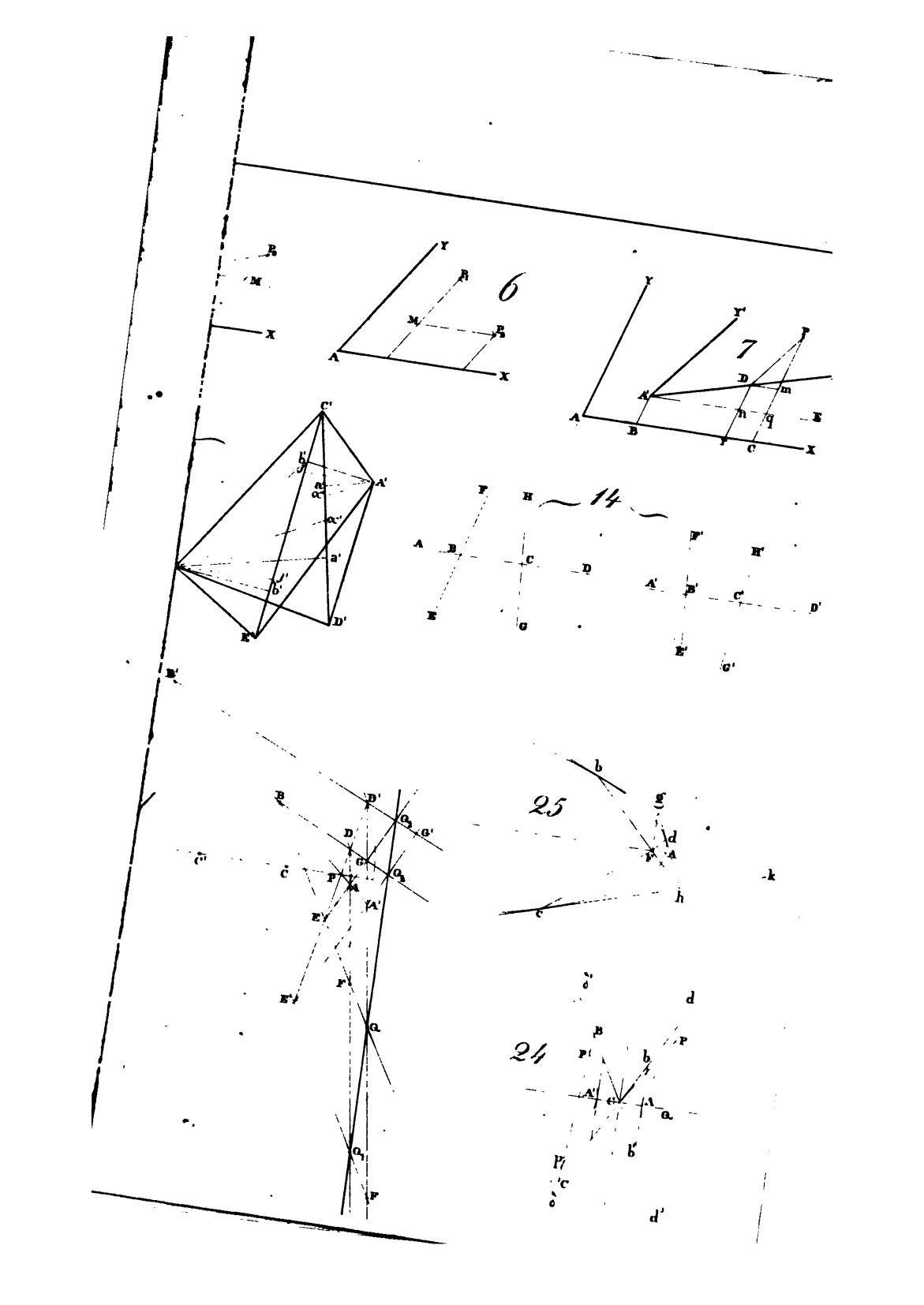
oder auch $F\{(\varrho + C_1), \varrho'\} = 0$ und $F\{(\varrho + C_2), \varrho'\} = 0$ zwei Curven ausdrücken, welche, wenn sie gehörig gelegt werden, einander parallel sind, was mit §. 92. übereinstimmt.

Verbesserungen.

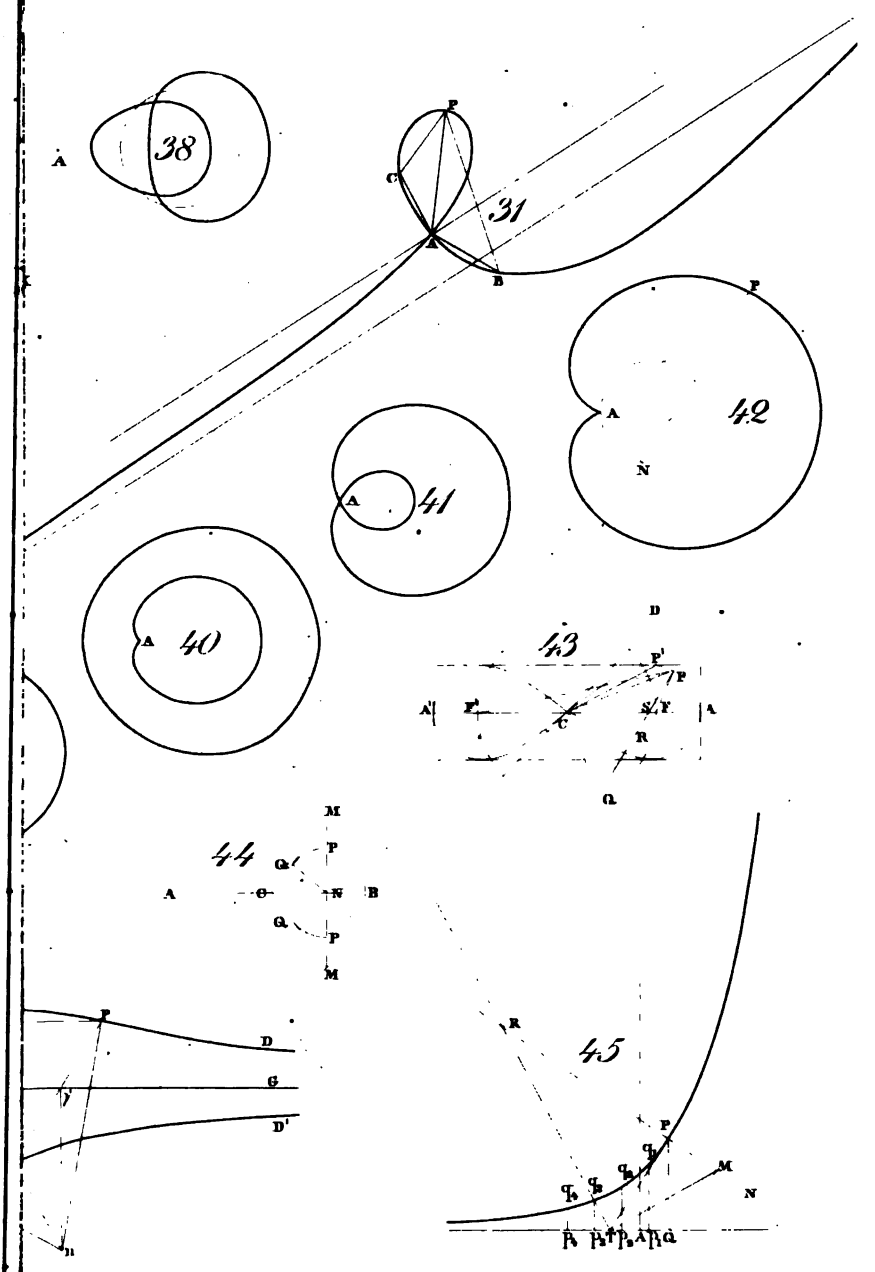
Seite 6. Zeile 6. v. o. ſt. DM l. Dm.
— 7. — 4. v. u. iſt Fig. 4. auf den Rand zu ſetzen.
— 12. — 8. v. u. ſt. $\sqrt{\left(\frac{y_1-y'}{x_1-x'}\right)+2}$ l. $\sqrt{\left(\frac{y_1-y'}{x_1-x'}\right)^2+2}$.
— 13. — 10. v. o. ſt. $y_1 = \frac{my''}{n \pm m}$ l. $y_1 = \pm\frac{my''}{n \pm m} = \frac{my''}{m \pm n}$.
— 35. — 15. v. o. ſt. von t u. u ſind l. von t u. u und deren Nenner einander gleich ſind.
— 61. — 16. v. u. ſt. (ay'+bx'+c)y l. (ay'+bx'+c)u .
— 94. — 3. v. o. ſt. CF l. CG .
— 246. — 16. v. o. ſt. $\frac{n+3)}{2}$ l. $\frac{n(n+3)}{2}$.
— 262. — 8. v. u. iſt = 0 zu ſtreichen.
— 296. — 2. v. o. ſt. $y = {}^1m$ l. $y = \frac{1}{2}m$.
— 297. — 10. v. o. ſt. $\overline{cos\frac{1}{2}x}$ l. $\overline{cos\frac{1}{2}\pi}$.
— 298. — 8. v. o. ſt. MP l. NP .
— 405. — 10. v. u. ſt. $sin^2 t$ l. $sin^2 2t$.
— 460. — 6. v. u. ſt. ; $-y$ l. ; $\beta - y$.
— 469. — 5. v. u. ſt. $n\sqrt{(\beta-y)^2+(\alpha-x)}$ l. $n\sqrt{(\beta-y)^2+(\alpha-x)^2}$.
— 474. — 6. v. o. ſt. $\frac{n^2}{n'^2}\{(\beta'-y)p+(\alpha-x)\}$ l. $\frac{n^2}{n'^2}\{(\beta'-y)p+(\alpha'-x)\}$.
— 543. — 8. v. o. ſt. $\{(\delta_2-\delta_1\mp(\varrho_2-\varrho_1\}$ l. $\{(\delta_2-\delta_1)\mp(\varrho_2-\varrho_1)\}$.
— 576. — 4. v. u. ſt. $\varphi(x'')$ l. $\varphi(\alpha'')$.
— 597. — 2. v. o. ſt. las l. als .

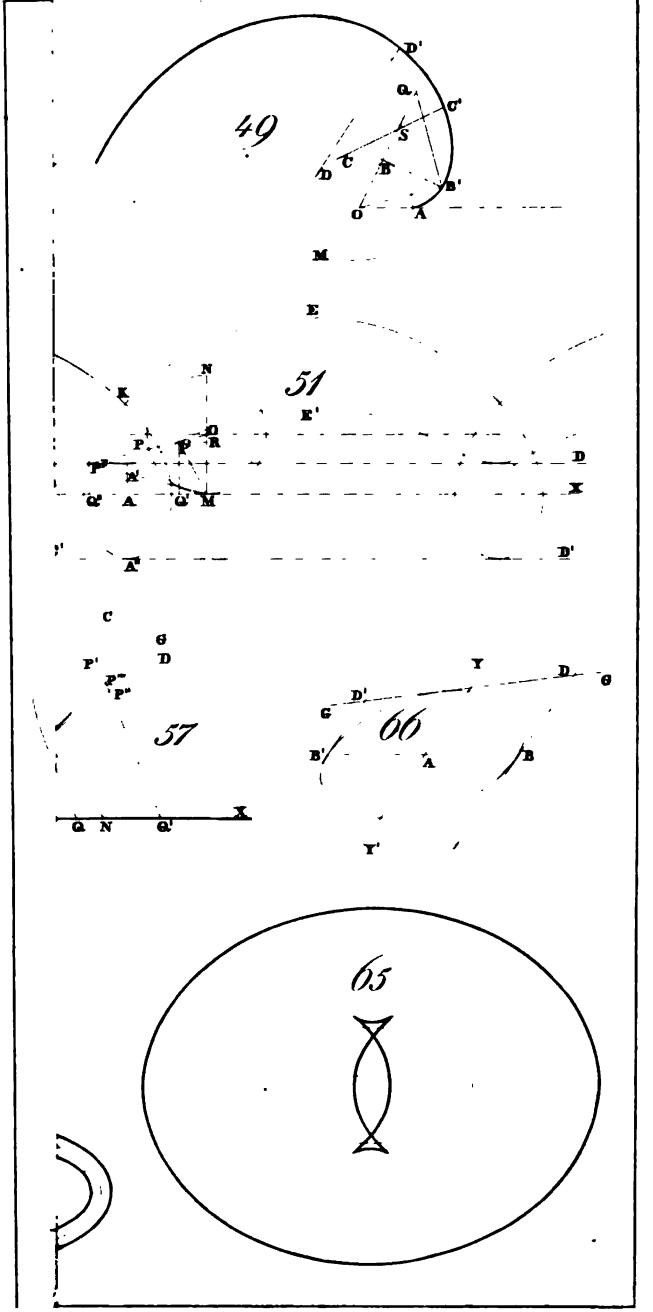
Gedruckt bei A. W. Schade in Berlin.

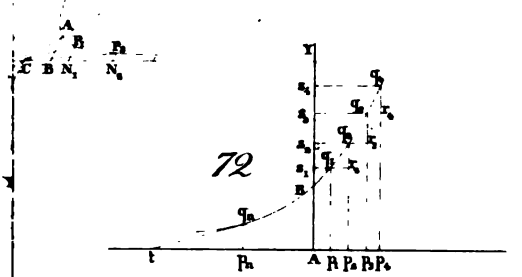
DEC 2 1921

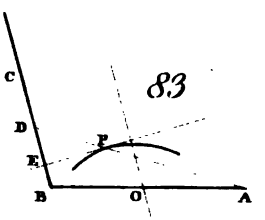

6
7
14
25
24

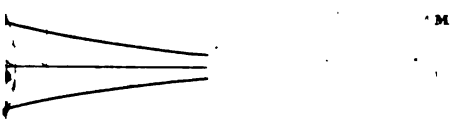
Taf. I

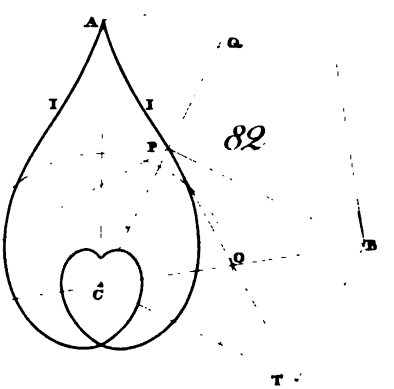



49
51
57
66
65


72


83




82